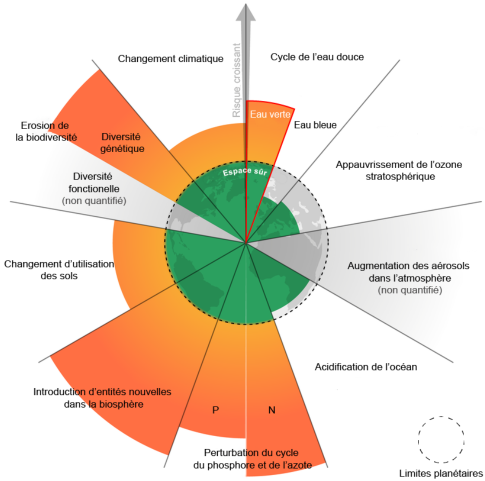
Intégrabilité de chaînes de spins quantiques, équations fonctionelles et expression explicite de charges conservées

1. Chaînes de spins intégrables
2. Codérivée pour $gl(N)$
3. Codérivée pour $so(2r)$

avec le Fonds européen de développement régional (FEDER)

Apartée hors sujet

Crise Environnementale

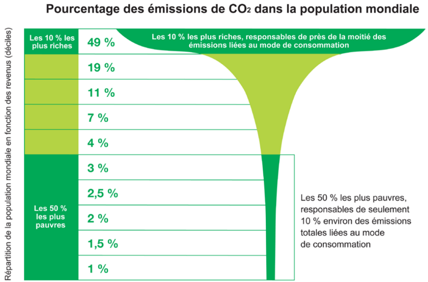


La limite planétaire concernant l'utilisation d'eau douce (eau verte) a été franchie. Elle rejoint les 5 autres déjà dépassées, dont la dernière avait été officiellement dépassée en janvier 2022.

Crédit : Wang-Erlandsson et al. (2022)
Stockholm Resilience Center

Traduction Sydney THOMAS pour @BonPote

Figure 1 : Déciles de revenus au niveau mondial et émissions dues au mode de consommation correspondantes

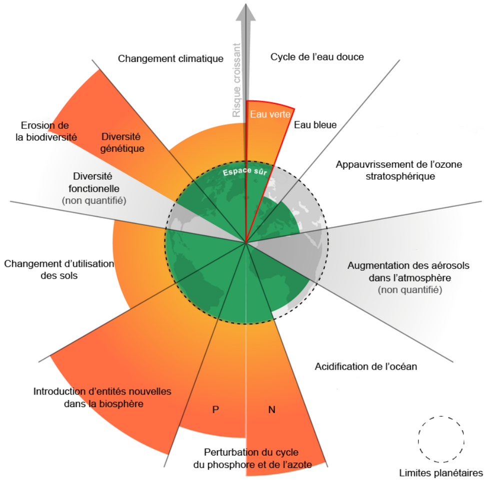


Source : Oxfam

- Rôle des scientifiques
  - Analyser, prévoir, proposer ?
  - Expliquer, alerter ?
  - Former ?
  - Devoir d'exemplarité ?
- Exemple : nos modes d'évaluation poussent-ils trop à la mobilité ?

Apartée hors sujet

Crise Environnementale

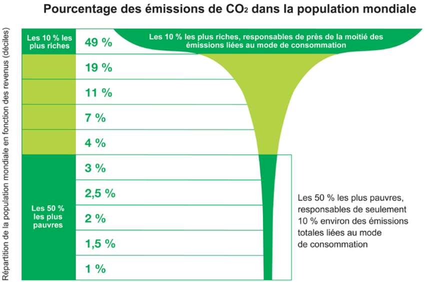


La limite planétaire concernant l'utilisation d'eau douce (eau verte) a été franchie. Elle rejoint les 5 autres déjà dépassées, dont la dernière avait été officiellement dépassée en janvier 2022.

Crédit : Wang-Erlandsson et al. (2022)
Stockholm Resilience Center

Traduction Sydney THOMAS pour @BonPote

Figure 1 : Déciles de revenus au niveau mondial et émissions dues au mode de consommation correspondantes

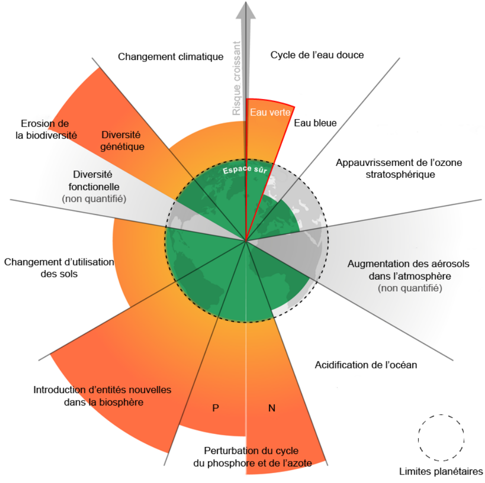


Source : Oxfam

- Rôle des scientifiques
  - Analyser, prévoir, proposer ?
  - Expliquer, alerter ?
  - Former ?
  - Devoir d'exemplarité ?
- Exemple : nos modes d'évaluation poussent-ils trop à la mobilité ?

Apartée hors sujet

Crise Environnementale

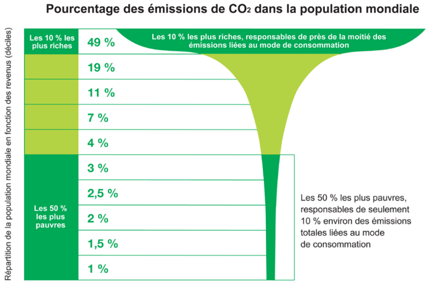


La limite planétaire concernant l'utilisation d'eau douce (eau verte) a été franchie. Elle rejoint les 5 autres déjà dépassées, dont la dernière avait été officiellement dépassée en janvier 2022.

Crédit : Wang-Erlandsson et al. (2022)
Stockholm Resilience Center

Traduction Sydney THOMAS pour @BonPote

Figure 1 : Déciles de revenus au niveau mondial et émissions dues au mode de consommation correspondantes

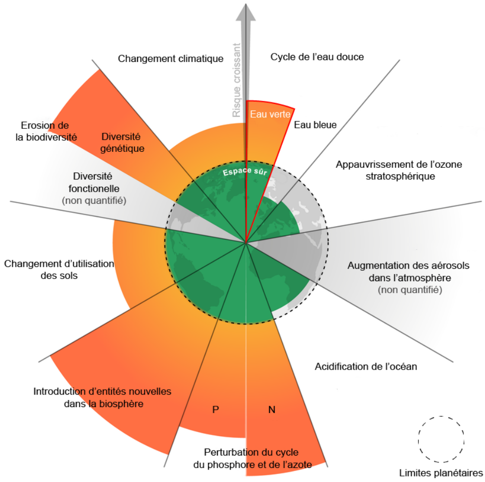


Source : Oxfam

- Rôle des scientifiques
  - Analyser, prévoir, proposer ?
  - Expliquer, alerter ?
  - Former ?
  - Devoir d'exemplarité ?
- Exemple : nos modes d'évaluation poussent-ils trop à la mobilité ?

Apartée hors sujet

Crise Environnementale

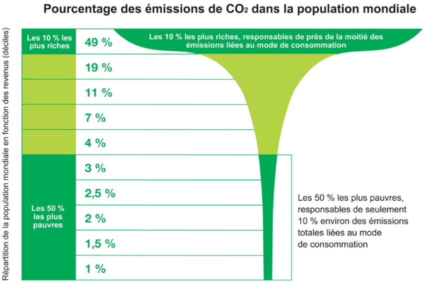


La limite planétaire concernant l'utilisation d'eau douce (eau verte) a été franchie. Elle rejoint les 5 autres déjà dépassées, dont la dernière avait été officiellement dépassée en janvier 2022.

Crédit : Wang-Erlandsson et al. (2022)
Stockholm Resilience Center

Traduction Sydney THOMAS pour @BonPote

Figure 1 : Déciles de revenus au niveau mondial et émissions dues au mode de consommation correspondantes

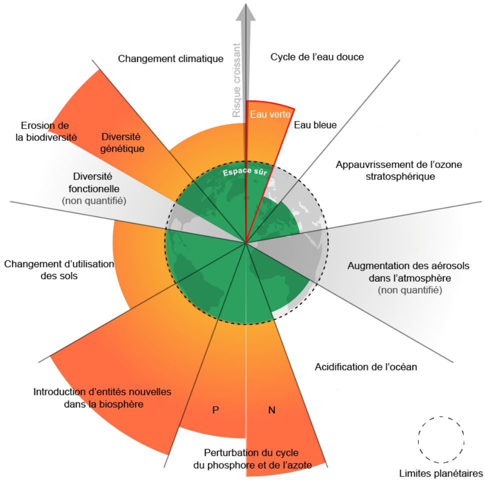


Source : Oxfam

- Rôle des scientifiques
  - Analyser, prévoir, proposer ?
  - Expliquer, alerter ?
  - Former ?
  - Devoir d'exemplarité ?
- Exemple : nos modes d'évaluation poussent-ils trop à la mobilité ?

Apartée hors sujet

Crise Environnementale



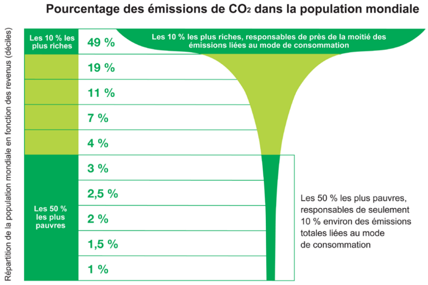
La limite planétaire concernant l'utilisation d'eau douce (eau verte) a été franchie. Elle rejoint les 5 autres déjà dépassées, dont la dernière avait été officiellement dépassée en janvier 2022.

Crédit : Wang-Erlandsson et al. (2022)
Stockholm Resilience Center

Traduction Sydney THOMAS pour @BonPote

bon pote

Figure 1 : Déciles de revenus au niveau mondial et émissions dues au mode de consommation correspondantes

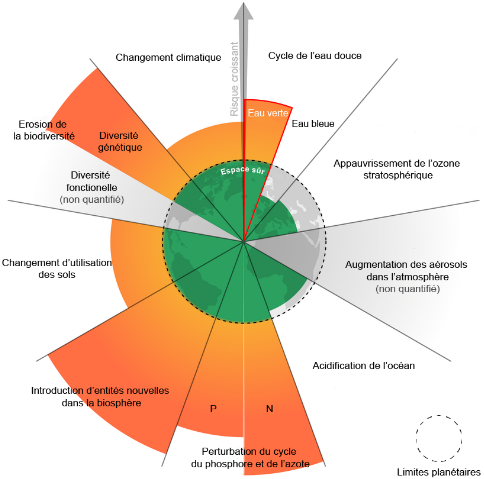


Source : Oxfam

- Rôle des scientifiques
  - Analyser, prévoir, proposer ?
  - Expliquer, alerter ?
  - Former ?
  - Devoir d'exemplarité ?
- Exemple : nos modes d'évaluation poussent-ils trop à la mobilité ?

Apartée hors sujet

Crise Environnementale

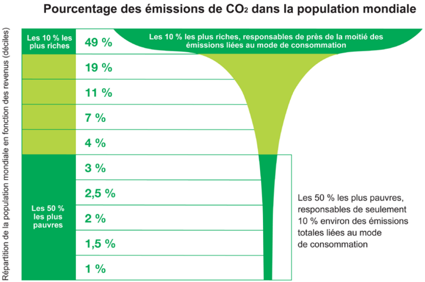


La limite planétaire concernant l'utilisation d'eau douce (eau verte) a été franchie. Elle rejoint les 5 autres déjà dépassées, dont la dernière avait été officiellement dépassée en janvier 2022.

Crédit : Wang-Erlandsson et al. (2022)
Stockholm Resilience Center

Traduction Sydney THOMAS pour @BonPote

Figure 1 : Déciles de revenus au niveau mondial et émissions dues au mode de consommation correspondantes

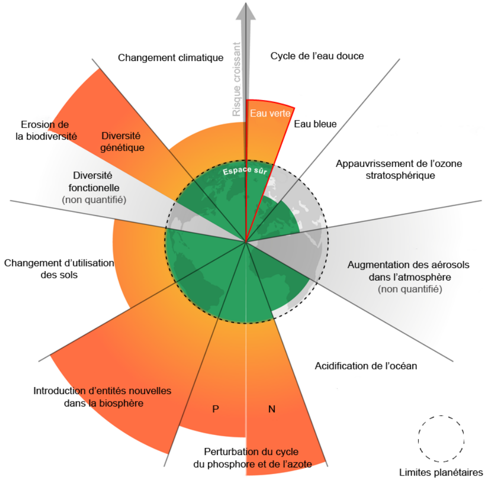


Source : Oxfam

- Rôle des scientifiques
  - Analyser, prévoir, proposer ?
  - Expliquer, alerter ?
  - Former ?
  - Devoir d'exemplarité ?
- Exemple : nos modes d'évaluation poussent-ils trop à la mobilité ?

Apartée hors sujet

Crise Environnementale

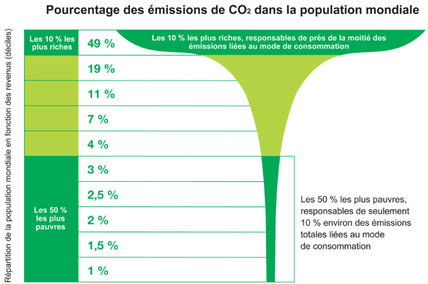


La limite planétaire concernant l'utilisation d'eau douce (eau verte) a été franchie. Elle rejoint les 5 autres déjà dépassées, dont la dernière avait été officiellement dépassée en janvier 2022.

