Autour du

Constructeur universel d'équations

et quelques digressions

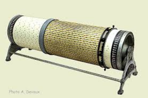
Sébastien Leurent
Institut de Mathématiques de Bourgogne

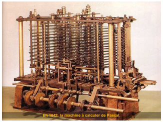
Vendredi 24 mars 2023
transparents issus d'une présentation de Arnaud Rousselle

Problématique et contexte général

Concevoir des instruments de calcul, tracé, résolution d'équations.

Des solutions





Problématique précise

Construire la courbe représentative de n'importe quel polynôme

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

sur n'importe quel intervalle $[a, b]$ efficacement, sans calcul, « mécaniquement ».

Quelques motivations

- Obtenir la représentation graphique
- Résoudre graphiquement des équations polynomiales
- Construire des nombres que l'on ne peut pas construire en utilisant seulement un compas et une règle
- ...

Une solution

Réduction du problème

Réduction du problème

- Savoir construire la courbe représentative de n'importe quel polynôme sur $[0,1]$ suffit.

Réduction du problème

- Savoir construire la courbe représentative de n'importe quel polynôme sur $[0,1]$ suffit.
  - Lorsque x décrit $[a,b]$,
$$x' = \frac{x-a}{b-a}$$
    décrit $[0,1]$ et représenter un polynôme P sur $[a,b]$ revient à représenter sur $[0,1]$ le polynôme défini par
$$Q(x') = P(x) = P\left((b-a)x' + a\right).$$

Réduction du problème

- Savoir construire la courbe représentative de n'importe quel polynôme sur $[0, 1]$ suffit.
  - Lorsque x décrit $[a, b]$,
  $$x' = \frac{x - a}{b - a}$$
  décrit $[0, 1]$ et représenter un polynôme P sur $[a, b]$ revient à représenter sur $[0, 1]$ le polynôme défini par
  $$Q(x') = P(x) = P\left((b - a)x' + a\right).$$
- Il suffit donc de pouvoir représenter sur $[0, 1]$ un polynôme de degré quelconque.

Nouvel objectif et règles du jeu

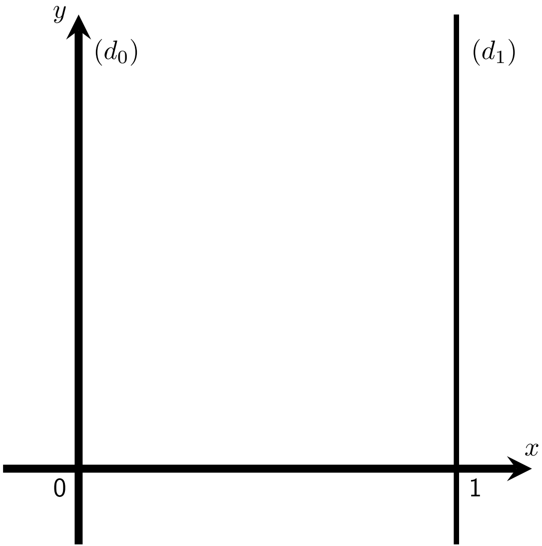
Concevoir une machine permettant de construire la courbe représentative de n'importe quel polynôme

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

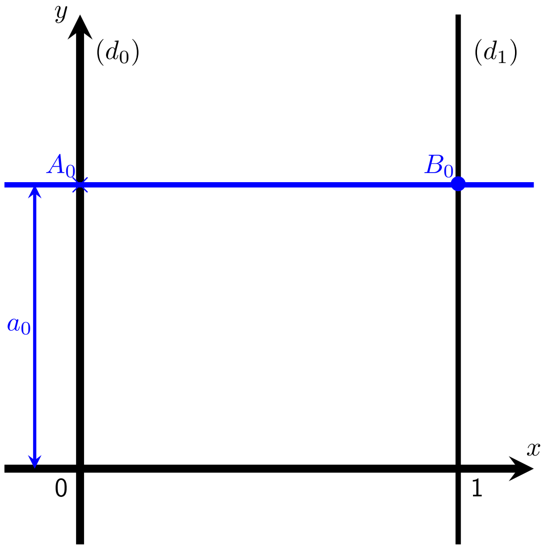
sur $[0, 1]$ en utilisant uniquement :

- un support,
- des tiges pouvant être fixées ou coulisser les unes sur les autres,
- quelques attaches,
- et un stylo !

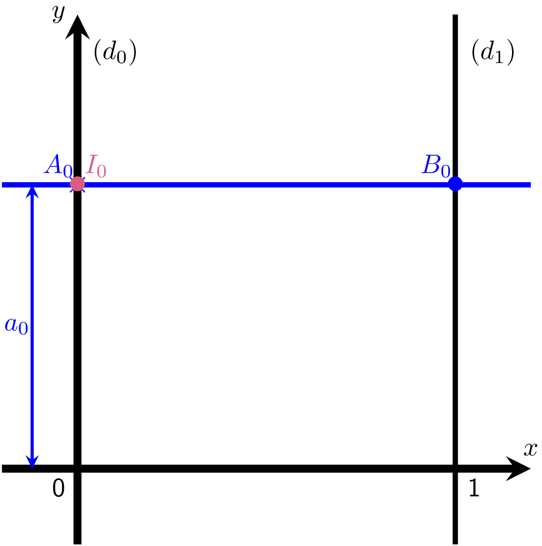
Commençons par le commencement : $P(x) \equiv a_0$



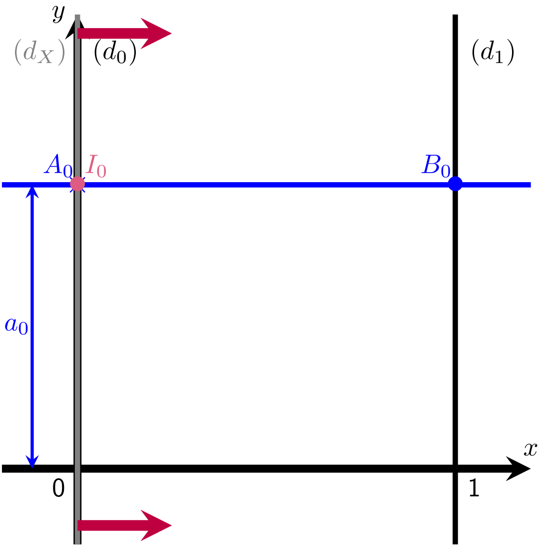
Commençons par le commencement : $P(x) \equiv a_0$



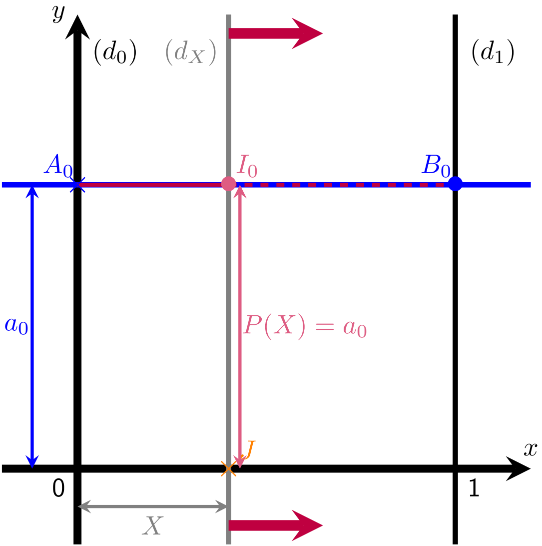
Commençons par le commencement : $P(x) \equiv a_0$



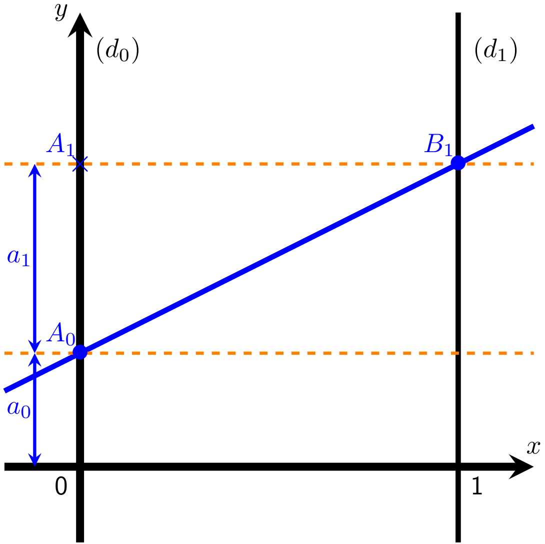
Commençons par le commencement : $P(x) \equiv a_0$



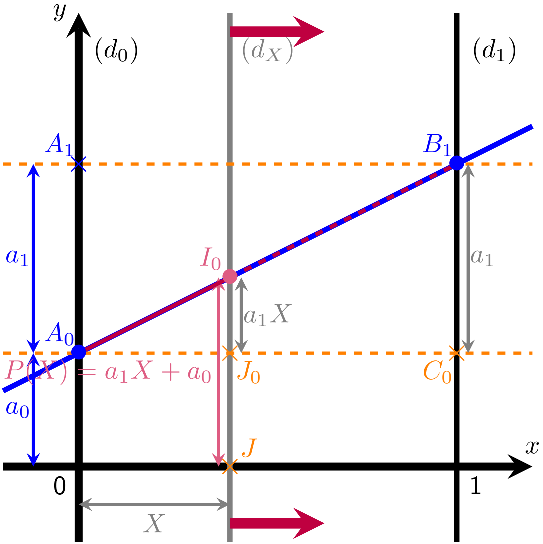
Commençons par le commencement : $P(x) \equiv a_0$



