PROLONGEMENT DES FONCTIONS CONVEXES

YVES DE CORNULIER ET ROMAIN TESSERA

1

Dans tout ce papier, C désignera un convexe ouvert non vide d'un espace vectoriel réel de dimension d, et $K = \overline{C}$ est son adhérence.

On rappelle sans démonstration le classique :

Théorème 1.1. *Soit f convexe sur C. Alors f est continue, et*

$$f = \sup\{u \text{ affine}, u \leq f\}.$$

Définition 1. A toute fonction numérique f définie sur C, on associe la fonction :

$$\widetilde{f} = \sup\{u \text{ affine}, u \leq f\}$$

définie sur K et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On a les propriétés immédiates :

– $\widetilde{f} \leq f$ sur C.
– La fonction $\widetilde{f}$ est convexe et s.c.i. sur K.
– Soit $\widetilde{f} = -\infty$, soit $\widetilde{f} > -\infty$.
– Si f est convexe, alors $\widetilde{f}$ est convexe sur K et prolonge f (d'après le théorème).

On a un premier résultat de continuité :

Proposition 1. *La fonction $\widetilde{f}$ est continue sur tout segment. d'intérieur inclus dans C.*

Preuve. On se ramène facilement à montrer que si F est un ensemble de fonctions affines sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, et si la fonction $g = \sup_{f \in F} f$ est finie sur $]a, b[$, alors g est continue sur $[a, b]$.

Ce résultat est clair, car alors g est s.c.i. comme borne supérieure de fonctions continues, et s.c.s. comme fonction convexe sur un segment et finie sur son intérieur. □

On en déduit notamment que, si f est convexe, $\widetilde{f}$ est l'unique fonction s.c.i. sur K prolongeant f.

Le contre-exemple suivant montre qu'en général $\widetilde{f}$ n'est pas continue :

Exemple 1. *Soient $D \subsetneq C$ deux boules ouvertes d'un espace euclidien, telles que les sphères s'intersectent en un point A. Notons S le bord de C. Posons*

$$f = \sup\{u \text{ affine}, u \leq 0 \text{ sur D}, u \leq 1 \text{ sur C}\}$$

Alors $f = 0$ sur $\overline{D}$, et $f = 1$ sur $S \backslash \{A\}$. Notons g la restriction de f à C. Alors $\widetilde{g} = f$, car ces deux fonctions sont égales sur C et sont continues sur tout segment. Ainsi $\widetilde{g}$ n'est pas continue.

Date: 31 janvier 2003.

Définition 2. On appelle point conique d'un convexe fermé K un point $A \in K$ tel qu'il existe un cône convexe fermé F_A de sommet A, coïncidant avec K au voisinage de A, i.e. $\exists V$ voisinage de A tel que $K \cap V = F \cap V$.

On voit qu'on a forcément

$$F_A = \bigcup_{B \in K \setminus \{A\}} [AB)$$

($[AB)$ désignant la demi-droite). Notons qu'en général, F_A n'est pas fermé.

Exemples :

– Tout point de l'intérieur de K est conique.

– Si K est une boule euclidienne, tout point du bord est non conique.

– Si K est un polyèdre convexe, alors tout point de K est conique.

Théorème 1.2. *Soit f convexe sur C. Alors $\widetilde{f}$ est continue en tout point conique de K au voisinage duquel elle est majorée. Réciproquement, si A n'est pas un point conique, alors il existe f convexe majorée sur C, telle que $\widetilde{f}$ n'est pas continue en A.*

Preuve. On se ramène, par translation, au cas $A = 0$ et $f(0) = 0$.

Supposons 0 conique et $f \leq M$ pour $\|x\| \leq r$. Il faut montrer que $\widetilde{f}$ est s.c.s. en 0. Or par convexité de $\widetilde{f}$, on a :

$$\frac{\widetilde{f}(x)}{\|x\|} \leq \frac{f\left(\frac{r}{\|x\|}x\right)}{r}$$

pour x non nul. La semi-continuité supérieure de $\widetilde{f}$ découle alors de :

$$\widetilde{f}(x) \leq \frac{M}{r}\|x\|.$$

□

Passons à la réciproque. Elle découle immédiatement des deux lemmes suivants :

Lemme 1. *Soit X l'ensemble des points de K par lesquels passent un hyperplan tangent à C et ne contenant pas* 0. *Alors* 0 *est dans l'adhérence de X si (et seulement si)* 0 *est non conique.*