Crédit : Wang-Erlandsson et al. (2022)
Stockholm Resilience Center

Traduction Sydney THOMAS pour @BonPote

Figure 1 : Déciles de revenus au niveau mondial et émissions dues au mode de consommation correspondantes



Source : Oxfam

- Rôle des scientifiques
  - Analyser, prévoir, proposer ?
  - Expliquer, alerter ?
  - Former ?
  - Devoir d'exemplarité ?
- Exemple : nos modes d'évaluation poussent-ils trop à la mobilité ?

Outline

1. Chaînes de spins intégrables
    - Ansatz de Bethe en coordonnées
    - Matrices de transfert
    - Équations fonctionelles
2. Codérivée pour $gl(N)$
    - Définition de la coderivée
    - Matrices de transfert
    - Équations fonctionnelles $\rightsquigarrow$ Expressions explicites
3. Codérivée pour $so(2r)$
    - Matrices R
    - Codérivée
    - Opérateurs Q

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Espace de Hilbert

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\downarrow\downarrow\rangle}_{N\ \text{fois}}, |\downarrow\cdots\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\uparrow\rangle,\right.\\ &\qquad\qquad \left.\cdots, |\uparrow\cdots\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\right)\end{aligned}$$

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}|\downarrow\uparrow\downarrow\ldots\rangle = |\uparrow\downarrow\downarrow\ldots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}|\downarrow\downarrow\uparrow\ldots\rangle = |\downarrow\downarrow\uparrow\ldots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
  en position k ⟶

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))|\{k\}\rangle.$

  états propres $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}|\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L}=1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
  en position k

  $|\psi\rangle = \sum \Psi(j,k)|\{j,k\}\rangle$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow}\downarrow\dots\rangle = |{\uparrow\downarrow}\downarrow\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow}\uparrow\dots\rangle = |{\downarrow\downarrow}\uparrow\dots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow}\cdots\downarrow\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$

  en position k

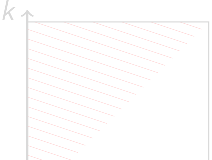
  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)\,|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H\,|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))\,|\{k\}\rangle.$

  états propres $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L}=1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$

  en position k

  en position j

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)})\,|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow\dots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow\dots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow\dots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow\dots}\rangle$

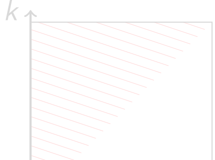
$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- “vide” : $|{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\overset{}{\uparrow}\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$
  en position k

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)\,|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H\,|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))\,|\{k\}\rangle.$

  états propres $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L}=1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$
  en position k
  en position j

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle}$



$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)})\,|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

$1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2} \, |{\downarrow\uparrow\downarrow \dots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow \dots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2} \, |{\downarrow\downarrow\uparrow \dots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow \dots}\rangle$

$H = -2 \sum_{i=1}^{L} \mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow \cdots \downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\uparrow\downarrow \cdots \downarrow}\rangle$

  en position k

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k) \, |\{k\}\rangle$

  $\Rightarrow H \, |\psi\rangle = -2 \sum_k (\Psi(k+1) + \Psi(k-1) + (L-2)\Psi(k)) \, |\{k\}\rangle.$

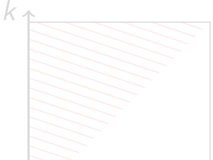
  états propres $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p} \, |\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$

- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\uparrow\downarrow \cdots \downarrow\uparrow\downarrow \cdots \downarrow}\rangle$

  en position k

  en position j

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j,k) \, |\{j,k\}\rangle}$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S \, e^{i(p_1 k + p_2 j)}) \, |\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow}\dots\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow}\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

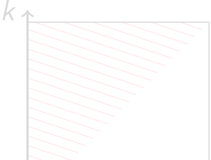
- "vide" : $|{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$
  en position k

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)\,|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H\,|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))\,|\{k\}\rangle.$

  états propres $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L}=1$

- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$
  en position k
  en position j

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)})\,|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\uparrow}{\downarrow}\dots\rangle = |{\uparrow}{\downarrow}{\downarrow}\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\dots\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\dots\rangle$

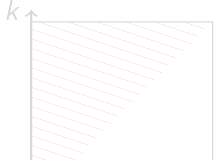
$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{en position } k}}{\uparrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)\,|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H\,|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))\,|\{k\}\rangle.$

  états propres $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{en position } j}}{\uparrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{en position } k}}{\uparrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle}$



$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)})\,|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

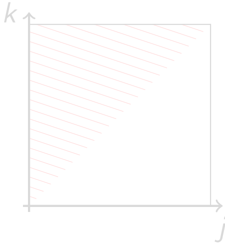
Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow}\dots\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow}\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\underset{\uparrow}{\uparrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ en position k

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\underset{\uparrow}{\uparrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\underset{\uparrow}{\uparrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ en position k en position j

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow}\dots\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow}\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$

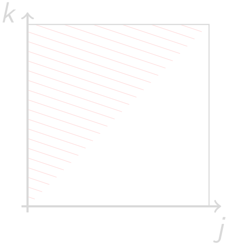
  en position k

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$

  en position k

  en position j

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow\ldots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow\ldots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$

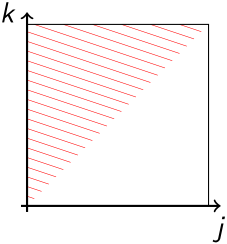
  en position k

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$

  en position k

  en position j

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

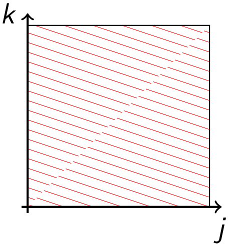
Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow}\dots\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow}\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- “vide” : $|{\downarrow\downarrow}\cdots\downarrow\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots\downarrow\rangle$ en position k

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots\downarrow\rangle$ en position k en position j

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow}\ldots\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow}\ldots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow}\ldots\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow}\ldots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$

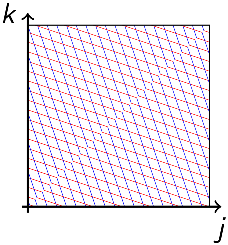
  en position k

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow\uparrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$

  en position k

  en position j

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow\ldots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow\ldots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$

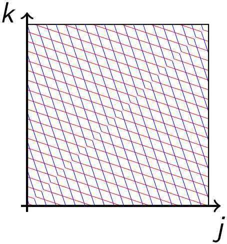
  en position k

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$

  en position k

  en position j

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k + p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

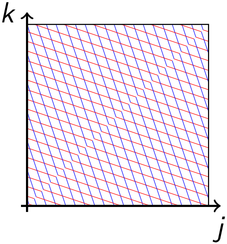
Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\uparrow}{\downarrow}\dots\rangle = |{\uparrow}{\downarrow}{\downarrow}\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\dots\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\dots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}{\uparrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ en position k

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}{\uparrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}{\uparrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ en position k en position j

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

États à n “excitations”

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i\sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\rangle$$

position j_1

position j_2

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j<k} \left(1 + e^{i(p_{\sigma(j)}+p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}}\right)$

Équations de Bethe

- $\forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p,p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$

Valeur propre : $E = -2L + 4\sum_k (1-\cos p_k)$

Completude : existence d'une base de vecteurs propres sous cette forme

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

États à n "excitations"

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i\sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\rangle$$

position j_1

position j_2

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j<k}\left(1+e^{i(p_{\sigma(j)}+p_{\sigma(k)})}-2e^{ip_{\sigma(k)}}\right)$

Équations de Bethe

- $\forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j,p_k)$ où $S(p,p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$

Valeur propre : $E = -2L + 4\sum_k(1-\cos p_k)$

Completude : existence d'une base de vecteurs propres sous cette forme

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

États à n “excitations”

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i\sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\underset{\text{position } j_1}{\uparrow}{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\underset{\text{position } j_2}{\uparrow}{\downarrow}\cdots\rangle$$

C’est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j<k} \left(1 + e^{i(p_{\sigma(j)}+p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}}\right)$

Équations de Bethe

- $\forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p,p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$

Valeur propre : $E = -2L + 4\sum_k (1-\cos p_k)$

Completude : existence d’une base de vecteurs propres sous cette forme

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

États à n "excitations"

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i\sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\rangle$$

position j_1

position j_2

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j<k} \left(1 + e^{i(p_{\sigma(j)}+p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}}\right)$

Équations de Bethe

- $\forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p,p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$

Valeur propre : $E = -2L + 4\sum_k (1-\cos p_k)$

Completude : existence d'une base de vecteurs propres sous cette forme

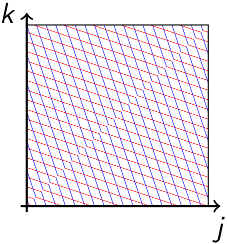
Integrabilité en 1+1 D chaînes de spins/ champs quantiques

Ansatz de Bethe de la forme $\psi(n_1, n_2, \cdots, n_M) \equiv \sum_{\sigma\in\mathcal{S}^M} \mathcal{A}_\sigma e^{i\sum_k p_{\sigma(k)} n_k}$

$\rightsquigarrow$ function d'onde des états propres de certaines théories telles que

1. L'espace est périodic de dimension 1
2. Les interactiosn sont locales.
3. Les interactions se factorisent
4. Il y a un infinité de charges conservées

- Les conditions (1,2) sont nécessaires à cet Ansatz
- Les conditions (1,2,4) sont sufisantes à cet Ansatz [Zamolodchikov Zamolodchikov 79]



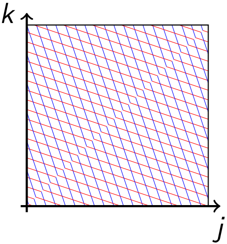
Integrabilité en 1+1 D chaînes de spins/ champs quantiques

Ansatz de Bethe de la forme $\psi(n_1, n_2, \cdots, n_M) \equiv \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^M} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} n_k}$

$\rightsquigarrow$ function d'onde des états propres de certaines théories telles que

1. L'espace est périodic de dimension 1
2. Les interactiosn sont locales.
3. Les interactions se factorisent
4. Il y a un infinité de charges conservées

- Les conditions (1,2) sont nécessaires à cet Ansatz
- Les conditions (1,2,4) sont sufisantes à cet Ansatz [Zamolodchikov Zamolodchikov 79]



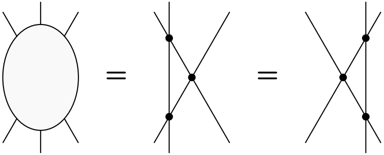
Integrabilité en 1+1 D

chaînes de spins/ champs quantiques

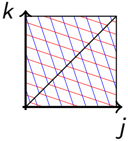
Ansatz de Bethe de la forme $\psi(n_1, n_2, \cdots, n_M) \equiv \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^M} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} n_k}$

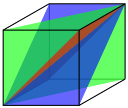
$\rightsquigarrow$ function d'onde des états propres de certaines théories telles que

1. L'espace est périodic de dimension 1
2. Les interactiosn sont locales.
3. Les interactions se factorisent :
4. Il y a un infinité de charges conservées



- Les conditions (1,2,3) sont nécessaires à cet Ansatz
- Les conditions (1,2,4) sont sufisantes à cet Ansatz [Zamolodchikov Zamolodchikov 79]





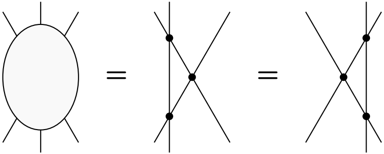
Integrabilité en 1+1 D

chaînes de spins/ champs quantiques

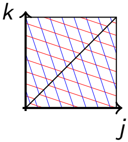
Ansatz de Bethe de la forme $\psi(n_1, n_2, \cdots, n_M) \equiv \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^M} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} n_k}$

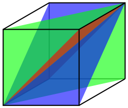
$\rightsquigarrow$ function d'onde des états propres de certaines théories telles que

1. L'espace est périodic de dimension 1
2. Les interactiosn sont locales.
3. Les interactions se factorisent
4. Il y a un infinité de charges conservées



- Les conditions (1,2,3) sont nécessaires à cet Ansatz
- Les conditions (1,2,4) sont sufisantes à cet Ansatz [Zamolodchikov Zamolodchikov 79]





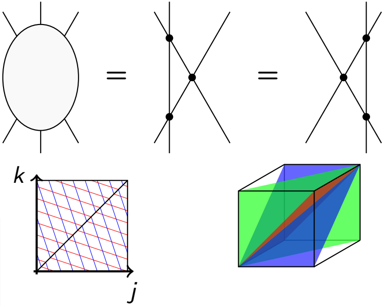
Integrabilité en 1+1 D

chaînes de spins/ champs quantiques

Ansatz de Bethe de la forme $\psi(n_1, n_2, \cdots, n_M) \equiv \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^M} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} n_k}$

$\rightsquigarrow$ function d'onde des états propres de certaines théories telles que

1. L'espace est périodic de dimension 1
2. Les interactiosn sont locales.
3. Les interactions se factorisent
4. Il y a un infinité de charges conservées



Spectre

$E = \sum_i \mathcal{E}(p_i)$ $\qquad e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k \neq j} \mathcal{S}(p_j, p_k)$

Les fonctions $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ dépendent du modèle

Ansatz de Bethe emboîté

Surprenante simplicité des équations en rang plus élevé

Chaîne de spin $XXX_{1/2}$ (GL(2))

$$\forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j, p_k) \qquad \xleftrightarrow[Q(u)=\prod_k(u-\theta_k)]{\tan\frac{p_k}{2}=-\frac{1}{2\theta_k}} \qquad \forall j, \left(\frac{\theta_j-i/2}{\theta_j+i/2}\right)^L = -\frac{Q(\theta_j-i)}{Q(\theta_j+i)}$$

$$S(p, p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$$

$$E = -2L + \sum_k (4 - 4\cos p_k) \qquad E = -2L + 2\sum_k \frac{1}{\theta_k^2+1/4}$$