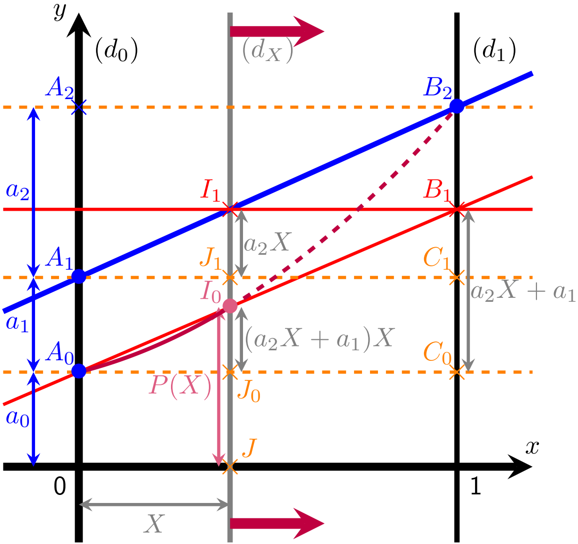
Le cas du degré 1 : $P(x) = a_1 x + a_0$



Le cas du degré 1 : $P(x) = a_1 x + a_0$



Le cas du degré 2 : $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$



et le cas général : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

- $(d_0), (d_1)$ et (d_X), les droites verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $x = X$.

et le cas général : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

- $(d_0), (d_1)$ et (d_X), les droites verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $x = X$.
- $A_0(0; a_0)$, $A_1(0; a_0 + a_1)$,. . ., $A_n(0; a_0 + \cdots + a_n)$.

et le cas général : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

- $(d_0), (d_1)$ et (d_X), les droites verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $x = X$.
- $A_0(0; a_0)$, $A_1(0; a_0 + a_1)$,. . ., $A_n(0; a_0 + \cdots + a_n)$.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par A_n coupe (d_1) en B_n.

et le cas général : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

- $(d_0), (d_1)$ et (d_X), les droites verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $x = X$.
- $A_0(0; a_0)$, $A_1(0; a_0 + a_1)$,. . ., $A_n(0; a_0 + \cdots + a_n)$.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par A_n coupe (d_1) en B_n.
- La droite $(A_{n-1}B_n)$ coupe (d_X) en I_{n-1}.

et le cas général : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

- $(d_0), (d_1)$ et (d_X), les droites verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $x = X$.
- $A_0(0; a_0)$, $A_1(0; a_0 + a_1)$,. . ., $A_n(0; a_0 + \cdots + a_n)$.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par A_n coupe (d_1) en B_n.
- La droite $(A_{n-1}B_n)$ coupe (d_X) en I_{n-1}.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par I_{n-1}coupe (d_1) en B_{n-1}.

et le cas général : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

- $(d_0), (d_1)$ et (d_X), les droites verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $x = X$.
- $A_0(0; a_0)$, $A_1(0; a_0 + a_1)$,. . ., $A_n(0; a_0 + \cdots + a_n)$.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par A_n coupe (d_1) en B_n.
- La droite $(A_{n-1}B_n)$ coupe (d_X) en I_{n-1}.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par I_{n-1}coupe (d_1) en B_{n-1}.
- La droite $(A_{n-2}B_{n-1})$ coupe (d_X) en I_{n-2}.

et le cas général : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

- $(d_0), (d_1)$ et (d_X), les droites verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $x = X$.
- $A_0(0; a_0)$, $A_1(0; a_0 + a_1)$,. . ., $A_n(0; a_0 + \cdots + a_n)$.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par A_n coupe (d_1) en B_n.
- La droite $(A_{n-1}B_n)$ coupe (d_X) en I_{n-1}.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par I_{n-1}coupe (d_1) en B_{n-1}.
- La droite $(A_{n-2}B_{n-1})$ coupe (d_X) en I_{n-2}.
- . . .

et le cas général : $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

- $(d_0), (d_1)$ et (d_X), les droites verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $x = X$.
- $A_0(0; a_0)$, $A_1(0; a_0 + a_1)$,. . ., $A_n(0; a_0 + \cdots + a_n)$.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par A_n coupe (d_1) en B_n.
- La droite $(A_{n-1}B_n)$ coupe (d_X) en I_{n-1}.
- La perpendiculaire à (d_0) passant par I_{n-1}coupe (d_1) en B_{n-1}.
- La droite $(A_{n-2}B_{n-1})$ coupe (d_X) en I_{n-2}.
- . . .
- La droite (A_0B_1) coupe (d_X) en $I_0 = (X, P(X))$.

Que vient-on de faire ?

Que vient-on de faire ?

Redécouvrir le
Constructeur Universel d'équations
de János András SEGNER (1759)

Où le retrouver ?

Où le retrouver ?

Où le retrouver ?

où tout est dit à son sujet...

Une introduction prometteuse

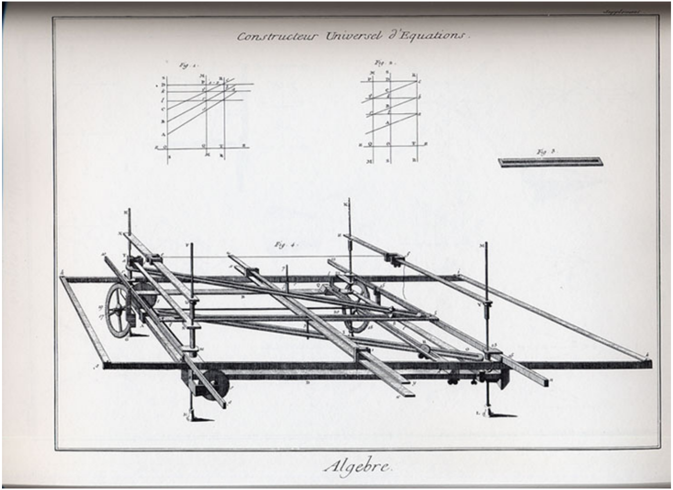
ÉQUATION. *Conſtruction & uſage d'une machine pour trouver les racines de quelque équation que ce puiſſe être.* (*Algebre. Machines.*) M. Paſcal s'eſt fait une réputation dans le monde pour avoir inventé ſa machine arithmétique. Celle dont je vais donner la deſcription n'eſt pas moins ingénieuſe ; & on peut l'appliquer à toutes les *équations* de quelque degré qu'elles ſoient.

Une description géométrique de la méthode...

Soit l'*équation* à réſoudre $a + bx + cxx + dxx$, &c. $= 0$.

Tirez ſur la ligne ZZ priſe pour baſe dans la *figure 1* ou 2 de la *pl. I d'Algebre*, *des planches*, *ſupplément*, les perpendiculaires SS & RR, éloignées l'une de l'autre de telle diſtance qu'il vous plaira. Prenez enſuite ſur la ligne SS de l'une ou de l'autre figure les parties OA, AB, BC, CD, &c. proportionnelles aux coefficiens a, b, c, d, &c., de l'*équation*, obſervant de prendre chacune de ces lignes de bas en haut, à compter de l'extrêmité de la derniere lorſque le coefficient qu'elle doit repréſenter eſt poſitif, & dans un ſens contraire lorſqu'il eſt négatif. Cela fait, tirez

accompagnée de planches,



de démonstrations,

Démonſtration. Puiſque les lignes OA, AB, BC, &c. ſont proportionnelles aux coefficiens a, b, c, &c. Suppoſons que la premiere OA ſoit égale au premier coeffi-cient a, ou à telle de ces parties qu'on voudra, n, par exemple, ſeroit $\frac{a}{n}$; alors pour conſerver la proportion ci-deſſus, la ſuivante AB ſera égale à $\frac{b}{n}$, Bc à $\frac{c}{n}$ & cD à $\frac{d}{n}$, &c. Si l'on nomme OQ ou ſon égale DPx, pour lors Dc étant priſe égale à l'unité, Pc ſera égale à $1 - x$;

de remarques,

- sur les racines négatives

> *Nota.* Pour avoir les racines négatives, on placera les regles à gauche de *SS* *figure* 2, où elles ſont marquées par les mêmes lettres que dans la premiere figure. Par exemple, on poſera la regle *Cc* de *c* ou *q*, la regle *Bb* de *b* ou *r*, la regle *aA* de *n* ou *s*, vers la gauche, en ſorte que les centres *A*, *B*, des deux dernieres ſe trouvent ſur la ligne fixe *SS*.

de remarques,

- sur les changements d'échelle ou de variable

Il y a encore une choſe à obſerver : c'eſt que ſi l'on a une *équation* comme celle-ci $xxx - Sxx + 1200 \cdot x + 9000 = 0$, dont les coefficiens S, 1200 & 9000 ſont différens l'un de l'autre, qu'il ſeroit difficile de les prendre ſur la ligne OD, on peut les réduire de la maniere ſuivante : c'eſt de mettre dans l'*équation* à la place de chaque x, $10\,x$, $20\,x$, ou $100\,x$. Je ſuppoſe qu'on mette $20\,x$; pour lors, au lieu de xxx, on aura $8000\,xxx$, au lieu de $S\,xx - 2000\,xx$, &c., & l'*équation*

de considérations,

- sur la nature et le nombre de racines d'un polynôme

1°. Les racines d'une *équation* peuvent être de trois ſortes, poſitives, négatives & impoſſibles ou imaginaires.