Lemme 2. *Il existe f convexe s.c.i. sur K, telle que $f \leq 1$, $f = 1$ sur X et $f(x) = 0$.*

Preuve du premier lemme : fixons une structure euclidienne sur l'espace et notons p la projection sur le convexe K. Montrons d'abord que x non conique $\Leftrightarrow \inf_{y \in K \setminus \{x\}} \ell([x, y) \cap K)) = 0$ (ℓ désigne la longueur du segment, $[AB)$ est la demi-droite). En effet, si cette borne inférieure est > 0, alors K coïncide avec un cône au voisinage de x, forcément fermé puisque K est fermé. (La réciproque est évidente). Donc, 0 étant non conique, l'ensemble W des points $y \in K \setminus \{x\}$ tels que $[0, y) \cap K = [O, y]$ contient 0 dans son adhérence. Maintenant, si $x \in W$, alors $p(2x) \in X$. En effet, soit H l'hyperplan orthogonal à $2x - p(2x)$ passant par $2x$. Alors, comme $2x \notin H$, l'intersection de H avec la droite $(0x)$ est réduite à un point. Comme H est tangent à K et sépare $2x$ de K, il contient un point de $]x, 2x]$, donc ne contient pas 0. Par conséquent, X contient 0 dans son adhérence. □

Prouvons maintenant le second lemme. Considérons la fonction

$$f = \sup\{u \text{ affine}, u \leq 0 \text{ sur } \frac{1}{2}K, u \leq 1 \text{ sur } K\}$$

Alors $f(0) = 0$, et $f = 1$ sur X. En effet soit $y \in X$. On sait déjà que $f(y) \leq 1$. Comme $y \in X$, il existe une forme linéaire l telle que $l \geq 1$ sur K, avec $l(y) = 1$. Posons $u(x) = 2l(x) - 1$. Alors $u \leq 0$ sur $\frac{1}{2}K$ et $u \leq 1$ sur K, et $u(y) = 1$, donc $f(y) \geq 1$. D'autre part, $f(0) = 0$ est trivial : $f(0) \leq 0$ d'après la définition de f, car $0 \in \frac{1}{2}K$, et $f(0) \geq 0$ car f est supérieure à la fonction affine nulle. □

Notons que si x est conique dans K, alors x est conique dans $H \cap K$, où H est un hyperplan quelconque passant par x. On en déduit par une récurrence immédiate :

Théorème 1.3. *Tout point de K est conique si et seulement si K est un polyèdre.*

On appelle ici polyèdre une partie dont l'intersection avec tout cube fermé est une intersection finie de demi-espaces fermés, i.e. on accepte qu'il y ait une infinité de faces à l'infini.

1.1. **Cas des fonctions convexes non localement bornées.**

Théorème 1.4. *Soit $A \in \partial K$. Alors il existe f convexe sur C telle que, en restriction à tout intervalle $]A, x]$, f a une limite finie en A, mais f n'est pas majorée au voisinage de K. En particulier, f ne se prolonge pas par continuité en A.*

Preuve. On peut supposer, pour alléger, que $A = 0$, et on se fixe une structure euclidienne sur E. Puisqu'il existe un hyperplan tangent en O, l'ensemble Z des vecteurs u de norme 1 telles que $\langle u, C\rangle \geq 0$ est non vide ; on vérifie facilement qu'il est fermé, donc compact. Sa frontière dans la sphère unité est non vide, car C est non vide. Soit donc u dans cette frontière. Du fait que u est sur la frontière de Z, il une suite x_n de C telle que $x_n \to 0$ et $\theta_n = \arcsin(\langle \frac{x_n}{\|x_n\|}, u\rangle) \to 0$. Il existe une fonction affine u_n négative sur le cône $F_{2\theta_n} = \{x \in E, \arcsin(\langle \frac{x}{\|x\|}, u\rangle) \geq 2\theta_n\}$ et égale à n en x_n. Posons $f_n = \sup(0, u_n)$ et $f = \sum f_n$. Alors f est convexe, finie sur C, n'est pas majorée au voisinage de C, mais, si $x \in C$, f bornée sur $]0, x]$, car elle y est somme d'un nombre fini de fonctions affines par morceaux : en effet, pour n assez grand, $]0, x]$ est contenu dans $F_{2\theta_n}$, auquel cas f_n est nul sur $]0, x]$. $\widehat{x, H}$ □