Chaîne de spin $GL(N)$:

polynômes $Q_{\vec{0}}, Q_{\vec{1}}, Q_{\vec{2}}, \ldots, Q_{\vec{N}}$, où $Q_{\vec{0}} = 1$, $Q_{\vec{N}}(u) = u^L$

$$E = -2L + 2 \sum_{\theta_k : Q_{\overrightarrow{N-1}}(\theta_k)=0} \frac{1}{\theta_k^2+1/4}$$

$$\frac{Q_{\overrightarrow{i-1}}(\theta+i/2)\,Q_{\vec{i}}(\theta-i)\,Q_{\overrightarrow{i+1}}(\theta+i/2)}{Q_{\overrightarrow{i-1}}(\theta-i/2)\,Q_{\vec{i}}(\theta+i)\,Q_{\overrightarrow{i+1}}(\theta-i/2)} = -1 \qquad \text{when } Q_{\vec{i}}(\theta) = 0$$

Ansatz de Bethe emboîté

Surprenante simplicité des équations en rang plus élevé

Chaîne de spin $XXX_{1/2}$ (GL(2))

$$\forall j,\, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j,p_k)$$

$$S(p,p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$$

$$E = -2L + \sum_k (4 - 4\cos p_k)$$

$$\xleftrightarrow[Q(u)=\prod_k(u-\theta_k)]{\tan\frac{p_k}{2}=-\frac{1}{2\theta_k}}$$

$$\forall j,\, \left(\frac{\theta_j-i/2}{\theta_j+i/2}\right)^L = -\frac{Q(\theta_j-i)}{Q(\theta_j+i)}$$

$$E = -2L + 2\sum_k \frac{1}{\theta_k^2+1/4}$$

Chaîne de spin $GL(N)$:

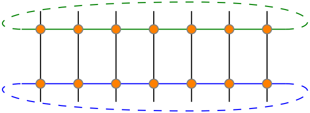
polynômes $Q_{\vec{0}}$, $Q_{\vec{1}}$, $Q_{\vec{2}}$, …, $Q_{\vec{N}}$, où $Q_{\vec{0}}=1$, $Q_{\vec{N}}(u)=u^L$

$$E = -2L + 2 \sum_{\theta_k : Q_{\overrightarrow{N-1}}(\theta_k)=0} \frac{1}{\theta_k^2+1/4}$$

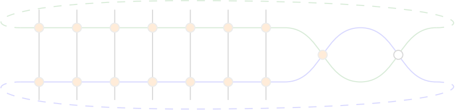
$$\frac{Q_{\overrightarrow{i-1}}(\theta+i/2)\,Q_{\vec{i}}(\theta-i)\,Q_{\overrightarrow{i+1}}(\theta+i/2)}{Q_{\overrightarrow{i-1}}(\theta-i/2)\,Q_{\vec{i}}(\theta+i)\,Q_{\overrightarrow{i+1}}(\theta-i/2)} = -1 \qquad \text{when } Q_{\vec{i}}(\theta)=0$$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

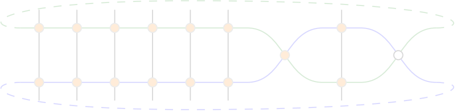
$T(v)T(u) =$



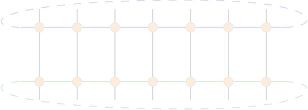
$=$



$=$



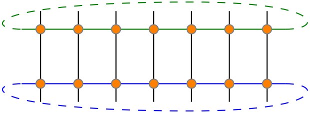
$=$



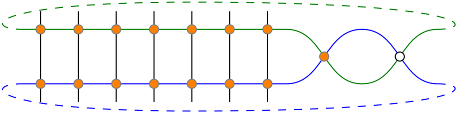
$= T(u)T(v)$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

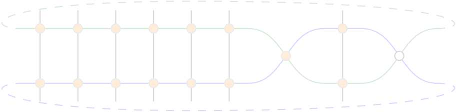
$T(v)T(u) =$



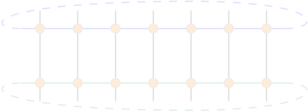
$=$



$=$

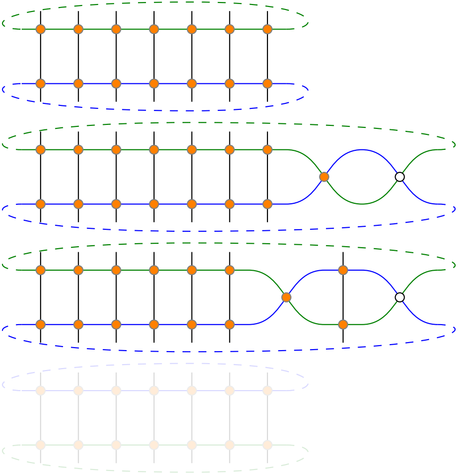


$=$



$= T(u)T(v)$

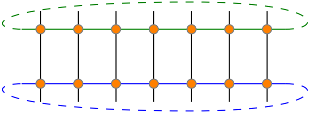
Intégrabilité et équation de Yang-Baxter



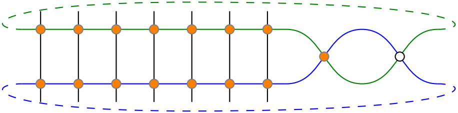
$$T(v)T(u) = \;=\;=\;= T(u)T(v)$$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

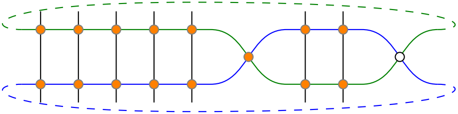
$T(v)T(u) =$



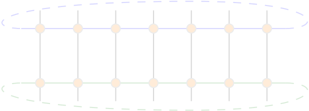
$=$



$=$



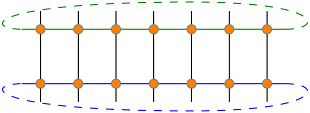
$=$



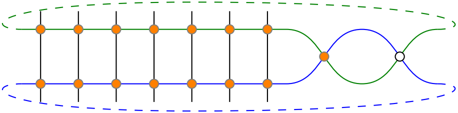
$= T(u)T(v)$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

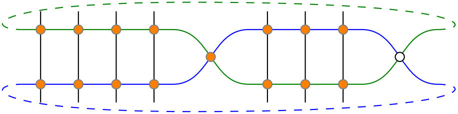
$T(v)T(u) =$



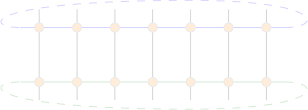
$=$



$=$



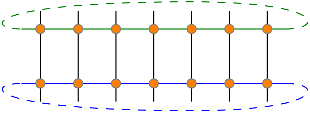
$=$



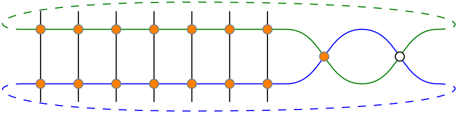
$= T(u)T(v)$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

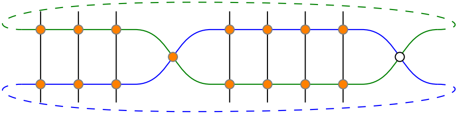
$T(v)T(u) =$



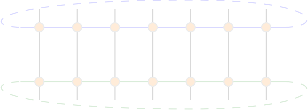
$=$



$=$



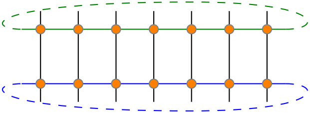
$=$



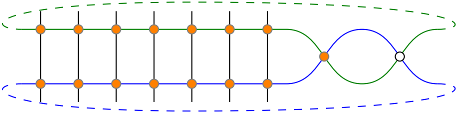
$= T(u)T(v)$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

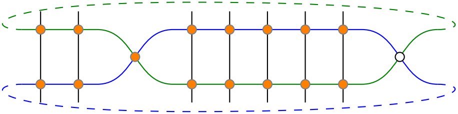
$T(v)T(u) =$



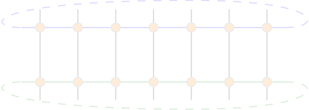
$=$



$=$



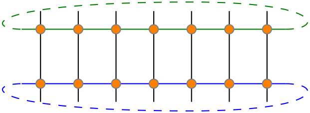
$=$



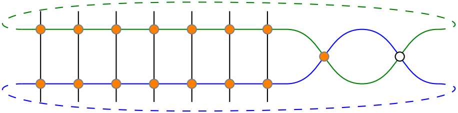
$= T(u)T(v)$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

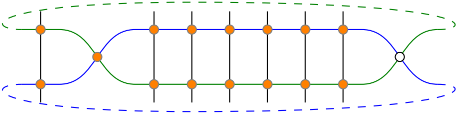
$T(v)T(u) =$



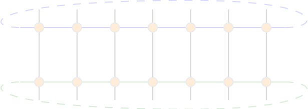
$=$



$=$



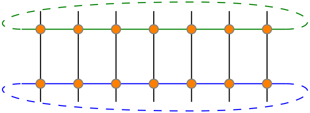
$=$



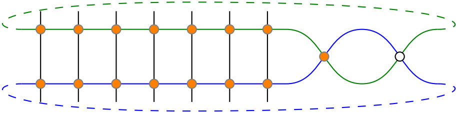
$= T(u)T(v)$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

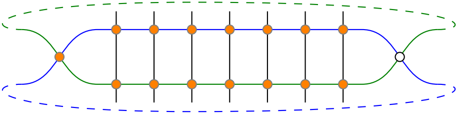
$T(v)T(u) =$



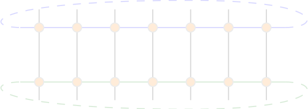
$=$



$=$



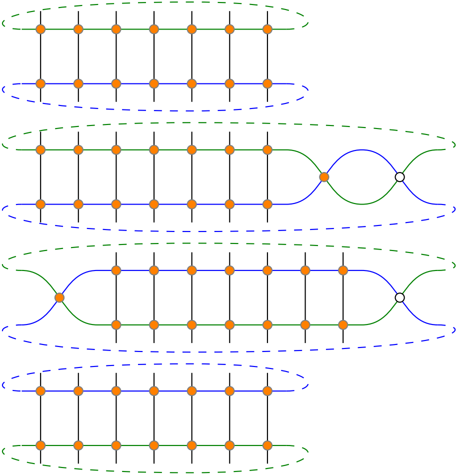
$=$



$= T(u)T(v)$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

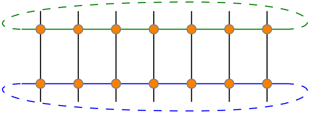
$T(v)T(u) =$



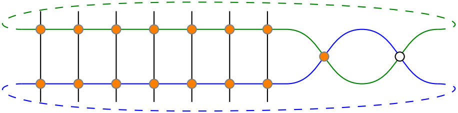
$= T(u)T(v)$

Intégrabilité et équation de Yang-Baxter

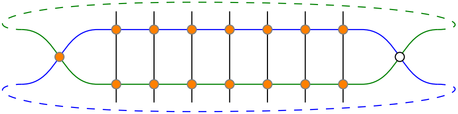
$T(v)T(u) =$



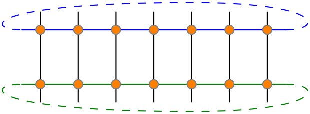
$=$



$=$



$=$



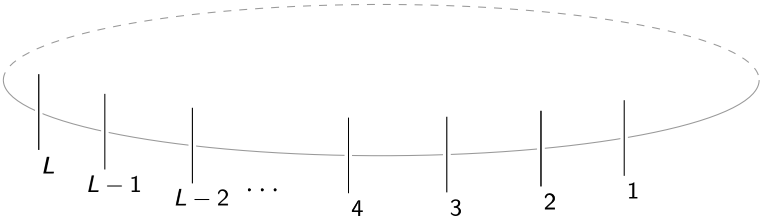
$= T(u)T(v)$

Opérateurs T de la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -2 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} \log T(u)\right|_{u=0}$$

$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateur sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\;M\;(|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p\otimes\mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

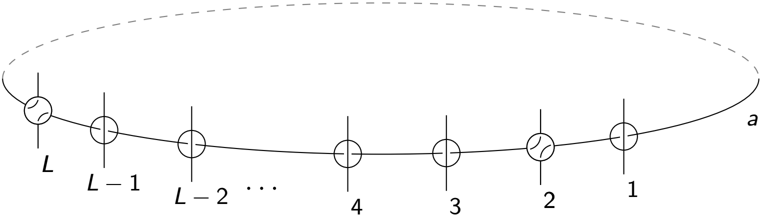
- $((u-v)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j})(u\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})(v\mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k})$
  $= (v\mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k})(u\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})((u-v)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j})$

Opérateurs T de la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T(u)\Big|_{u=0}$$

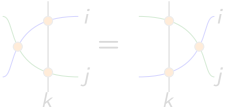
$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\ M\ (|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

- $((u-v)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j})(u\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})(v\mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k})$
  $= (v\mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k})(u\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})((u-v)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j})$

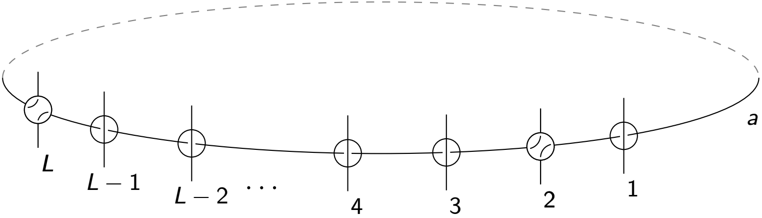


Opérateurs T de la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T(u)\Big|_{u=0}$$

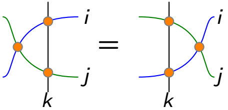
$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\ M\ (|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p\otimes\mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x,y\in\mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

- $((u-v)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,j})(u\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,k})(v\mathbb{I}+\mathcal{P}_{j,k})$
  $= (v\mathbb{I}+\mathcal{P}_{j,k})(u\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,k})((u-v)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,j})$