2°. Toute *équation* contient autant de racines qu'elle a de degrés.

3°. Les racines imaginaires ſont toujours au nombre de deux.

4°. Que toute *équation* dont le nombre des degrés eſt impair, doit contenir au moins une racine réelle.

5°. Que toute *équation* dont le premier & le dernier termes, après avoir été tranſpoſés, ont des ſignes contraires, contient au moins une racine réelle. Lorſque cela arrive, & que le nombre de ſes dimenſions eſt pair, de même que celui des racines impoſſibles, celui des racines réelles doit l'être pareillement.

des conseils d'utilisation,

9°. Le plus grand coefficient négatif d'une *équation* quelconque, considéré comme positif, & augmenté de l'unité, excede toujours la plus grande racine positive de l'*équation*. Par conséquent,

10°. Si en place de la quantité inconnue *x* de l'*équation*, vous mettez le coefficient, pris comme positif & augmenté de l'unité, moins *x*, toutes les racines deviendront positives. Dans ce cas, vous n'aurez besoin que des regles de la *figure 1*, dont les centres sont à leurs extrêmités, & elles vous suffiront pour tous les cas possibles; car vous devez avoir observé que les centres de celles de la deuxieme figure sont autrement disposés.

de fabrication,

Voici la deſcription d'une machine pour régler le mouvement des regles dont j'ai parlé : elle n'eſt que pour les *équations* du deuxieme degré ; mais on peut également l'employer pour toutes les autres.

ABCD, *figure 4*, eſt un châſſis de fer ou d'acier, compoſé de quatre barres de fer aſſemblées par leurs extrêmités, qui forment un parallélogramme rectangle de douze pouces de long ſur huit de large, aux quatre coins duquel ſont des appuis *EF*, *GH*, *IK*, & *LM*, ſur leſquels il porte. Sur le côté A, eſt un coulant *N*, qu'on peut arrêter avec une vis dans tel endroit qu'on veut, & ſur lequel la traverſe *NO* tourne ſur ſon centre. Son autre extrêmité tient par le moyen d'une vis avec ſon écroue à la traverſe *PQ*, qui eſt pareillement arrêtée ſur le châſſis aux endroits *P* & *Q*, mais de maniere qu'on peut l'approcher ou l'éloigner à volonté de l'extrêmité *A*.

et une conclusion enthousiaste

des *équations*. Comme il paroît par la démonſtration précédente, qu'en augmentant les barres de cette machine, on peut l'employer généralement pour toutes les *équations* de quelque degré qu'elles puiſſent être, on peut l'appeller, à juſte titre, un *conſtructeur univerſel d'équations*. (*V*)

et une conclusion enthousiaste

> des *équations*. Comme il paroît par la démonſtration précédente, qu'en augmentant les barres de cette machine, on peut l'employer généralement pour toutes les *équations* de quelque degré qu'elles puiſſent être, on peut l'appeller, à juſte titre, un *conſtructeur univerſel d'équations*. (*V*)

Bref, tout est dit !

Tout est dit, ou presque...

Tout est dit, ou presque...

- Rien sur l'attribution de la méthode à Segner

Tout est dit, ou presque...

- Rien sur l'attribution de la méthode à Segner

et surtout

- dans la pratique, ça marche ?

Tout est dit, ou presque...

- Rien sur l'attribution de la méthode à Segner

et surtout

- dans la pratique, ça marche ?
  - Oui ! !

Tout est dit, ou presque...

- Rien sur l'attribution de la méthode à Segner

et surtout

- dans la pratique, ça marche ?
  - Oui ! !
  - Mais, à l'époque, convenablement seulement pour les degrés 0 et 1...

Depuis, il y a eu

Depuis, il y a eu

et...

ou, par d'autres personnes,

Réalisé dans le cadre de l'exposition *Au delà du compas, la géométrie des courbes*, une version de l'instrument permettant le tracé de polynômes de degré 3 pour le musée *Il Giardino de Archimede*, à Florence.

Au passage

Au passage

On a vu que la méthode utilise la réécriture d'un polynôme

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

sous la forme

$$(\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})\ldots)x + a_0.$$

Ceci n'est pas sans rappeler, avant l'heure, la méthode de Hörner (1819) réduisant le nombre d'opérations nécessaires à son évaluation de $\frac{n(n+1)}{2}$ multiplications et n additions à n multiplications et n additions.

Construction à la règle et au compas

- Les points $O(0;0)$ et $I(1;0)$ sont constructibles.

Construction à la règle et au compas

- Les points $O(0;0)$ et $I(1;0)$ sont constructibles.
- On construit d'autres points comme intersections cercle(s) ou droite(s) basés sur les points déjà construits.
  - La règle est non graduée et ne sert qu'à tracer des droites passant par deux points déjà construits.
  - Le compas permet de tracer des cercles centrés en les points construits et dont les rayons sont des distances entre deux points déjà construits.

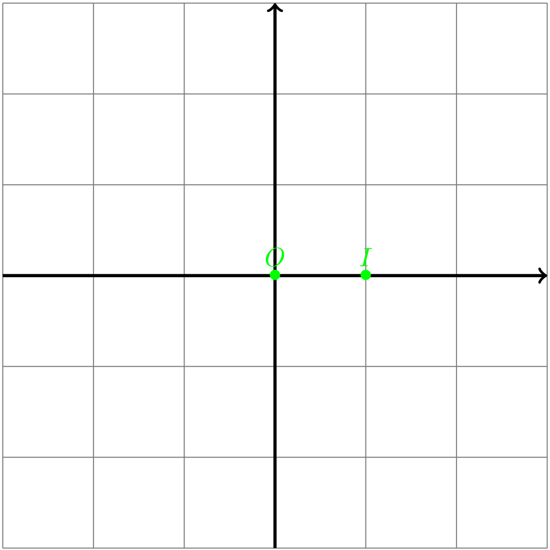
Construction à la règle et au compas

- Les points $O(0;0)$ et $I(1;0)$ sont constructibles.
- On construit d'autres points comme intersections cercle(s) ou droite(s) basés sur les points déjà construits.
  - La règle est non graduée et ne sert qu'à tracer des droites passant par deux points déjà construits.
  - Le compas permet de tracer des cercles centrés en les points construits et dont les rayons sont des distances entre deux points déjà construits.
- Les points ainsi construits sont dites *constructibles*.

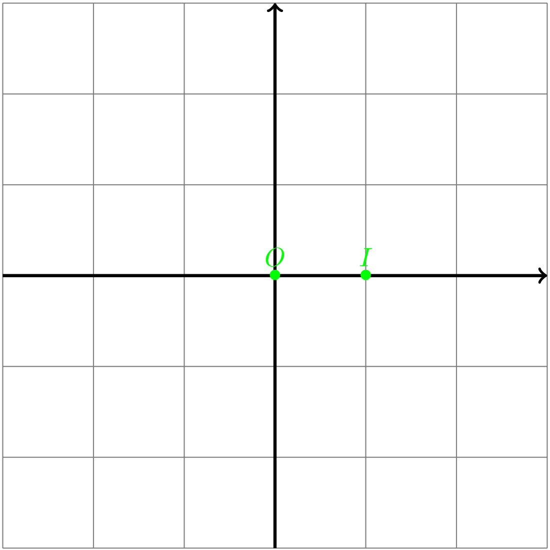
Construction à la règle et au compas

- Les points $O(0;0)$ et $I(1;0)$ sont constructibles.
- On construit d'autres points comme intersections cercle(s) ou droite(s) basés sur les points déjà construits.
  - La règle est non graduée et ne sert qu'à tracer des droites passant par deux points déjà construits.
  - Le compas permet de tracer des cercles centrés en les points construits et dont les rayons sont des distances entre deux points déjà construits.
- Les points ainsi construits sont dites *constructibles*.
- Les coordonnées de ces points sont les *nombres constructibles*.

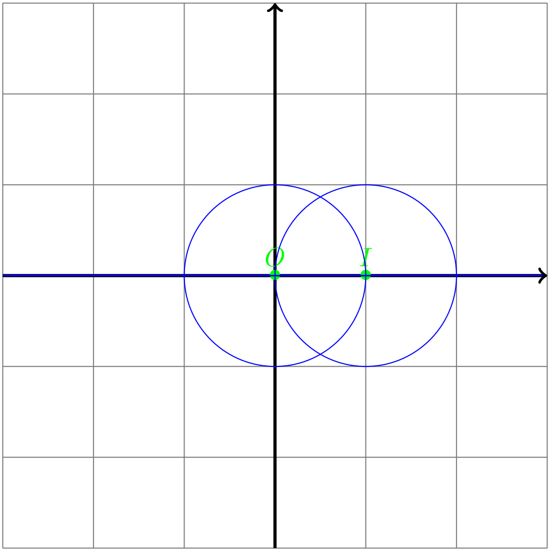
$C_0 = \{O, I\}$



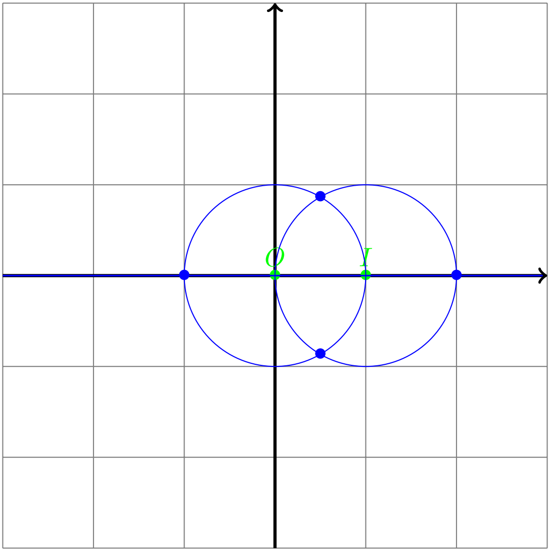
C_1 ?



C_1 ?

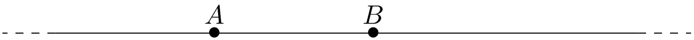


C_1 ?



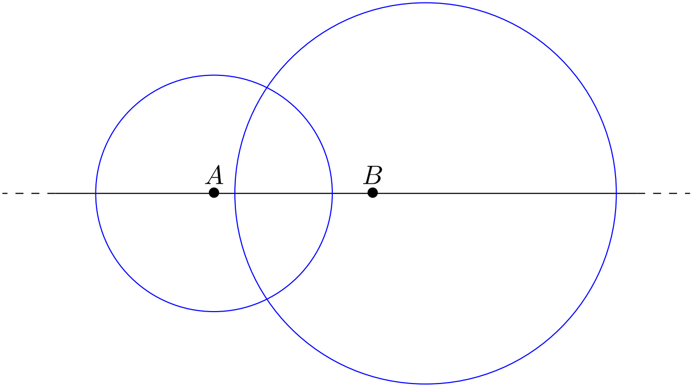
Que peut-on construire avec une règle et un compas ?

- Des droites



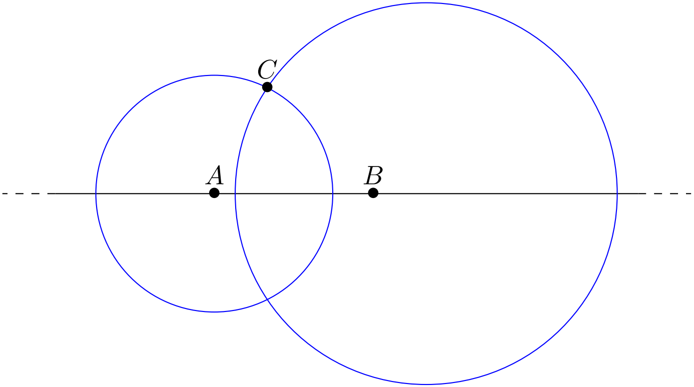
Que peut-on construire avec une règle et un compas ?

- Des droites
- Des cercles



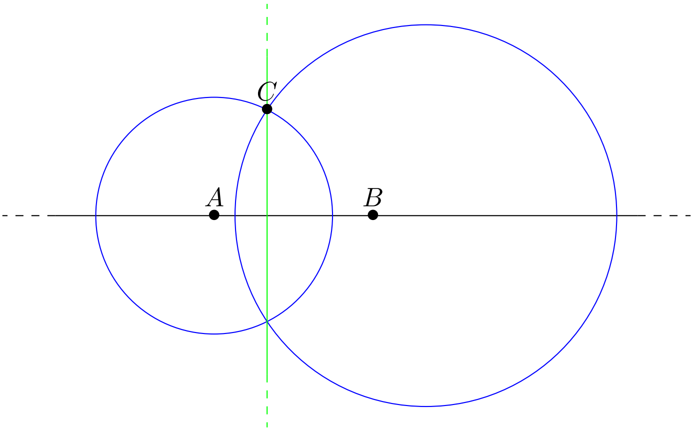
Que peut-on construire avec une règle et un compas ?

- Des droites
- Des cercles
- Des points



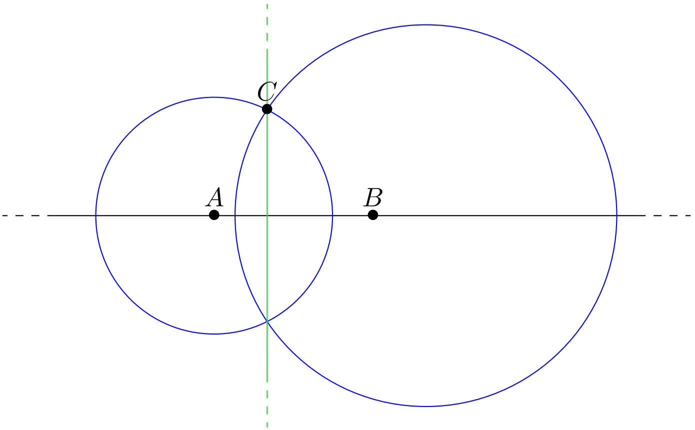
Que peut-on construire avec une règle et un compas ?

- Des droites
- Des cercles
- Des points
- Des perpendiculaires



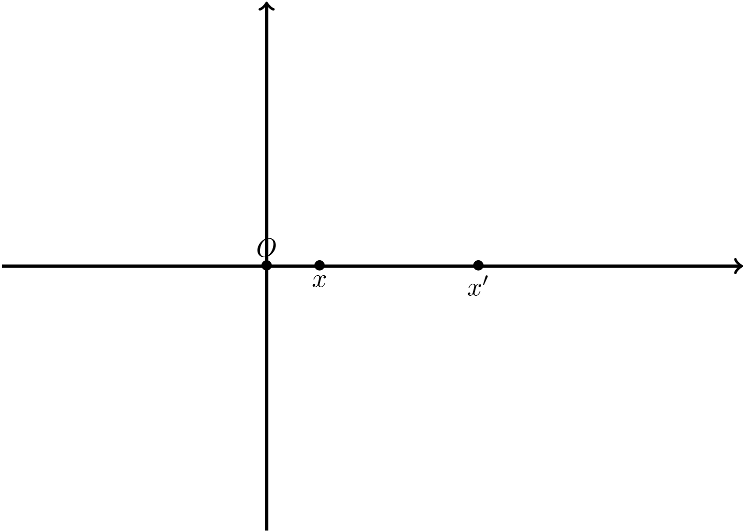
Que peut-on construire avec une règle et un compas ?