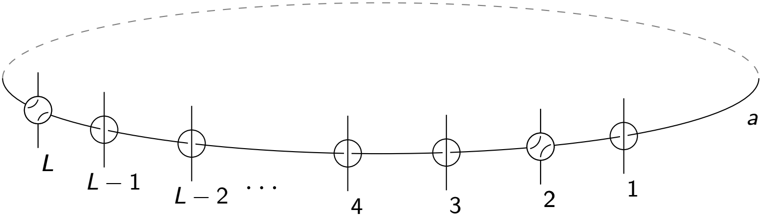


Opérateurs T de la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T(u)\Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\;M\;(|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

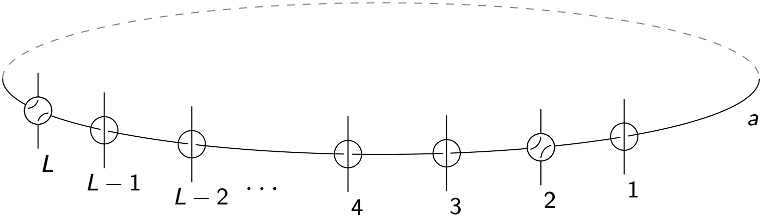
- $\left[T\ \ (u), T\ \ (v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = \; -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = \; -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} \log T(u)\Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^{N}\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\;M\;(|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p\otimes\mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x,y\in\mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

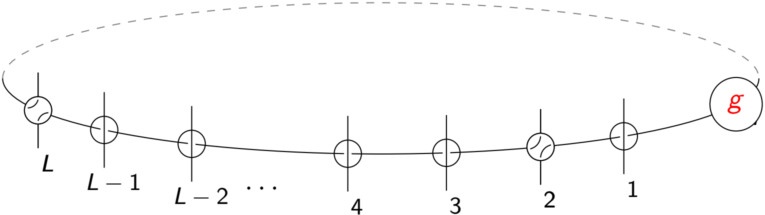
- $\left[T\;\;(u), T\;\;(v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = \text{«} -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} \text{»} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T(u)\Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\cdot g\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^N\right)^{\otimes L}$



twist $g \in GL(N)$ à valeurs propes 2 à 2 distinctes

trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\ M\ (|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

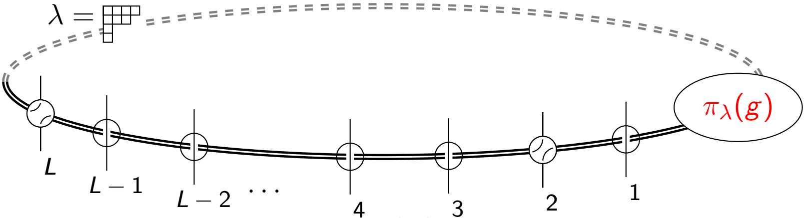
- $\left[T\ \ (u), T\ \ (v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = «-2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1}» = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T^{\square}(u)\Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\cdot\pi_\lambda(g)\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^N\right)^{\otimes L}$



twist $g \in GL(N)$ à valeurs propes 2 à 2 distinctes

Operateur de permutation généralisé : $\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e^{(i)}_{\alpha,\beta} \otimes \pi_\lambda(e^{(j)}_{\beta,\alpha})$

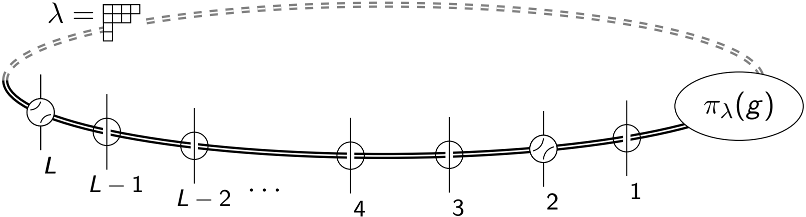
- $\left[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = \text{«} -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1}\text{»} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T^{\square}(u)\Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{1,a})\cdot\pi_\lambda(g)\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^{N|M}\right)^{\otimes L}$



twist $g \in GL(N|M)$ à valeurs propes 2 à 2 distinctes

Operateur de permutation géneralisé : $\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e^{(i)}_{\alpha,\beta} \otimes \pi_\lambda(e^{(j)}_{\beta,\alpha})$

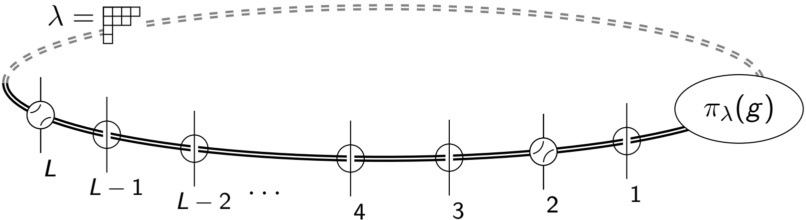
- $\left[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = « -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} » = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log T^{\square}(u)\Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \mathrm{tr}_a\left(\left(\left(u-\xi_L\right)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L,a}\right)\cdots\left(\left(u-\xi_1\right)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{1,a}\right)\cdot\pi_\lambda(g)\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^{N|M}\right)^{\otimes L}$



twist $g \in GL(N|M)$ à valeurs propes 2 à 2 distinctes

Operateur de permutation géneralisé : $\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e^{(i)}_{\alpha,\beta} \otimes \pi_\lambda(e^{(j)}_{\beta,\alpha})$

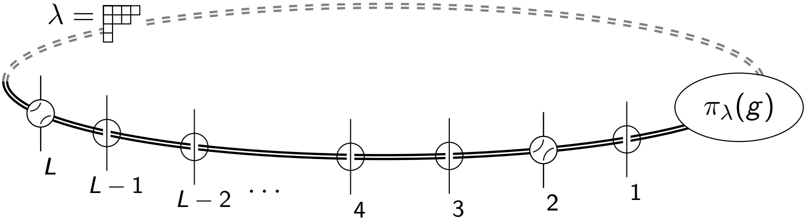
- $\left[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne $XXX_{1/2}$ de Heisenberg

$$H = «-2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1}» = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T^{\square}(u)\Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \mathrm{tr}_a\left(((u-\xi_L)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L,a})\cdots((u-\xi_1)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{1,a})\cdot\pi_\lambda(g)\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^{N|M}\right)^{\otimes L}$



twist $g \in GL(N|M)$ à valeurs propes 2 à 2 distinctes

- $\left[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)\right] = 0$
- représentation de dimension infinie $\rightsquigarrow$ Operateurs Q.
  $[Q_{12\ldots}(u), Q_{13\ldots}(v)] = 0$ $[Q_{12\ldots}(u), T^{\lambda}(v)] = 0$

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{124} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_4(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_4(u-1)/x_4 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_4(u-2)/x_4^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_4 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_4^2 \end{vmatrix}$$
  pour le twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \cdots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \cdots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 & \cdots \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanés de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe ⇔ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{i\,p}}{1-e^{i\,p}}$)
- En théorie des champs, "Courbe spectrale quantique"

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{124} = \left| \begin{array}{ccc} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_4(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_4(u-1)/x_4 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_4(u-2)/x_4^2 \end{array} \right| \Big/ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_4 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_4^2 \end{array} \right|$$
  pour le twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \left| \begin{array}{cccc} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{array} \right| \Big/ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 & \dots \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{array} \right|$$

- Une base d'états propres simultanés de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe ⇔ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{ip}}{1-e^{ip}}$)
- En théorie des champs, "Courbe spectrale quantique"

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{124} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_4(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_4(u-1)/x_4 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_4(u-2)/x_4^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_4 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_4^2 \end{vmatrix}$$
  pour le twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 & \dots \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanés de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe ⇔ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{i\,p}}{1-e^{i\,p}}$)
- En théorie des champs, "Courbe spectrale quantique"

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{124} = \left|\begin{matrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_4(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_4(u-1)/x_4 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_4(u-2)/x_4^2 \end{matrix}\right| \Bigg/ \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_4 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_4^2 \end{matrix}\right|$$
  pour le twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \left|\begin{matrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{matrix}\right| \Bigg/ \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 & \dots \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{matrix}\right|$$

- Une base d'états propres simultanés de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe ⇔ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{i\,p}}{1-e^{i\,p}}$)
- En théorie des champs, "Courbe spectrale quantique"

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{124} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_4(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_4(u-1)/x_4 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_4(u-2)/x_4^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_4 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_4^2 \end{vmatrix}$$
  pour le twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 & \dots \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanés de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftrightarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{i\,p}}{1-e^{i\,p}}$)
- En théorie des champs, "Courbe spectrale quantique"

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{124} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_4(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_4(u-1)/x_4 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_4(u-2)/x_4^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_4 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_4^2 \end{vmatrix}$$
  pour le twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 & \dots \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanés de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe ⇔ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{i\,p}}{1-e^{i\,p}}$)
- En théorie des champs, "Courbe spectrale quantique"

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{124} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_4(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_4(u-1)/x_4 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_4(u-2)/x_4^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_4 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_4^2 \end{vmatrix}$$

  pour le twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 & \dots \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanés de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{i\,p}}{1-e^{i\,p}}$)
- En théorie des champs, "Courbe spectrale quantique"

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{124} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_4(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_4(u-1)/x_4 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_4(u-2)/x_4^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_4 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_4^2 \end{vmatrix}$$

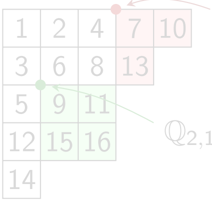
  pour le twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \ldots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \ldots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 & \ldots \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanés de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{i\,p}}{1-e^{i\,p}}$)
- En théorie des champs, "Courbe spectrale quantique"

Comptage des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que
  $$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$
- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

⇝ comptage des solutions



1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto \xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto \xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto \xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto \xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto \xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto \xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto \xi_{16}})$$

⇝ complétude

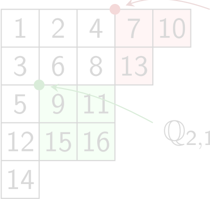
Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que

$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$

- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

⇝ comptage des solutions



1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto \xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto \xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto \xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto \xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto \xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto \xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto \xi_{16}})$$

⇝ complétude

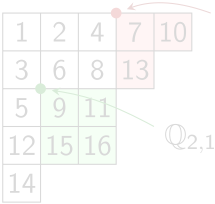
Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que

$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$

- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

⇝ comptage des solutions



1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto\xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto\xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto\xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto\xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto\xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto\xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto\xi_{16}})$$

⇝ complétude

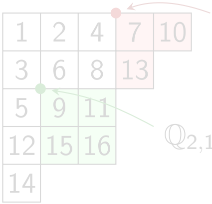
Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que

$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$

- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

⇝ comptage des solutions



$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto\xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto\xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto\xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto\xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto\xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto\xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto\xi_{16}})$$

⇝ complétude

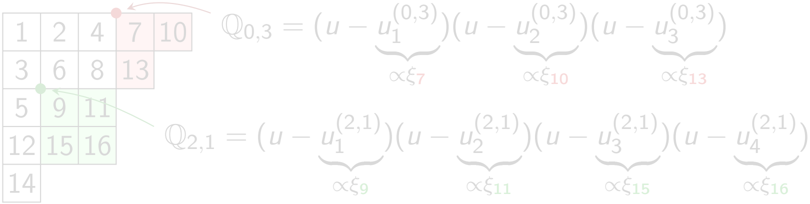
Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que

$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$

- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

⇝ comptage des solutions



1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto\xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto\xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto\xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto\xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto\xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto\xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto\xi_{16}})$$

⇝ complétude

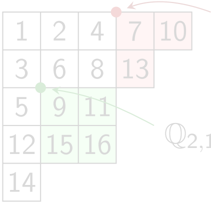
Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que

$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$

- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

⇝ comptage des solutions



1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto\xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto\xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto\xi_{13}})$$

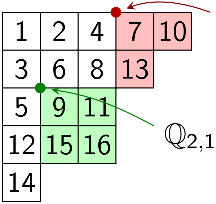
$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto\xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto\xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto\xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto\xi_{16}})$$

⇝ complétude

Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que
  $$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$
- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

⇝ comptage des solutions



1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto \xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto \xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto \xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto \xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto \xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto \xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto \xi_{16}})$$

⇝ complétude

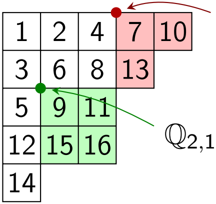
Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que

$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$

- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

$\rightsquigarrow$ comptage des solutions



1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto\xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto\xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto\xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto\xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto\xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto\xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto\xi_{16}})$$

$\rightsquigarrow$ complétude

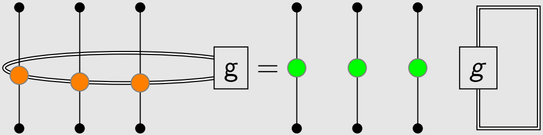
Outline

1. Chaînes de spins intégrables
    - Ansatz de Bethe en coordonnées
    - Matrices de transfert
    - Équations fonctionelles
2. Codérivée pour $gl(N)$
    - Définition de la coderivée
    - Matrices de transfert
    - Équations fonctionnelles $\rightsquigarrow$ Expressions explicites
3. Codérivée pour $so(2r)$
    - Matrices R
    - Codérivée
    - Opérateurs Q

Codérivée

Avant-goût

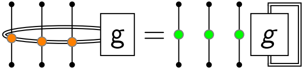
$T^\lambda(u) =$



dessin pour une chaîne de spins de longueur $L = 3$,
operateurs sur $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^N)^{\otimes 3}$

Codérivée

$$\text{Soient } \boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N),\quad \underset{L}{\underleftrightarrow{\boxed{f(g)}}} \in \mathcal{L}\left((\mathbb{C}^N)^{\otimes L}\right)$$



derivée de f par rapport à $\log(g)$:

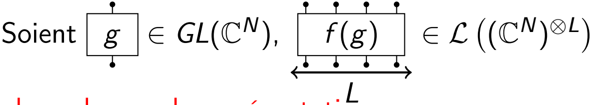
$$\underset{L+1}{\underleftrightarrow{\boxed{\hat{D}\otimes f(g)}}} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\,\boxed{f(e^\phi g)}\Big|_{\phi\to 0}$$

- $\left(\hat{D}\otimes g\right)^{\beta_1,\beta_0}_{\alpha_1,\alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}} \left(e^\phi g\right)^{\beta_0}{}_{\alpha_0}\Big|_{\phi\to 0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}} \phi^{\beta_0}{}_k g^k{}_{\alpha_0} = \delta^{\beta_0}{}_{\alpha_1} g^{\beta_1}{}_{\alpha_0}$

$\rightsquigarrow \hat{D}\otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$

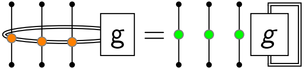
- $\hat{D}\otimes\hat{D}\otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\mathcal{P}_{2,0}\left(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes g\right)$

Codérivée

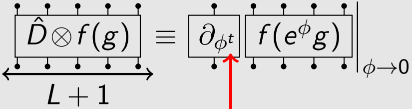


$$\text{Soient } \boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N), \quad \underbrace{\boxed{f(g)}}_{L} \in \mathcal{L}\left((\mathbb{C}^N)^{\otimes L}\right)$$

bien défini quand on change de représentation



derivée de f par rapport à $\log(g)$:



$$\underbrace{\boxed{\hat{D} \otimes f(g)}}_{L+1} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\boxed{f(e^{\phi} g)}\Big|_{\phi \to 0}$$

la dérivée échange les indices co/contra-variants :

$$\partial_i = \partial_{x^i},\ \partial^i = \partial_{x_i}$$

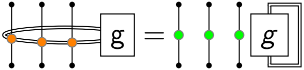
$$\ldots^{k}_{\alpha_0} = \delta^{\beta_0}_{\alpha_1} g^{\beta_1}_{\alpha_0}$$

$\rightsquigarrow \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$

- $\hat{D} \otimes \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\mathcal{P}_{2,0}\left(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes g\right)$

Codérivée

Soient $\boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N)$, $\boxed{f(g)} \in \mathcal{L}\left((\mathbb{C}^N)^{\otimes L}\right)$



derivée de f par rapport à $\log(g)$:

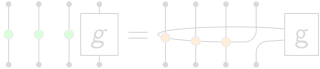
$$\boxed{\hat{D}\otimes f(g)} = \boxed{\partial_{\phi^t}}\boxed{f(e^{\phi}g)}\Big|_{\phi\to 0}$$

- $\left(\hat{D}\otimes g\right)^{\beta_1,\beta_0}_{\alpha_1,\alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}}\left(e^{\phi}g\right)^{\beta_0}{}_{\alpha_0}\Big|_{\phi\to 0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}}\phi^{\beta_0}{}_{k}g^{k}{}_{\alpha_0} = \delta^{\beta_0}_{\alpha_1}g^{\beta_1}{}_{\alpha_0}$

⇝ $\hat{D}\otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$

- $\hat{D}\otimes\hat{D}\otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\mathcal{P}_{2,0}\left(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes g\right)$

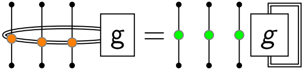
⇝



où ● $= u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}$ et ● $= u\,\mathbb{I} + \hat{D}$

Codérivée

Soient $\boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N)$, $\boxed{f(g)} \in \mathcal{L}\left((\mathbb{C}^N)^{\otimes L}\right)$

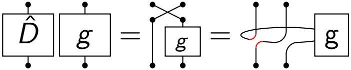


derivée de f par rapport à $\log(g)$:

$$\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} = \boxed{\partial_{\phi^t}}\boxed{f(e^{\phi} g)}\Big|_{\phi \to 0}$$

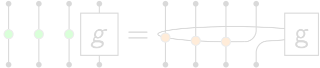
- $$\left(\hat{D} \otimes g\right)^{\beta_1,\beta_0}_{\alpha_1,\alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}} \left(e^{\phi} g\right)^{\beta_0}{}_{\alpha_0}\Big|_{\phi \to 0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}} \phi^{\beta_0}{}_{k} g^{k}{}_{\alpha_0} = \delta^{\beta_0}{}_{\alpha_1} g^{\beta_1}{}_{\alpha_0}$$

⇝ $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$



- $\hat{D} \otimes \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\mathcal{P}_{2,0}\left(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes g\right)$

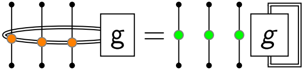
⇝



où 🟠 $= u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}$ et 🟢 $= u\,\mathbb{I} + \hat{D}$

Codérivée

Soient $\boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N)$, $\boxed{f(g)} \in \mathcal{L}\left((\mathbb{C}^N)^{\otimes L}\right)$

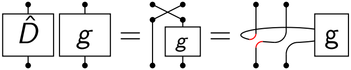


derivée de f par rapport à $\log(g)$:

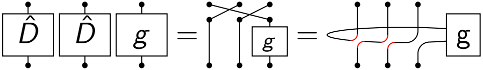
$$\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} = \boxed{\partial_{\phi^t}}\,\boxed{f(e^{\phi} g)}\Big|_{\phi \to 0}$$

- $\left(\hat{D} \otimes g\right)^{\beta_1,\beta_0}_{\alpha_1,\alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}} \left(e^{\phi} g\right)^{\beta_0}{}_{\alpha_0}\Big|_{\phi \to 0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}} \phi^{\beta_0}{}_{k} g^{k}{}_{\alpha_0} = \delta^{\beta_0}_{\alpha_1} g^{\beta_1}{}_{\alpha_0}$

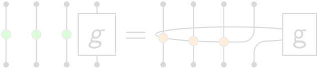
⇝ $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$



- $\hat{D} \otimes \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\mathcal{P}_{2,0}\left(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes g\right)$



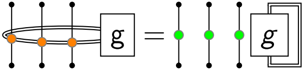
⇝



où ● $= u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}$ et ● $= u\,\mathbb{I} + \hat{D}$

Codérivée

Soient $\boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N)$, $\boxed{f(g)} \in \mathcal{L}\left((\mathbb{C}^N)^{\otimes L}\right)$

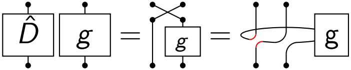


derivée de f par rapport à $\log(g)$:

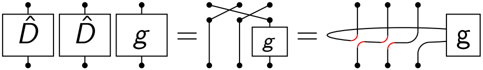
$$\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} = \boxed{\partial_{\phi^t}}\,\boxed{f(e^{\phi} g)}\Big|_{\phi\to 0}$$

- $\left(\hat{D} \otimes g\right)^{\beta_1,\beta_0}_{\alpha_1,\alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}} \left(e^{\phi} g\right)^{\beta_0}{}_{\alpha_0}\Big|_{\phi\to 0} = \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha_1}{}_{\beta_1}} \phi^{\beta_0}{}_{k} g^{k}{}_{\alpha_0} = \delta^{\beta_0}{}_{\alpha_1} g^{\beta_1}{}_{\alpha_0}$

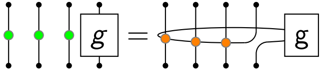
⇝ $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$



- $\hat{D} \otimes \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0}\mathcal{P}_{2,0}\left(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes g\right)$



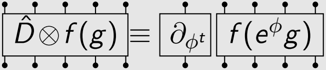
⇝

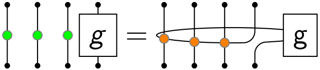


où 🟠 $= u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}$ et 🟢 $= u\,\mathbb{I} + \hat{D}$

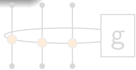
Codérivée et matrices de transfert

dérivée par rapport à $\log(g)$:





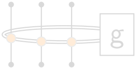
où 🟠 $= u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}$, 🟢 $= u\,\mathbb{I} + \hat{D}$

Matrices de transfert $T(u) =$  $=$  $= (u + \hat{D})^{\otimes L} \operatorname{Tr} g$

$$[T(u), T(v)] = 0$$

$$H = -2\partial_u \log T(u)\big|_{u=0,g=1}$$

Représentation arbitraire (dans l'espace auxiliaire) :

$T^{\lambda}(u) =$  $=$  $= (u + i\hat{D})^{\otimes L} \chi_{\lambda}(g)$

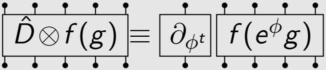
$$[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)] = 0$$

$$H = -2\partial_u \log T^{\square}(u)\big|_{u=0,g=1}$$

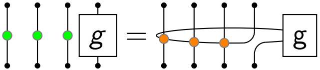
⇝
- Preuve combinatoire des relations fonctionnelles
- Expression des operateurs Q

Codérivée et matrices de transfert

dérivée par rapport à $\log(g)$:

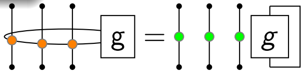


$$\hat{D}\otimes f(g) = \partial_{\phi^t}\, f(e^{\phi} g)$$



où 🟠 $= u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}$, 🟢 $= u\,\mathbb{I} + \hat{D}$

Matrices de transfert $T(u) =$



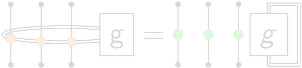
$= (u+\hat{D})^{\otimes L}\,\mathrm{Tr}\, g$

$[T(u), T(v)] = 0$

$H = -2\partial_u \log T(u)\big|_{u=0,g=1}$

Représentation arbitraire (dans l'espace auxiliaire) :

$T^{\lambda}(u) =$



$= (u + i\hat{D})^{\otimes L}\chi_{\lambda}(g)$

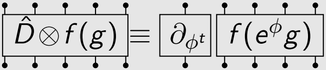
$[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)] = 0$

$H = -2\partial_u \log T^{\square}(u)\big|_{u=0,g=1}$

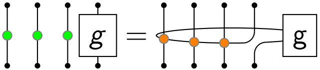
⇝
- Preuve combinatoire des relations fonctionnelles
- Expression des operateurs Q

Codérivée et matrices de transfert

dérivée par rapport à $\log(g)$:

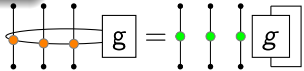


$$\hat{D} \otimes f(g) = \partial_{\phi^t}\, f(e^{\phi} g)$$



où 🟠 $= u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}$, 🟢 $= u\,\mathbb{I} + \hat{D}$

Matrices de transfert $T(u) =$



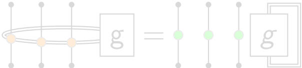
$= (u + \hat{D})^{\otimes L}\, \mathrm{Tr}\, g$

$$[T(u), T(v)] = 0$$

$$H = -2\partial_u \log T(u)\big|_{u=0,g=1}$$

Représentation arbitraire (dans l'espace auxiliaire) :

$T^{\lambda}(u) =$



$= (u + i\hat{D})^{\otimes L} \chi_{\lambda}(g)$

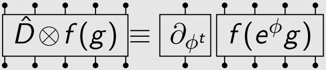
$$[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)] = 0$$

$$H = -2\partial_u \log T^{\square}(u)\big|_{u=0,g=1}$$

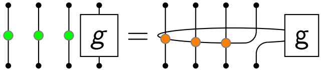
⇝
- Preuve combinatoire des relations fonctionnelles
- Expression des operateurs Q

Codérivée et matrices de transfert

dérivée par rapport à $\log(g)$:

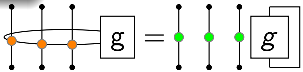


$$\hat{D} \otimes f(g) = \partial_{\phi^t} f(e^{\phi} g)$$



où ● = $\mathcal{R}$−matrix, ● = $u\,\mathbb{I} + \hat{D}$

Matrices de transfert $T(u) =$



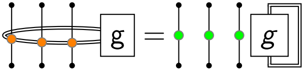
$= (u + \hat{D})^{\otimes L}\,\mathrm{Tr}\, g$

$$[T(u), T(v)] = 0$$

$$H = -\,2\partial_u \log T(u)\big|_{u=0,g=1}$$

Représentation arbitraire (dans l'espace auxiliaire) :

$T^{\lambda}(u) =$



$= (u + i\hat{D})^{\otimes L} \chi_{\lambda}(g)$

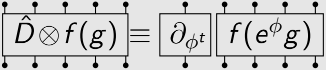
$$[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)] = 0$$

$$H = -\,2\partial_u \log T^{\square}(u)\big|_{u=0,g=1}$$

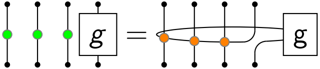
$\rightsquigarrow$
- Preuve combinatoire des relations fonctionnelles
- Expression des operateurs Q

Codérivée et matrices de transfert

dérivée par rapport à $\log(g)$:

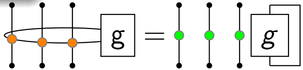


$$\hat{D}\otimes f(g) = \partial_{\phi^t}\; f(e^{\phi} g)$$



où ● $= \mathcal{R}-$matrix, ● $= u\,\mathbb{I} + \hat{D}$

Matrices de transfert $T(u) =$



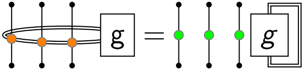
$= (u+\hat{D})^{\otimes L}\,\mathrm{Tr}\, g$

$$[T(u), T(v)] = 0$$

$$H = -\,2\partial_u \log T(u)\big|_{u=0,g=1}$$

Représentation arbitraire (dans l'espace auxiliaire) :

$T^{\lambda}(u) =$



$= (u + i\hat{D})^{\otimes L}\chi_{\lambda}(g)$

$$[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)] = 0$$

$$H = -\,2\partial_u \log T^{\square}(u)\big|_{u=0,g=1}$$

⇝
- Preuve combinatoire des relations fonctionnelles
- Expression des operateurs Q

Expression des opérateurs Q et des mineurs de T

- $$T^{\ydiagram{2,1}}(u) \propto \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}_{N\times N}$$

- Mineur ("Nested" T operator)

$$\underbrace{T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{1,3,7\dots\}}}_{\text{k indices}}(u) \propto \begin{vmatrix} Q_1(u+\mu_1)x_1^{\mu_1} & Q_3(u+\mu_1)x_3^{\mu_1} & Q_7(u+\mu_1)x_7^{\mu_1} & \dots \\ Q_1(u+\mu_2-1)x_1^{\mu_2-1} & Q_3(u+\mu_2-1)x_3^{\mu_2-1} & Q_7(u+\mu_2-1)x_7^{\mu_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\mu_3-2)x_1^{\mu_3-2} & Q_3(u+\mu_3-2)x_3^{\mu_3-2} & Q_7(u+\mu_3-2)x_7^{\mu_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}_{k\times k}$$

- $$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u) \propto \mathcal{N} \lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1} \\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \left(u+N-k+\hat{D}\right)^{\otimes L} \left(\chi_\mu\left(\tilde{g}\right) \prod_{n\in\{j_1,\dots,j_{N-k}\}} w(z_n)\right)$$

où $\{j_1,\dots,j_{N-k}\} = \{1,\dots,N\} \setminus \{i_1,\dots,i_k\}$, $w(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \chi_{(s,0,\dots)}(g) z^s$,

et $\tilde{g} = \mathrm{Diag}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$.