- Des droites
- Des cercles
- Des points
- Des perpendiculaires

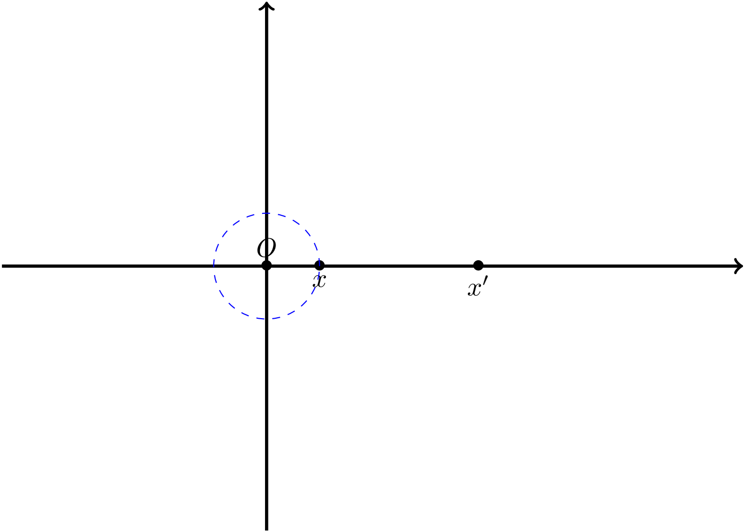


- Des parallèles

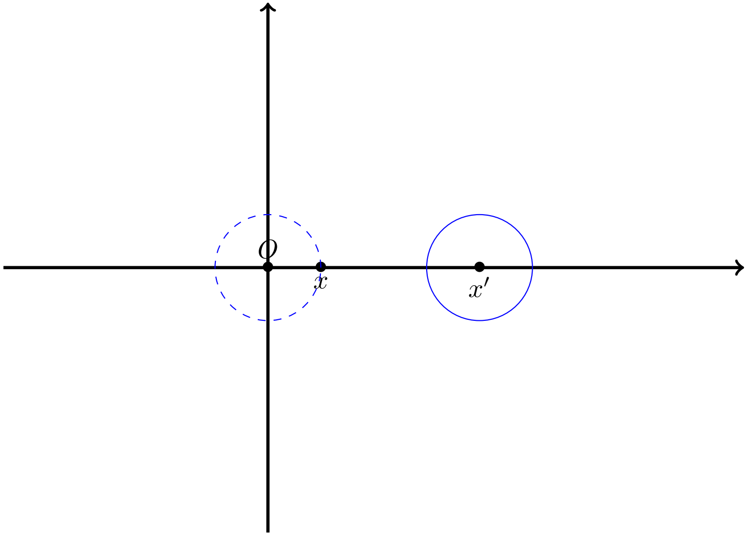
Addition de deux nombres constructibles



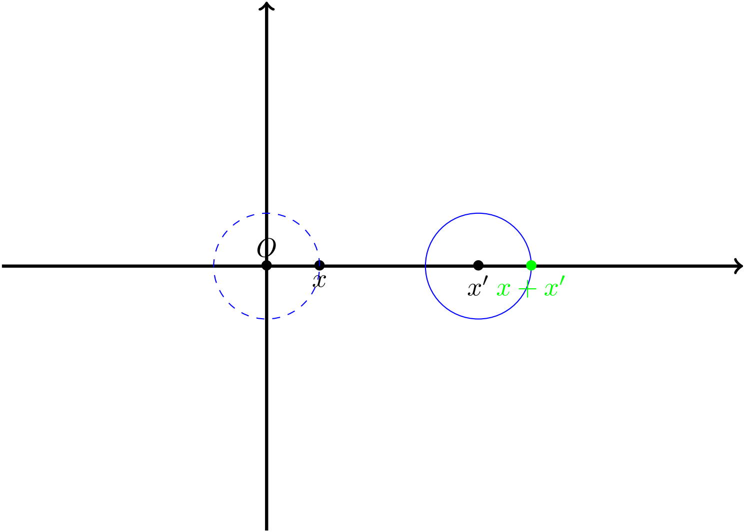
Addition de deux nombres constructibles



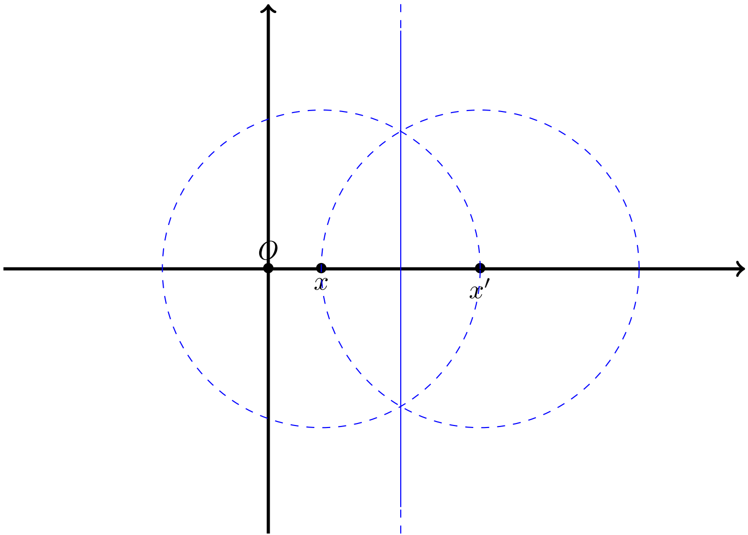
Addition de deux nombres constructibles



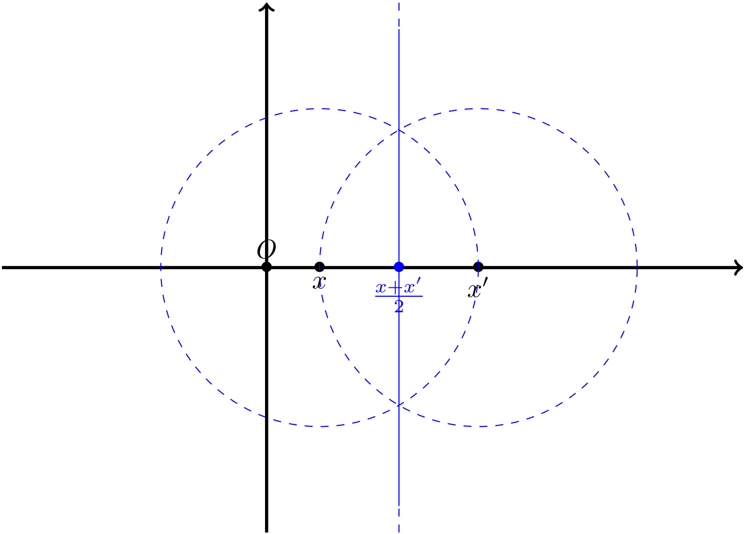
Addition de deux nombres constructibles



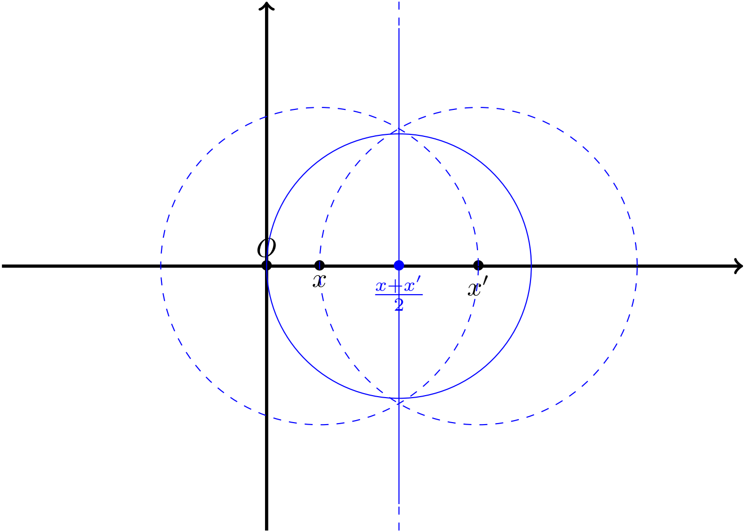
Addition de deux nombres constructibles



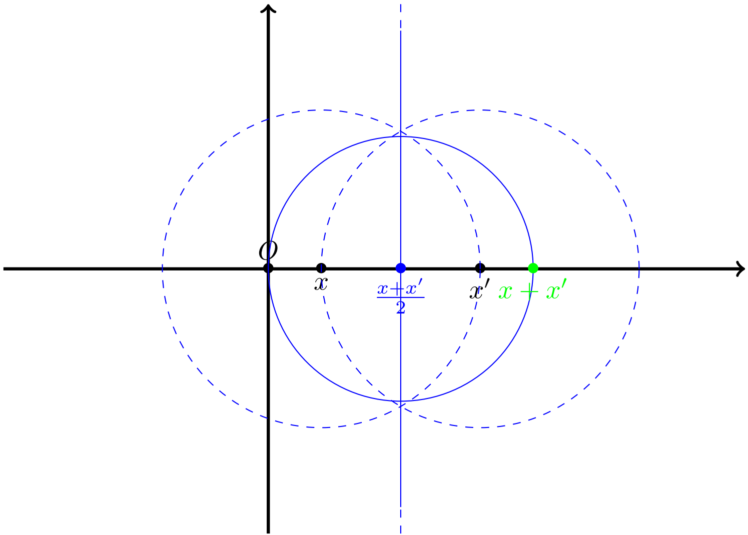
Addition de deux nombres constructibles



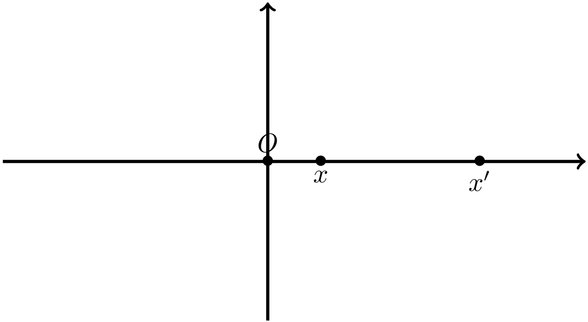
Addition de deux nombres constructibles



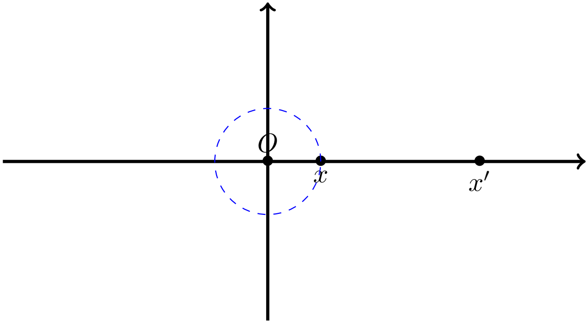
Addition de deux nombres constructibles



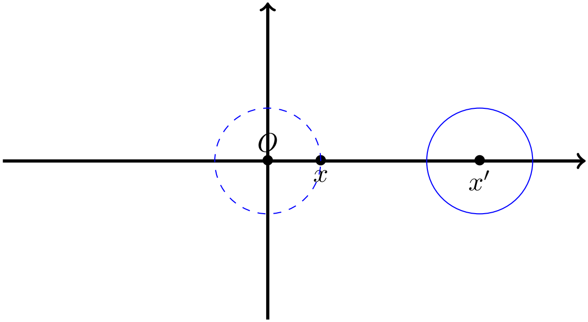
Différence de deux nombres constructibles



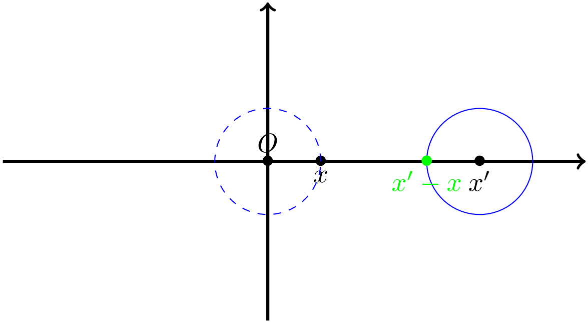
Différence de deux nombres constructibles



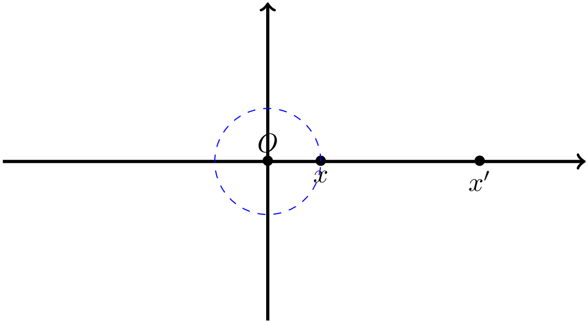
Différence de deux nombres constructibles



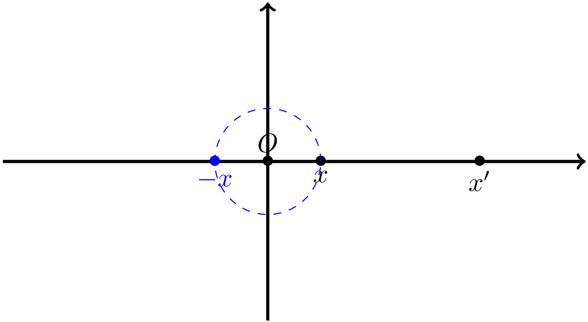
Différence de deux nombres constructibles



Différence de deux nombres constructibles

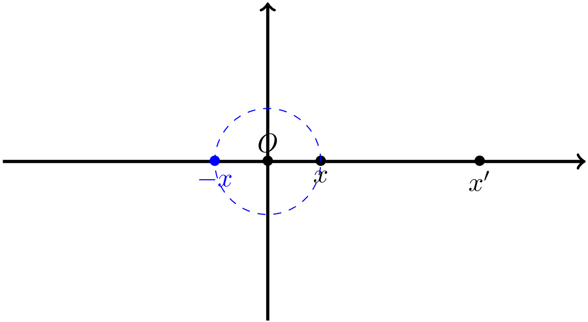


Différence de deux nombres constructibles



Ainsi, l'opposé $-x$ d'un nombre constructible est constructible.

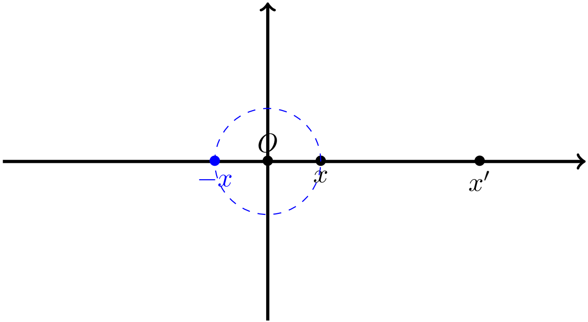
Différence de deux nombres constructibles



Ainsi, l'opposé $-x$ d'un nombre constructible est constructible.

De plus, on sait additionner deux nombres constructibles.

Différence de deux nombres constructibles

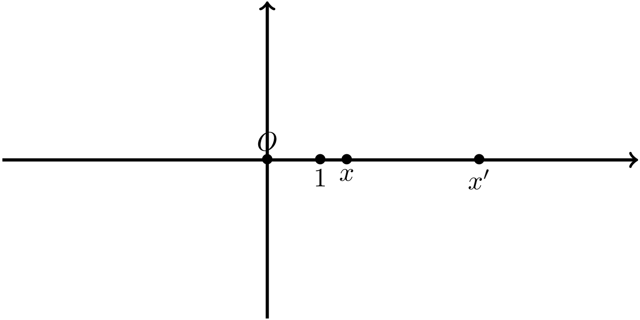


Ainsi, l'opposé $-x$ d'un nombre constructible est constructible.

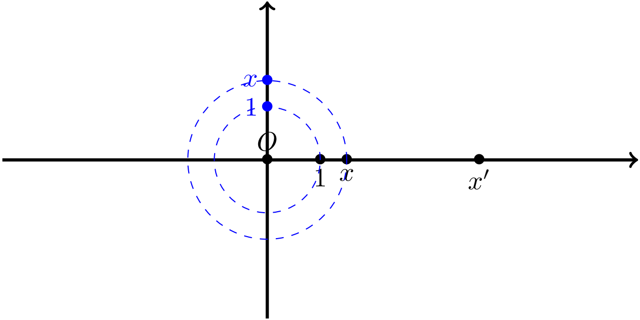
De plus, on sait additionner deux nombres constructibles.

Donc, $x' - x = x' + (-x)$ est constructible.

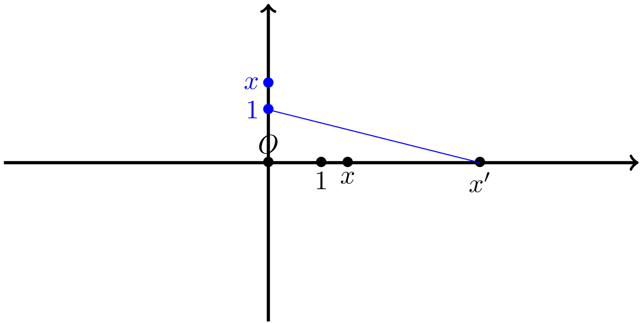
Multiplication de deux nombres constructibles



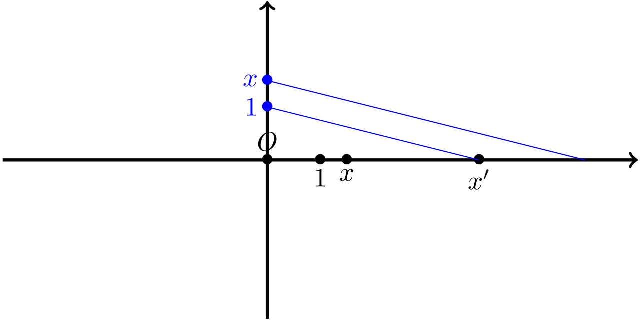
Multiplication de deux nombres constructibles



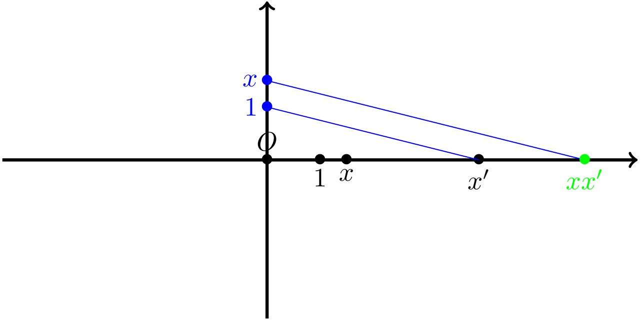
Multiplication de deux nombres constructibles



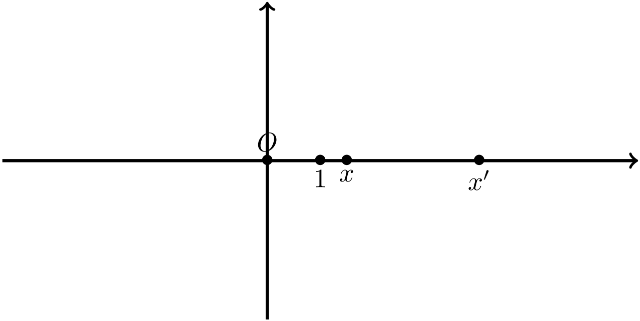
Multiplication de deux nombres constructibles



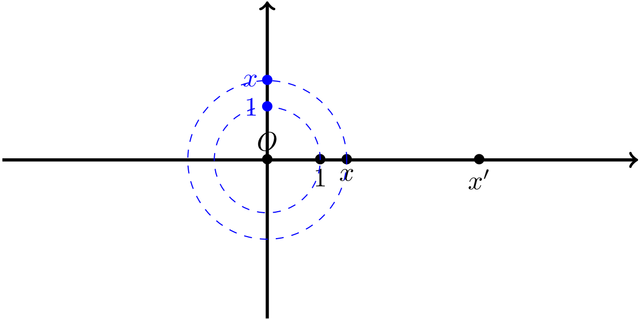
Multiplication de deux nombres constructibles



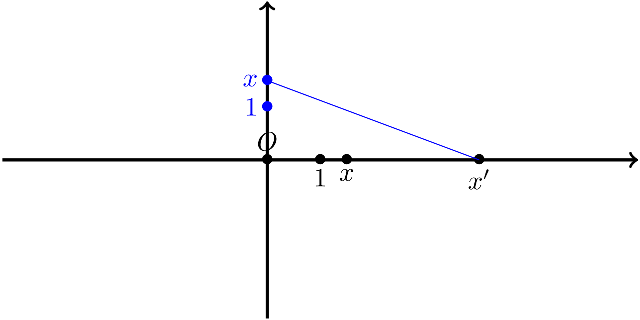
Quotient de deux nombres constructibles $\frac{x'}{x}$, $x \neq 0$



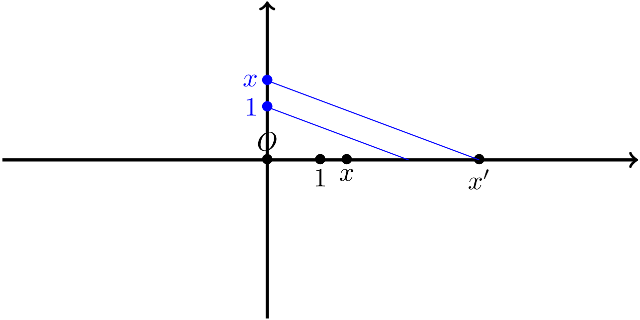
Quotient de deux nombres constructibles $\frac{x'}{x}$, $x \neq 0$