Expression des opérateurs Q et des mineurs de T

- $$T^{\lambda}(u) \propto \begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1)x_1^{\lambda_1} & Q_2(u+\lambda_1)x_2^{\lambda_1} & Q_3(u+\lambda_1)x_3^{\lambda_1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_2-1)x_1^{\lambda_2-1} & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_3-2)x_1^{\lambda_3-2} & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}_{N\times N}$$
- Mineur (“Nested” T operator)

$$T^{(\mu_1,\ldots,\mu_k)}_{\underbrace{\{1,3,7\ldots\}}_{\text{k indices}}}(u) \propto \begin{vmatrix} Q_1(u+\mu_1)x_1^{\mu_1} & Q_3(u+\mu_1)x_3^{\mu_1} & Q_7(u+\mu_1)x_7^{\mu_1} & \dots \\ Q_1(u+\mu_2-1)x_1^{\mu_2-1} & Q_3(u+\mu_2-1)x_3^{\mu_2-1} & Q_7(u+\mu_2-1)x_7^{\mu_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\mu_3-2)x_1^{\mu_3-2} & Q_3(u+\mu_3-2)x_3^{\mu_3-2} & Q_7(u+\mu_3-2)x_7^{\mu_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}_{k\times k}$$

- $$T^{(\mu_1,\ldots,\mu_k)}_{\{i_1,\ldots,i_k\}}(u) \propto \mathcal{N} \lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1} \\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \left(u+N-k+\hat{D}\right)^{\otimes L} \left(\chi_\mu\left(\tilde{g}\right) \prod_{n\in\{j_1,\ldots,j_{N-k}\}} w(z_n)\right)$$

où $\{j_1,\ldots,j_{N-k}\} = \{1,\ldots,N\} \setminus \{i_1,\ldots,i_k\}$, $w(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \chi_{(s,0,\ldots)}(g) z^s$,

et $\tilde{g} = \mathrm{Diag}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$.

Expression des opérateurs Q et des mineurs de T

- $$T^{\lambda}(u) \propto \begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1)x_1^{\lambda_1} & Q_2(u+\lambda_1)x_2^{\lambda_1} & Q_3(u+\lambda_1)x_3^{\lambda_1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_2-1)x_1^{\lambda_2-1} & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_3-2)x_1^{\lambda_3-2} & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}_{N\times N}$$
- Mineur (“Nested” T operator)

$$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\underbrace{\{1,3,7\dots\}}_{\text{k indices}}}(u) \propto \begin{vmatrix} Q_1(u+\mu_1)x_1^{\mu_1} & Q_3(u+\mu_1)x_3^{\mu_1} & Q_7(u+\mu_1)x_7^{\mu_1} & \dots \\ Q_1(u+\mu_2-1)x_1^{\mu_2-1} & Q_3(u+\mu_2-1)x_3^{\mu_2-1} & Q_7(u+\mu_2-1)x_7^{\mu_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\mu_3-2)x_1^{\mu_3-2} & Q_3(u+\mu_3-2)x_3^{\mu_3-2} & Q_7(u+\mu_3-2)x_7^{\mu_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}_{k\times k}$$

- $$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u) \propto \mathcal{N} \lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \left(u+N-k+\hat{D}\right)^{\otimes L} \left(\chi_\mu(\tilde{g}) \prod_{n\in\{j_1,\dots,j_{N-k}\}} w(z_n)\right)$$

où $\{j_1,\dots,j_{N-k}\} = \{1,\dots,N\} \setminus \{i_1,\dots,i_k\}$, $w(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \chi_{(s,0,\dots)}(g) z^s$,

et $\tilde{g} = \mathrm{Diag}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$.

Expression des opérateurs Q et des mineurs de T

- $$T^\lambda(u) \propto \begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1)x_1^{\lambda_1} & Q_2(u+\lambda_1)x_2^{\lambda_1} & Q_3(u+\lambda_1)x_3^{\lambda_1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_2-1)x_1^{\lambda_2-1} & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_3-2)x_1^{\lambda_3-2} & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}_{N\times N}$$
- Mineur ("Nested" T operator)

$$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\underbrace{\{1,3,7\dots\}}_{\text{k indices}}}(u) \propto \begin{vmatrix} Q_1(u+\mu_1)x_1^{\mu_1} & Q_3(u+\mu_1)x_3^{\mu_1} & Q_7(u+\mu_1)x_7^{\mu_1} & \dots \\ Q_1(u+\mu_2-1)x_1^{\mu_2-1} & Q_3(u+\mu_2-1)x_3^{\mu_2-1} & Q_7(u+\mu_2-1)x_7^{\mu_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\mu_3-2)x_1^{\mu_3-2} & Q_3(u+\mu_3-2)x_3^{\mu_3-2} & Q_7(u+\mu_3-2)x_7^{\mu_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}_{k\times k}$$

- $$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u) \propto \mathcal{N} \lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \left(u+N-k+\hat{D}\right)^{\otimes L} \left(\chi_\mu\left(\tilde{g}\right) \prod_{n\in\{j_1,\dots,j_{N-k}\}} w(z_n)\right)$$

où $\{j_1,\dots,j_{N-k}\} = \{1,\dots,N\} \setminus \{i_1,\dots,i_k\}$, $w(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \chi_{(s,0,\dots)}(g)z^s$,

et $\tilde{g} = \mathrm{Diag}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$.

Obtention de cette expression explicite

Definition de $\mathcal{N}\lim$

- $\mathcal{N}\lim$: « Ordre dominant »
  - avant la limite, division par une nomalisation
    - qui rend la limite finie non nulle
    - qui donne un polynôme unitaire en u
- Exemple :
  $\mathcal{N}\lim_{x\to\infty} 5^x(x^3u^4 - x^4u^3 + x^4) = \lim_{x\to\infty} \frac{5^x(x^3u^4 - x^4u^3 + x^4)}{-5^x x^4} = u^3 - 1$
- Remarque :

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}\lim_{z\to 1/x_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(x_1^n(n\,u+2) + x_2^n(u^2+3n)\right)\\ &\qquad= \mathcal{N}\lim_{z\to 1/x_1} \tfrac{uzx_1}{(1-zx_1)^2} + \tfrac{2}{1-zx_1} + \tfrac{u^2}{1-zx_2} + 3\tfrac{zx_2}{(1-zx_2)^2} = u\\ &\qquad= \mathcal{N}\lim_{n\to\infty}(n\,u+2)\end{aligned}$$

- Lemme : Si $f(n,u) = \sum_i x_i^n P_i(n,u)$

$$\text{Alors } \mathcal{N}\lim_{z\to\frac{1}{x_\ell}} \sum_{n\geq 0} f(n,u)\,z^n = \mathcal{N}\lim_{n\to\infty} P_\ell(n,u)$$

Obtention de cette expression explicite

Definition de $\mathcal{N}$lim

- $\mathcal{N}$lim : « Ordre dominant »
  - avant la limite, division par une nomalisation
    - qui rend la limite finie non nulle
    - qui donne un polynôme unitaire en u
- Exemple :
  $$\mathcal{N}\lim_{x\to\infty} 5^x(x^3u^4-x^4u^3+x^4)=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x(x^3u^4-x^4u^3+x^4)}{-5^x x^4}=u^3-1$$
- Remarque :
  $$\begin{aligned}\underset{z\to 1/x_1}{\mathcal{N}\lim}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(x_1^n(n\,u+2)+x_2^n(u^2+3n)\right)\\ =\underset{z\to 1/x_1}{\mathcal{N}\lim}\frac{uzx_1}{(1-zx_1)^2}+\frac{2}{1-zx_1}+\frac{u^2}{1-zx_2}+3\frac{zx_2}{(1-zx_2)^2}=u\\ =\underset{n\to\infty}{\mathcal{N}\lim}(n\,u+2)\end{aligned}$$
- Lemme : Si $f(n,u)=\sum_i x_i^n P_i(n,u)$
  Alors $\underset{z\to\frac{1}{x_\ell}}{\mathcal{N}\lim}\sum_{n\geq 0} f(n,u)\,z^n=\underset{n\to\infty}{\mathcal{N}\lim}P_\ell(n,u)$

Obtention de cette expression explicite

Definition de $\mathcal{N}\lim$

- $\mathcal{N}\lim$: « Ordre dominant »
    - avant la limite, division par une nomalisation
        - qui rend la limite finie non nulle
        - qui donne un polynôme unitaire en u
- Exemple :
$$\mathcal{N}\lim_{x\to\infty} 5^x(x^3u^4 - x^4u^3 + x^4) = \lim_{x\to\infty} \frac{5^x(x^3u^4-x^4u^3+x^4)}{-5^x x^4} = u^3 - 1$$
- Remarque :
$$\begin{aligned}\mathcal{N}\lim_{z\to 1/x_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(x_1^n(n\,u+2) + x_2^n(u^2+3n)\right) \\ = \mathcal{N}\lim_{z\to 1/x_1} \frac{uzx_1}{(1-zx_1)^2} + \frac{2}{1-zx_1} + \frac{u^2}{1-zx_2} + 3\frac{zx_2}{(1-zx_2)^2} = u \\ = \mathcal{N}\lim_{n\to\infty}(n\,u+2)\end{aligned}$$
- Lemme : Si $f(n,u) = \sum_i x_i^n P_i(n,u)$
$$\text{Alors } \mathcal{N}\lim_{z\to\frac{1}{x_\ell}} \sum_{n\geq 0} f(n,u)\, z^n = \mathcal{N}\lim_{n\to\infty} P_\ell(n,u)$$

Obtention de cette expression explicite

Definition de $\mathcal{N}\lim$

- $\mathcal{N}\lim$: « Ordre dominant »
  - avant la limite, division par une nomalisation
    - qui rend la limite finie non nulle
    - qui donne un polynôme unitaire en u
- Exemple :
  $$\mathcal{N}\lim_{x\to\infty} 5^x(x^3u^4 - x^4u^3 + x^4) = \lim_{x\to\infty} \frac{5^x(x^3u^4-x^4u^3+x^4)}{-5^x x^4} = u^3 - 1$$
- Remarque :
  $$\begin{aligned}&\mathcal{N}\lim_{z\to 1/x_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(x_1^n(n\,u+2) + x_2^n(u^2+3n)\right)\\ &\quad= \mathcal{N}\lim_{z\to 1/x_1} \frac{uzx_1}{(1-zx_1)^2} + \frac{2}{1-zx_1} + \frac{u^2}{1-zx_2} + 3\frac{zx_2}{(1-zx_2)^2} = u\\ &\quad= \mathcal{N}\lim_{n\to\infty}(n\,u+2)\end{aligned}$$
- Lemme : Si $f(n,u) = \sum_i x_i^n P_i(n,u)$
  $$\text{Alors } \mathcal{N}\lim_{z\to\frac{1}{x_\ell}} \sum_{n\geq 0} f(n,u)\,z^n = \mathcal{N}\lim_{n\to\infty} P_\ell(n,u)$$

Obtention de cette expression explicite

$$\mathcal{N}\lim_{z_1\to 1/x_1}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} T^{\lambda}(u)z_1^{\lambda_1}$$

$$= \mathcal{N}\lim_{z_1\to 1/x_1}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} z_1^{\lambda_1}\begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1)x_1^{\lambda_1} & Q_2(u+\lambda_1)x_2^{\lambda_1} & Q_3(u+\lambda_1)x_3^{\lambda_1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_2-1)x_1^{\lambda_2-1} & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_3-2)x_1^{\lambda_3-2} & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= \mathcal{N}\lim_{\lambda_1\to\infty}\begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ 0 & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Après quelques itérations,

$$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u+N-k) \propto \mathcal{N}\lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} T^{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(u) z_{j_1}^{\lambda_1} z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

Obtention de cette expression explicite

Mineurs de T

$$\mathcal{N}\lim_{z_1\to 1/x_1}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} T^{\lambda}(u)z_1^{\lambda_1}$$

$$= \mathcal{N}\lim_{z_1\to 1/x_1}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} z_1^{\lambda_1}\begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1)x_1^{\lambda_1} & Q_2(u+\lambda_1)x_2^{\lambda_1} & Q_3(u+\lambda_1)x_3^{\lambda_1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_2-1)x_1^{\lambda_2-1} & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_3-2)x_1^{\lambda_3-2} & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= \mathcal{N}\lim_{\lambda_1\to\infty}\begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ 0 & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Après quelques itérations,

$$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u+N-k) \propto \mathcal{N}\lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}}\sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} T^{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(u)z_{j_1}^{\lambda_1}z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