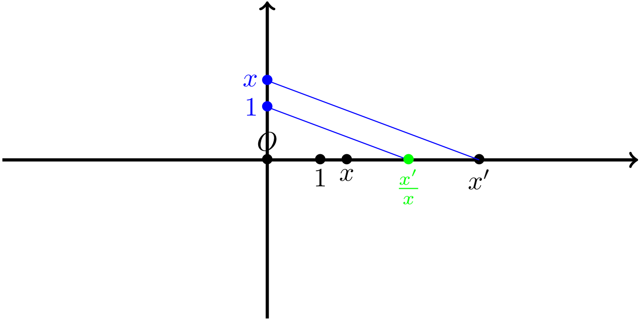
Quotient de deux nombres constructibles $\frac{x'}{x}$, $x \neq 0$



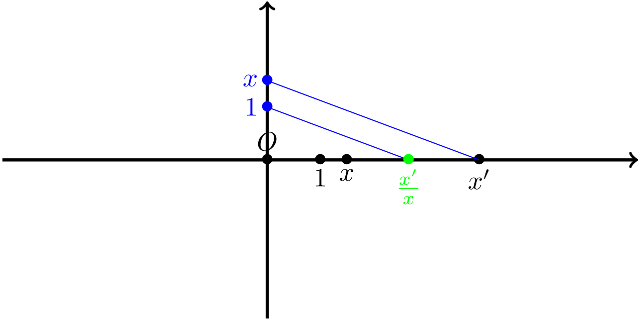
Quotient de deux nombres constructibles $\frac{x'}{x}$, $x \neq 0$



Quotient de deux nombres constructibles $\frac{x'}{x}$, $x \neq 0$



Quotient de deux nombres constructibles $\frac{x'}{x}$, $x \neq 0$



En particulier, l'inverse d'un nombre constructible (non nul) est constructible.

Quelques ensembles de nombres constructibles

- $\mathbf{N}$: l'ensemble des entiers naturels

Quelques ensembles de nombres constructibles

- $\mathbf{N}$: l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbf{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs

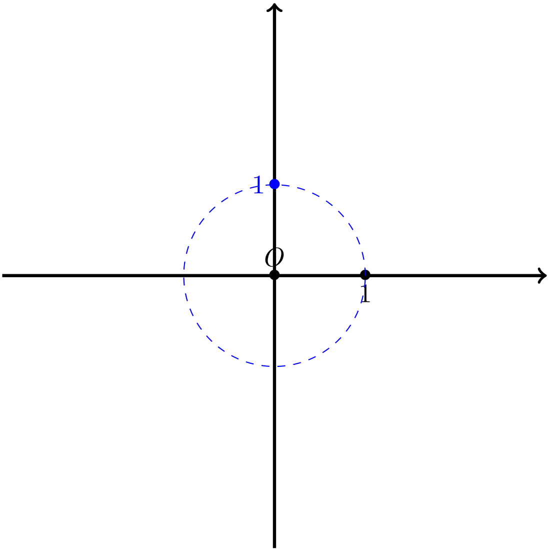
Quelques ensembles de nombres constructibles

- $\mathbf{N}$: l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbf{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs
- $\mathbf{Q}$: l'ensemble des rationnels

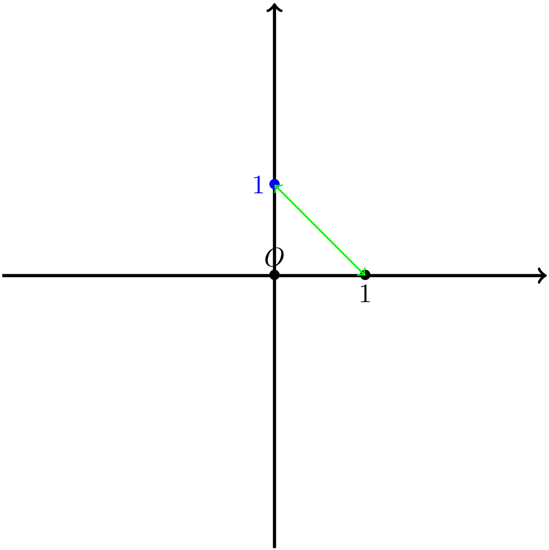
$\sqrt{2}$ est-elle constructible ?

Qu'en pensez-vous ?

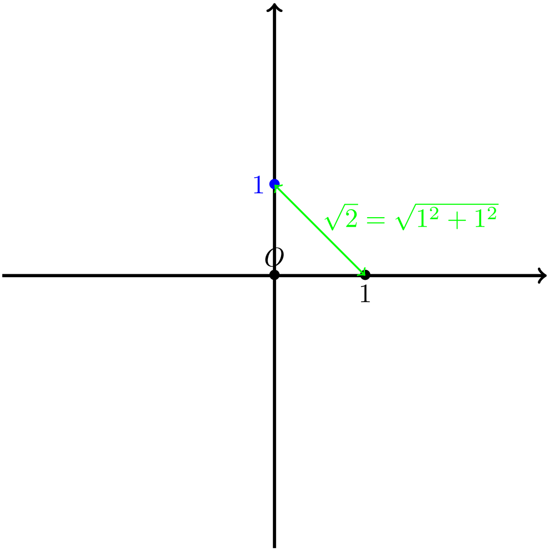
$\sqrt{2}$ est-elle constructible ?



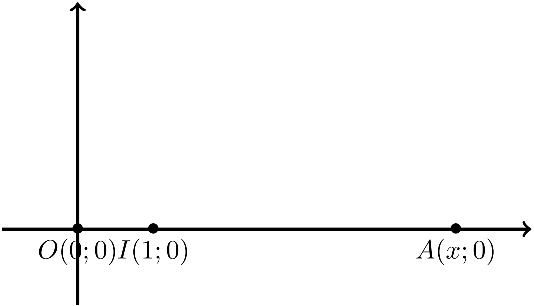
$\sqrt{2}$ est-elle constructible ?



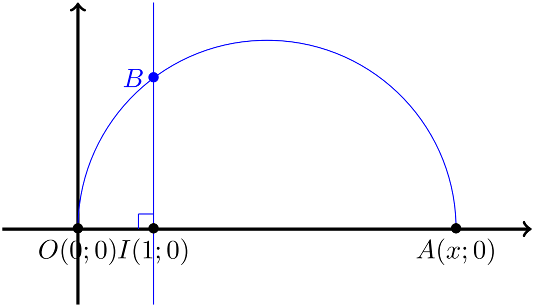
$\sqrt{2}$ est-elle constructible ?



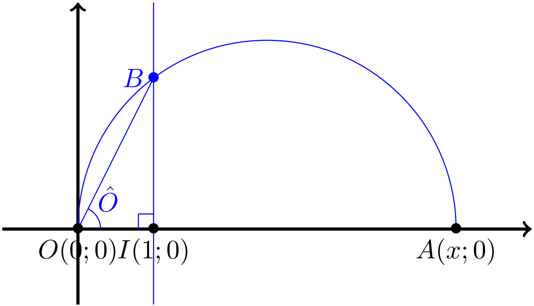
Construction de $\sqrt{x}$, $x > 1$ constructible



Construction de $\sqrt{x}$, $x > 1$ constructible



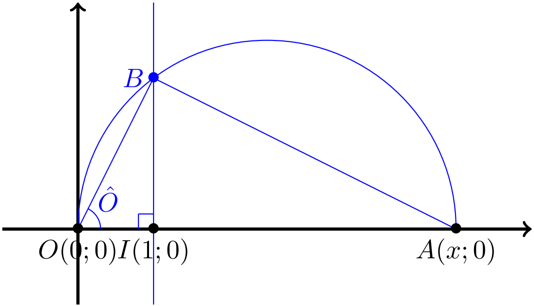
Construction de $\sqrt{x}$, $x > 1$ constructible



On a :

$$\cos(\hat{O}) = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{OB}$$

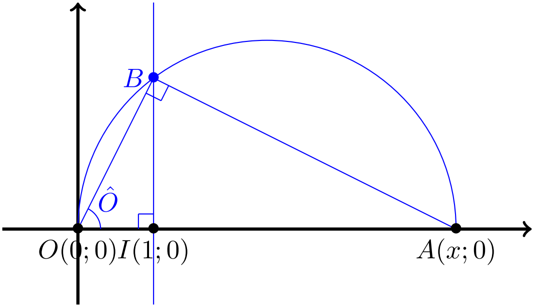
Construction de $\sqrt{x}$, $x > 1$ constructible



On a :

$$\cos(\hat{O}) = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{OB}$$

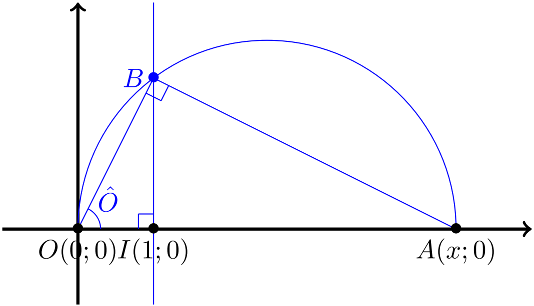
Construction de $\sqrt{x}$, $x > 1$ constructible