Obtention de cette expression explicite

Mineurs de T

$$\mathcal{N}\lim_{z_1\to 1/x_1}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} T^{\lambda}(u)z_1^{\lambda_1}$$

$$= \mathcal{N}\lim_{z_1\to 1/x_1}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} z_1^{\lambda_1}\begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1)x_1^{\lambda_1} & Q_2(u+\lambda_1)x_2^{\lambda_1} & Q_3(u+\lambda_1)x_3^{\lambda_1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_2-1)x_1^{\lambda_2-1} & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_3-2)x_1^{\lambda_3-2} & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= \mathcal{N}\lim_{\lambda_1\to\infty}\begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ 0 & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Après quelques itérations,

$$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u+N-k)$$

$$\propto \mathcal{N}\lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}}\sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} T^{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(u)z_{j_1}^{\lambda_1}z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

Obtention de cette expression explicite

$$\mathcal{N}\lim_{z_1\to 1/x_1}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} T^{\lambda}(u) z_1^{\lambda_1}$$

$$= \mathcal{N}\lim_{z_1\to 1/x_1}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} z_1^{\lambda_1}\begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1)x_1^{\lambda_1} & Q_2(u+\lambda_1)x_2^{\lambda_1} & Q_3(u+\lambda_1)x_3^{\lambda_1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_2-1)x_1^{\lambda_2-1} & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ Q_1(u+\lambda_3-2)x_1^{\lambda_3-2} & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= \mathcal{N}\lim_{\lambda_1\to\infty}\begin{vmatrix} Q_1(u+\lambda_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Q_2(u+\lambda_2-1)x_2^{\lambda_2-1} & Q_3(u+\lambda_2-1)x_3^{\lambda_2-1} & \dots \\ 0 & Q_2(u+\lambda_3-2)x_2^{\lambda_3-2} & Q_3(u+\lambda_3-2)x_3^{\lambda_3-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

- Après quelques itérations,

$$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u+N-k)$$

$$\propto \mathcal{N}\lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}}\ \sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} T^{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(u) z_{j_1}^{\lambda_1} z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

Obtention de cette expression explicite

Mineurs de T

- Après quelques itérations,

$$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u+N-k) \propto \mathcal{N} \lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} T^{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(u) z_{j_1}^{\lambda_1} z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

$$\propto \mathcal{N} \lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \left(u=\hat{D}\right)^{\otimes L} \sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} \chi_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(g) z_{j_1}^{\lambda_1} z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

- Puis on conclue avec des manipulations de determinant.
- Cette approcher permet aussi de faire le lien avec une construction des opérateurs Q via une représentation de dimension infinie dans l'espace auxiliaire.

Obtention de cette expression explicite

Mineurs de T

- Après quelques itérations,

$$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u+N-k)$$

$$\propto \mathcal{N}\lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} T^{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(u) z_{j_1}^{\lambda_1} z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

$$\propto \mathcal{N}\lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \left(u=\hat{D}\right)^{\otimes L} \sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} \chi_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(g) z_{j_1}^{\lambda_1} z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

- Puis on conclue avec des manipulations de determinant.
- Cette approcher permet aussi de faire le lien avec une construction des opérateurs Q via une représentation de dimension infinie dans l'espace auxiliaire.

Obtention de cette expression explicite

- Après quelques itérations,

$$T^{(\mu_1,\dots,\mu_k)}_{\{i_1,\dots,i_k\}}(u+N-k)$$

$$\propto \mathcal{N}\lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} T^{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(u) z_{j_1}^{\lambda_1} z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

$$\propto \mathcal{N}\lim_{\substack{z_{j_1}\to 1/x_{j_1}\\ \vdots \\ z_{j_{N-k}}\to 1/x_{j_{N-k}}}} \left(u=\hat{D}\right)^{\otimes L} \sum_{\substack{\lambda_{j_1}\geq 0\\ \vdots \\ \lambda_{j_{N-k}}\geq 0}} \chi_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{N-k},\mu_1,\dots,\mu_k)}(g) z_{j_1}^{\lambda_1} z_{j_2}^{\lambda_2}\dots x_{j_{N-k}}^{\lambda_{N-k}}$$

- Puis on conclue avec des manipulations de determinant.
- Cette approcher permet aussi de faire le lien avec une construction des opérateurs Q via une représentation de dimension infinie dans l'espace auxiliaire.

Outline

1. Chaînes de spins intégrables
    - Ansatz de Bethe en coordonnées
    - Matrices de transfert
    - Équations fonctionelles
2. Codérivée pour $gl(N)$
    - Définition de la coderivée
    - Matrices de transfert
    - Équations fonctionnelles $\rightsquigarrow$ Expressions explicites
3. Codérivée pour $so(2r)$
    - Matrices R
    - Codérivée
    - Opérateurs Q

Générateurs de $so(2r)$

- Matrice de $so(2r)$: $m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$. On pose $s = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \hline i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$,

  $\rightsquigarrow sms^{-1} = \begin{pmatrix} g & h & i & 0 \\ j & k & 0 & -i \\ l & 0 & -k & -h \\ 0 & -l & -j & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-2,-2} & c_{-2,-1} & c_{-2,1} & c_{-2,2} \\ c_{-1,-2} & c_{-1,-1} & c_{-1,1} & c_{-1,2} \\ c_{1,-2} & c_{1,-1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,-2} & c_{2,-1} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$

  $\rightsquigarrow \forall (i,j), c_{i,j} = -c_{-j,-i}$, *ie* $m = -m'$
- générateurs de la representation fondamentale : $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}$
- générateurs : $[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{k,j} F_{i,l} - \delta_{i,l} F_{k,j} - \delta_{k,-i} F_{-j,l} - \delta_{-j,l} F_{k,-i}$
- notations : $\mathcal{G} = \sum_{\substack{-r \leq i,j \leq r \\ i \neq 0 \neq j}} E_{i,j} \otimes F_{j,i}$ et $\kappa = r - 1$
- représentation spinorielle : $R(u) = u\mathbb{I} + \mathcal{G}$
- représentation symétrique :

  $R(u) = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2 + 2\kappa s + s^2}{4}\right)\mathbb{I} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathcal{G} + \frac{1}{2}\mathcal{G}^2$

Générateurs de $so(2r)$

- Matrice de $so(2r)$: $m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.On pose $s = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \hline i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$,

  $\rightsquigarrow sms^{-1} = \begin{pmatrix} g & h & i & 0 \\ j & k & 0 & -i \\ l & 0 & -k & -h \\ 0 & -l & -j & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-2,-2} & c_{-2,-1} & c_{-2,1} & c_{-2,2} \\ c_{-1,-2} & c_{-1,-1} & c_{-1,1} & c_{-1,2} \\ c_{1,-2} & c_{1,-1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,-2} & c_{2,-1} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$

  $\rightsquigarrow \forall(i,j), c_{i,j} = -c_{-j,-i}$, *ie* $m = -m'$
- générateurs de la representation fondamentale : $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}$
- générateurs : $[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{k,j}F_{i,l} - \delta_{i,l}F_{k,j} - \delta_{k,-i}F_{-j,l} - \delta_{-j,l}F_{k,-i}$
- notations : $\mathcal{G} = \sum_{\substack{-r\leq i,j\leq r \\ i\neq 0\neq j}} E_{i,j} \otimes F_{j,i}$ et $\kappa = r - 1$
- représentation spinorielle : $R(u) = u\mathbb{I} + \mathcal{G}$
- représentation symétrique :

  $R(u) = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2+2\kappa s+s^2}{4}\right)\mathbb{I} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathcal{G} + \frac{1}{2}\mathcal{G}^2$

Générateurs de $so(2r)$

- Matrice de $so(2r)$: $m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.On pose $s = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \hline i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$,

  $\rightsquigarrow sms^{-1} = \begin{pmatrix} g & h & i & 0 \\ j & k & 0 & -i \\ l & 0 & -k & -h \\ 0 & -l & -j & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-2,-2} & c_{-2,-1} & c_{-2,1} & c_{-2,2} \\ c_{-1,-2} & c_{-1,-1} & c_{-1,1} & c_{-1,2} \\ c_{1,-2} & c_{1,-1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,-2} & c_{2,-1} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$

  $\rightsquigarrow \forall (i,j), c_{i,j} = -c_{-j,-i}$, *ie* $m = -m^t$

- générateurs de la representation fondamentale : $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}$
- générateurs : $[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{k,j} F_{i,l} - \delta_{i,l} F_{k,j} - \delta_{k,-i} F_{-j,l} - \delta_{-j,l} F_{k,-i}$
- notations : $\mathcal{G} = \sum_{\substack{-r \leq i,j \leq r \\ i \neq 0 \neq j}} E_{i,j} \otimes F_{j,i}$ et $\kappa = r - 1$
- représentation spinorielle : $R(u) = u\mathbb{I} + \mathcal{G}$
- représentation symétrique :

  $R(u) = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2 + 2\kappa s + s^2}{4}\right) \mathbb{I} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right) \mathcal{G} + \frac{1}{2} \mathcal{G}^2$

Générateurs de $so(2r)$

- Matrice de $so(2r)$: $m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.On pose $s = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \hline i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$,
  $\rightsquigarrow sms^{-1} = \begin{pmatrix} g & h & i & 0 \\ j & k & 0 & -i \\ l & 0 & -k & -h \\ 0 & -l & -j & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-2,-2} & c_{-2,-1} & c_{-2,1} & c_{-2,2} \\ c_{-1,-2} & c_{-1,-1} & c_{-1,1} & c_{-1,2} \\ c_{1,-2} & c_{1,-1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,-2} & c_{2,-1} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$
  $\rightsquigarrow \forall(i,j), c_{i,j} = -c_{-j,-i}$, $ie\ m = -m'$
- générateurs de la representation fondamentale : $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}$
- générateurs : $[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{k,j} F_{i,l} - \delta_{i,l} F_{k,j} - \delta_{k,-i} F_{-j,l} - \delta_{-j,l} F_{k,-i}$
- notations : $\mathcal{G} = \sum_{\substack{-r \leq i,j \leq r \\ i \neq 0 \neq j}} E_{i,j} \otimes F_{j,i}$ et $\kappa = r - 1$
- représentation spinorielle : $R(u) = u\mathbb{I} + \mathcal{G}$
- représentation symétrique :
  $R(u) = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2 + 2\kappa s + s^2}{4}\right)\mathbb{I} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathcal{G} + \frac{1}{2}\mathcal{G}^2$

Générateurs de $so(2r)$

- Matrice de $so(2r)$: $m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.On pose $s = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \hline i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$,

  $\rightsquigarrow sms^{-1} = \begin{pmatrix} g & h & i & 0 \\ j & k & 0 & -i \\ l & 0 & -k & -h \\ 0 & -l & -j & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-2,-2} & c_{-2,-1} & c_{-2,1} & c_{-2,2} \\ c_{-1,-2} & c_{-1,-1} & c_{-1,1} & c_{-1,2} \\ c_{1,-2} & c_{1,-1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,-2} & c_{2,-1} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$

  $\rightsquigarrow \forall(i,j), c_{i,j} = -c_{-j,-i}$, $ie\ m = -m'$
- générateurs de la representation fondamentale : $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}$
- générateurs : $[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{k,j}F_{i,l} - \delta_{i,l}F_{k,j} - \delta_{k,-i}F_{-j,l} - \delta_{-j,l}F_{k,-i}$
- notations : $\mathcal{G} = \sum_{\substack{-r\leq i,j\leq r \\ i\neq 0\neq j}} E_{i,j} \otimes F_{j,i}$ et $\kappa = r - 1$
- représentation spinorielle : $R(u) = u\mathbb{I} + \mathcal{G}$
- représentation symétrique :

  $R(u) = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2+2\kappa s+s^2}{4}\right)\mathbb{I} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathcal{G} + \frac{1}{2}\mathcal{G}^2$

Générateurs de $so(2r)$

- Matrice de $so(2r)$: $m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.On pose $s = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \hline i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$,

  $\rightsquigarrow sms^{-1} = \begin{pmatrix} g & h & i & 0 \\ j & k & 0 & -i \\ l & 0 & -k & -h \\ 0 & -l & -j & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-2,-2} & c_{-2,-1} & c_{-2,1} & c_{-2,2} \\ c_{-1,-2} & c_{-1,-1} & c_{-1,1} & c_{-1,2} \\ c_{1,-2} & c_{1,-1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,-2} & c_{2,-1} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$

  $\rightsquigarrow \forall(i,j), c_{i,j} = -c_{-j,-i}$, *ie* $m = -m'$
- générateurs de la representation fondamentale : $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}$
- générateurs : $[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{k,j} F_{i,l} - \delta_{i,l} F_{k,j} - \delta_{k,-i} F_{-j,l} - \delta_{-j,l} F_{k,-i}$
- notations : $\mathcal{G} = \sum_{\substack{-r \leq i,j \leq r \\ i \neq 0 \neq j}} E_{i,j} \otimes F_{j,i}$ et $\kappa = r - 1$
- représentation spinorielle : $R(u) = u\mathbb{I} + \mathcal{G}$
- représentation symétrique :

  $R(u) = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2 + 2\kappa s + s^2}{4}\right)\mathbb{I} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathcal{G} + \frac{1}{2}\mathcal{G}^2$

Générateurs et matrice R pour $so(2r)$

- Matrice de $so(2r)$: $m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.On pose $s = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \hline i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$,

  $\rightsquigarrow sms^{-1} = \begin{pmatrix} g & h & i & 0 \\ j & k & 0 & -i \\ l & 0 & -k & -h \\ 0 & -l & -j & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-2,-2} & c_{-2,-1} & c_{-2,1} & c_{-2,2} \\ c_{-1,-2} & c_{-1,-1} & c_{-1,1} & c_{-1,2} \\ c_{1,-2} & c_{1,-1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,-2} & c_{2,-1} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$

  $\rightsquigarrow \forall(i,j), c_{i,j} = -c_{-j,-i}$, *ie* $m = -m'$
- générateurs de la representation fondamentale : $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}$
- générateurs : $[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{k,j} F_{i,l} - \delta_{i,l} F_{k,j} - \delta_{k,-i} F_{-j,l} - \delta_{-j,l} F_{k,-i}$
- notations : $\mathcal{G} = \sum_{\substack{-r \leq i,j \leq r \\ i \neq 0 \neq j}} E_{i,j} \otimes F_{j,i}$ et $\kappa = r - 1$
- représentation spinorielle : $R(u) = u\mathbb{I} + \mathcal{G}$
- représentation symétrique :

  $R(u) = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2 + 2\kappa s + s^2}{4}\right) \mathbb{I} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right) \mathcal{G} + \frac{1}{2}\mathcal{G}^2$

Générateurs et matrice R pour $so(2r)$

- Matrice de $so(2r)$: $m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.On pose $s = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \hline i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$,

  $\rightsquigarrow sms^{-1} = \begin{pmatrix} g & h & i & 0 \\ j & k & 0 & -i \\ l & 0 & -k & -h \\ 0 & -l & -j & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-2,-2} & c_{-2,-1} & c_{-2,1} & c_{-2,2} \\ c_{-1,-2} & c_{-1,-1} & c_{-1,1} & c_{-1,2} \\ c_{1,-2} & c_{1,-1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,-2} & c_{2,-1} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$

  $\rightsquigarrow \forall(i,j), c_{i,j} = -c_{-j,-i}$, *ie* $m = -m'$
- générateurs de la representation fondamentale : $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}$
- générateurs : $[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{k,j} F_{i,l} - \delta_{i,l} F_{k,j} - \delta_{k,-i} F_{-j,l} - \delta_{-j,l} F_{k,-i}$
- notations : $\mathcal{G} = \sum_{\substack{-r\leq i,j\leq r \\ i\neq 0\neq j}} E_{i,j} \otimes F_{j,i}$ et $\kappa = r - 1$
- représentation spinorielle : $R(u) = u\mathbb{I} + \mathcal{G}$
- représentation symétrique :

  $R(u) = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2 + 2\kappa s + s^2}{4}\right)\mathbb{I} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathcal{G} + \frac{1}{2}\mathcal{G}^2$

Générateurs et matrice R pour $so(2r)$

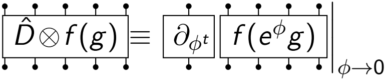
- Matrice de $so(2r)$: $m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.On pose $s = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ \hline i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$,

  $\rightsquigarrow sms^{-1} = \begin{pmatrix} g & h & i & 0 \\ j & k & 0 & -i \\ l & 0 & -k & -h \\ 0 & -l & -j & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-2,-2} & c_{-2,-1} & c_{-2,1} & c_{-2,2} \\ c_{-1,-2} & c_{-1,-1} & c_{-1,1} & c_{-1,2} \\ c_{1,-2} & c_{1,-1} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,-2} & c_{2,-1} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$

  $\rightsquigarrow \forall (i,j), c_{i,j} = -c_{-j,-i}$, *ie* $m = -m'$
- générateurs de la representation fondamentale : $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}$
- générateurs : $[F_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{k,j} F_{i,l} - \delta_{i,l} F_{k,j} - \delta_{k,-i} F_{-j,l} - \delta_{-j,l} F_{k,-i}$
- notations : $\mathcal{G} = \sum_{\substack{-r \leq i,j \leq r \\ i \neq 0 \neq j}} E_{i,j} \otimes F_{j,i}$ et $\kappa = r - 1$
- représentation spinorielle : $R(u) = u\mathbb{I} + \mathcal{G}$
- représentation symétrique :

  $R(u) = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2 + 2\kappa s + s^2}{4}\right)\mathbb{I} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathcal{G} + \frac{1}{2}\mathcal{G}^2$

Symétrie $gl(N)$

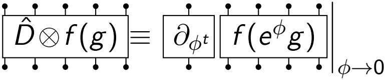
- 
  $\boxed{\hat{D}\otimes f(g)} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\,\boxed{f(e^{\phi}g)}\Big|_{\phi\to 0}$
- $\hat{D}_i^j f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon E_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\hat{D}\otimes g = \mathcal{P}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- $T = \left(u+\hat{D}\right)^L \chi(g)$

Symétrie $so(2r)$

- $\mathbb{D}_i^j f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon F_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\mathbb{D} = \hat{D} - \hat{D}'$
- $\mathbb{D}\otimes g = \mathcal{G}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- T Spinoriel :
  $T = (u+\mathbb{D})^L \chi(g)$
- T symétrique :

$$T = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbb{D}^2)}{8} + \left(u+\frac{\kappa}{2}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \chi(g)$$

Symétrie $gl(N)$



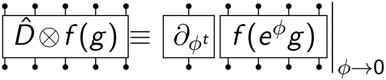
- $\boxed{\hat{D}\otimes f(g)} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\boxed{f(e^{\phi}g)}\Big|_{\phi\to 0}$
- $\hat{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon E_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\hat{D}\otimes g = \mathcal{P}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- $T = \left(u+\hat{D}\right)^L \chi(g)$

Symétrie $so(2r)$

- $\mathbb{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon F_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\mathbb{D} = \hat{D} - \hat{D}'$
- $\mathbb{D}\otimes g = \mathcal{G}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- T Spinoriel :
  $T = (u+\mathbb{D})^L \chi(g)$
- T symétrique :

$$T = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbb{D}^2)}{8} + \left(u+\frac{\kappa}{2}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \chi(g)$$

Symétrie $gl(N)$



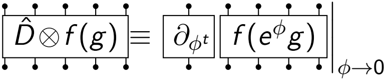
- $\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\boxed{f(e^{\phi} g)}\Big|_{\phi\to 0}$
- $\hat{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon E_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$
- $T = \left(u + \hat{D}\right)^L \chi(g)$

Symétrie $so(2r)$

- $\mathbb{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon F_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\mathbb{D} = \hat{D} - \hat{D}'$
- $\mathbb{D} \otimes g = \mathcal{G}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$
- T Spinoriel :
  $T = (u + \mathbb{D})^L \chi(g)$
- T symétrique :

$$T = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbb{D}^2)}{8} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \chi(g)$$

Symétrie $gl(N)$



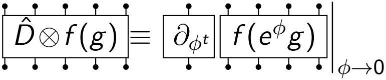
- $\boxed{\hat{D}\otimes f(g)} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\,\boxed{f(e^{\phi} g)}\Big|_{\phi\to 0}$
- $\hat{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon E_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\hat{D}\otimes g = \mathcal{P}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- $T = \left(u+\hat{D}\right)^L \chi(g)$

Symétrie $so(2r)$

- $\mathbb{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon F_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\mathbb{D} = \hat{D} - \hat{D}'$
- $\mathbb{D}\otimes g = \mathcal{G}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- T Spinoriel :
  $T = (u+\mathbb{D})^L \chi(g)$
- T symétrique :

$$T = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbb{D}^2)}{8} + \left(u+\frac{\kappa}{2}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \chi(g)$$

Symétrie $gl(N)$

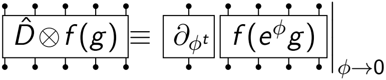
- 
  $\boxed{\hat{D}\otimes f(g)} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\boxed{f(e^{\phi}g)}\Big|_{\phi\to 0}$
- $\hat{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon E_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- $T = \left(u+\hat{D}\right)^L \chi(g)$

Symétrie $so(2r)$

- $\mathbb{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon F_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\mathbb{D} = \hat{D} - \hat{D}'$
- $\mathbb{D}\otimes g = \mathcal{G}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- T Spinoriel :
  $T = (u+\mathbb{D})^L \chi(g)$
- T symétrique :

$$T = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbb{D}^2)}{8} + \left(u+\frac{\kappa}{2}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \chi(g)$$

Symétrie $gl(N)$

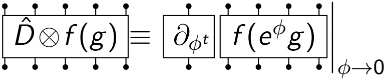
- 
  $\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\boxed{f(e^{\phi} g)}\Big|_{\phi \to 0}$
- $\hat{D}_i^j f(g) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} f\left(e^{\epsilon E_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon \to 0}$
- $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$
- $T = \left(u + \hat{D}\right)^L \chi(g)$

Symétrie $so(2r)$

- $\mathbb{D}_i^j f(g) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} f\left(e^{\epsilon F_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon \to 0}$
- $\mathbb{D} = \hat{D} - \hat{D}'$
- $\mathbb{D} \otimes g = \mathcal{G}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$
- T Spinoriel :
  $T = (u + \mathbb{D})^L \chi(g)$
- T symétrique :

$$T = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbb{D}^2)}{8} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \chi(g)$$

Symétrie $gl(N)$

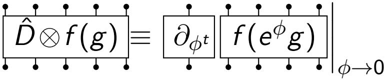
- 
$$\boxed{\hat{D}\otimes f(g)} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\,\boxed{f(e^{\phi} g)}\Big|_{\phi\to 0}$$
- $\hat{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon E_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\hat{D}\otimes g = \mathcal{P}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- $T = \left(u+\hat{D}\right)^L \chi(g)$

Symétrie $so(2r)$

- $\mathbb{D}^j_i f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon F_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\mathbb{D} = \hat{D} - \hat{D}'$
- $\mathbb{D}\otimes g = \mathcal{G}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- T Spinoriel :
  $T = \left(u+\mathbb{D}\right)^L \chi(g)$
- T symétrique :

$$T = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbb{D}^2)}{8} + \left(u+\frac{\kappa}{2}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \chi(g)$$

Symétrie $gl(N)$

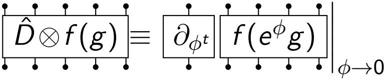
- 
  $\boxed{\hat{D}\otimes f(g)} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}}\boxed{f(e^{\phi}g)}\Big|_{\phi\to 0}$
- $\hat{D}_i^j f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon E_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\hat{D}\otimes g = \mathcal{P}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- $T = \left(u+\hat{D}\right)^L \chi(g)$

Symétrie $so(2r)$

- $\mathbb{D}_i^j f(g) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(e^{\epsilon F_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon\to 0}$
- $\mathbb{D} = \hat{D} - \hat{D}'$
- $\mathbb{D}\otimes g = \mathcal{G}\left(\mathbb{I}\otimes g\right)$
- T Spinoriel :
  $T = (u+\mathbb{D})^L \chi(g)$
- T symétrique :

$$T = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbb{D}^2)}{8} + \left(u+\frac{\kappa}{2}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \chi(g)$$

Symétrie $gl(N)$

- 

$$\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} \equiv \boxed{\partial_{\phi^t}} \boxed{f\left(e^{\phi} g\right)}\Big|_{\phi \to 0}$$

- $\hat{D}_i^j f(g) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} f\left(e^{\epsilon E_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon \to 0}$
- $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$
- $T = \left(u + \hat{D}\right)^L \chi(g)$

Symétrie $so(2r)$

- $\mathbb{D}_i^j f(g) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} f\left(e^{\epsilon F_{j,i}} g\right)\Big|_{\epsilon \to 0}$
- $\mathbb{D} = \hat{D} - \hat{D}'$
- $\mathbb{D} \otimes g = \mathcal{G}\left(\mathbb{I} \otimes g\right)$
- T Spinoriel :
  $T = \left(u + \mathbb{D}\right)^L \chi(g)$
- T symétrique :

$$T = \left(u^2 - \frac{(\kappa-1)^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbb{D}^2)}{8} + \left(u + \frac{\kappa}{2}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \chi(g)$$

Opérateurs Q pour $so(2r)$

- Opérateurs Q spinoriels :

$$S_{\vec{\alpha}}(u) = \mathcal{N} \lim_{z \to \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} x_i^{\alpha_i}}} \left(u - \frac{\kappa}{2} - z\frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{D}\right)^{\otimes L} \sum_{s \geq 0} \chi_{\vec{\alpha},s} z^s$$

- Opérateurs Q symétriques :

$$Q_{\{i\}}(u) = \mathcal{N} \lim_{z \to \frac{1}{x_{-i}}} \left(u(u+\kappa) + uz\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\kappa-1}{4} + \left(u - \frac{\kappa}{2} - \frac{z}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbb{D} + \frac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \left(1 - z^2\right) w\left(z\right)$$

Opérateurs Q pour $so(2r)$

- Opérateurs Q spinoriels :
  $$S_{\vec{\alpha}}(u) = \mathcal{N} \lim_{z \to \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} x_i^{\alpha_i}}} \left(u - \tfrac{\kappa}{2} - z\tfrac{\partial}{\partial z} + \mathbb{D}\right)^{\otimes L} \sum_{s \geq 0} \chi_{\vec{\alpha},s} z^s$$
- Opérateurs Q symétriques :

$$Q_{\{i\}}(u) =$$
$$\mathcal{N} \lim_{z \to \frac{1}{x_{-i}}} \left(u(u+\kappa) + uz\tfrac{\partial}{\partial z} + \tfrac{2\kappa-1}{4} + \left(u - \tfrac{\kappa}{2} - \tfrac{z}{2}\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\mathbb{D} + \tfrac{(\mathbb{D}^2)'}{2}\right)^{\otimes L} \left(1 - z^2\right) w\left(z\right)$$

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
    - Définition d'une codérivée
    - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
    - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
    - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
    - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \to so(2r)$ à développer
  - Propriétés combinatoires (preuve des relations fonctionnelles)
  - Représentations arbitraires (espace auxiliaire)
  - Lien avec les constructions comme matrices T sur un espace auxiliaire de dimension infinie
- Autres algèbres de symmétrie
- Autres représentations dans l'espace physique
- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique

Perspectives

- Généralisations $gl(N) \rightarrow so(2r)$ obtenues
  - Définition d'une codérivée
  - Expression des opérateurs T et Q
- Généralisations $gl(N) \rightarrow so(2r)$ à développer

Merci

Merci pour votre attention

- Applications : vecteurs de Bethe, produits scalaires, etc
- Théorie des champs, courbe spectrale quantique