On a :

$$\cos(\hat{O}) = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{OB}$$

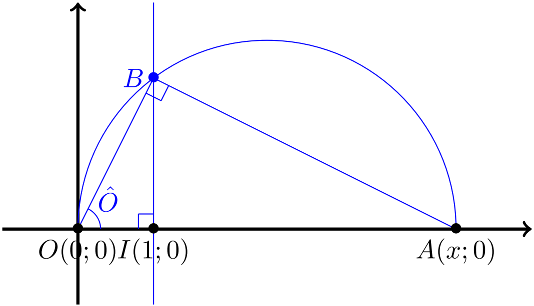
Construction de $\sqrt{x}$, $x > 1$ constructible



On a :

$$\cos(\hat{O}) = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{OB} \qquad \text{et} \qquad \cos(\hat{O}) = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{x}$$

Construction de $\sqrt{x}$, $x > 1$ constructible



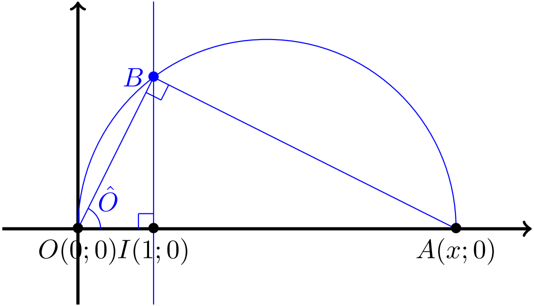
On a :

$$\cos(\hat{O}) = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{OB} \qquad \text{et} \qquad \cos(\hat{O}) = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{x}$$

donc

$$\frac{1}{OB} = \frac{OB}{x}$$

Construction de $\sqrt{x}$, $x > 1$ constructible



On a :

$$\cos(\hat{O}) = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{OB} \qquad \text{et} \qquad \cos(\hat{O}) = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{x}$$

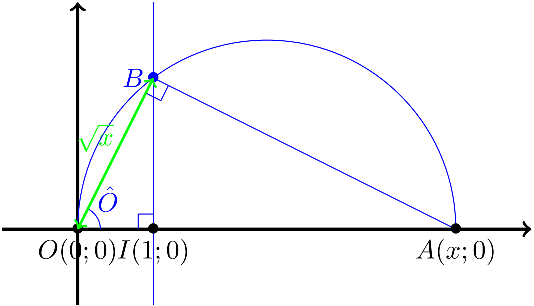
donc

$$\frac{1}{OB} = \frac{OB}{x}$$

soit

$$OB^2 = x$$

Construction de $\sqrt{x}$, $x > 1$ constructible



On a :

$$\cos(\hat{O}) = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{OB} \qquad \text{et} \qquad \cos(\hat{O}) = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{x}$$

donc

$$\frac{1}{OB} = \frac{OB}{x}$$

soit

$$OB^2 = x$$

donc

$$OB = \sqrt{x}$$

Constructibilité de $\sqrt{x}$, $x \in]0, 1[$ constructible

Constructibilité de $\sqrt{x}$, $x \in]0, 1[$ constructible

- Si $x \in]0, 1[$ est constructible, alors $\frac{1}{x} > 1$ est constructible (car l'inverse d'un nombre constructible non nul est constructible).

Constructibilité de $\sqrt{x}$, $x \in]0, 1[$ constructible

- Si $x \in]0, 1[$ est constructible, alors $\frac{1}{x} > 1$ est constructible (car l'inverse d'un nombre constructible non nul est constructible).

- Ainsi, $\sqrt{\frac{1}{x}}$ est constructible grâce à la démarche précédente.

Constructibilité de $\sqrt{x}$, $x \in]0,1[$ constructible

- Si $x \in]0,1[$ est constructible, alors $\frac{1}{x} > 1$ est constructible (car l'inverse d'un nombre constructible non nul est constructible).

- Ainsi, $\sqrt{\frac{1}{x}}$ est constructible grâce à la démarche précédente.

- Puisque $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et puisque l'inverse d'un nombre constructible non nul est constructible, $\sqrt{x}$ est constructible.

Duplication du cube : $\sqrt[3]{2}$ est-elle constructible ?

Qu'en pensez-vous ?

Duplication du cube : $\sqrt[3]{2}$ est-elle constructible ?

Les trois grands problèmes de l'Antiquité :

Duplication du cube : $\sqrt[3]{2}$ est-elle constructible ?

Les trois grands problèmes de l'Antiquité :

- Duplication du cube

Duplication du cube : $\sqrt[3]{2}$ est-elle constructible ?

Les trois grands problèmes de l'Antiquité :

- Duplication du cube
- Trisection de l'angle

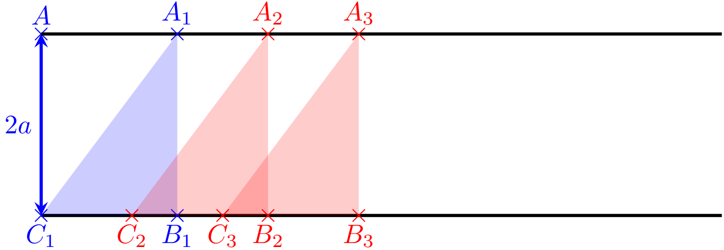
Duplication du cube : $\sqrt[3]{2}$ est-elle constructible ?

Les trois grands problèmes de l'Antiquité :

- Duplication du cube
- Trisection de l'angle
- Quadrature du cercle

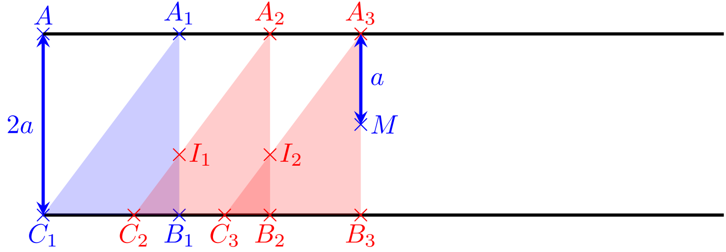
Duplication du cube : $\sqrt[3]{2}$ est-elle constructible ?

Mésolabe d'Eratosthene



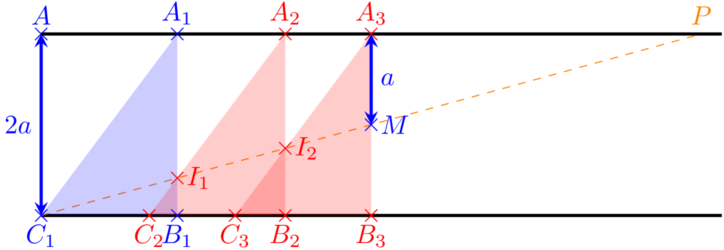
$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ sont superposables ; $A_1B_1C_1$ est fixe.

Mésolabe d'Eratosthene



On déplace les triangles rouges pour aligner C_1, I_1, I_2 et M.

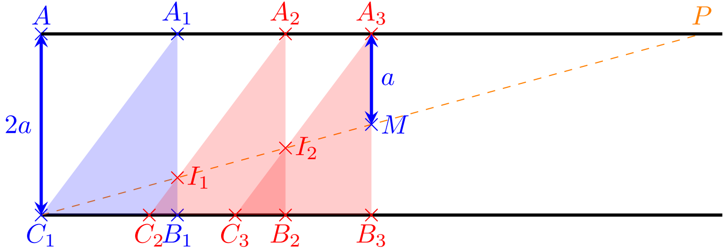
Mésolabe d'Eratosthene



On observe que :

$$\frac{A_2I_2}{A_3M} = \frac{PA_2}{PA_3} = \frac{PI_1}{PI_2} = \frac{A_1I_1}{A_2I_2} = \frac{PA_1}{PA_1} = \frac{PC_1}{PI_1} = \frac{AC_1}{A_1I_1}$$

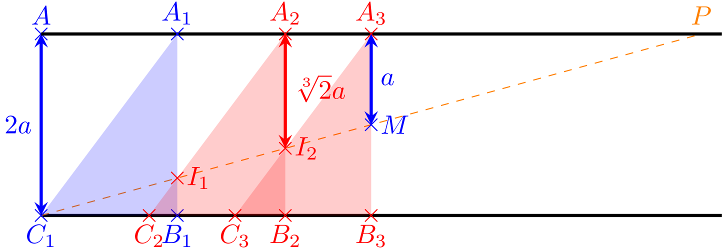
Mésolabe d'Eratosthene



et donc

$$\left(\frac{A_2I_2}{A_3M}\right)^3 = \frac{A_2I_2}{A_3M}\,\frac{A_1I_1}{A_2I_2}\,\frac{AC_1}{A_1I_1} = \frac{AC_1}{A_3M} = 2.$$

Mésolabe d'Eratosthene



et donc

$$\left(\frac{A_2I_2}{A_3M}\right)^3 = \frac{A_2I_2}{A_3M}\,\frac{A_1I_1}{A_2I_2}\,\frac{AC_1}{A_1I_1} = \frac{AC_1}{A_3M} = 2.$$

On réalise ainsi la duplication du cube et la construction de $\sqrt[3]{2}$

Théorème de Wantzel (1837) et quelques conséquences

Théorème

Le nombre réel x est constructible si et seulement s'il existe une suite finie de corps L_i telle que

1. $L_0 = \mathbf{Q}$;
2. L_{i+1} est une extension quadratique de L_i pour $0 \leq i \leq n-1$;
3. le réel x appartient à L_n.

Théorème de Wantzel (1837) et quelques conséquences

Théorème

Le nombre réel x est constructible si et seulement s'il existe une suite finie de corps L_i telle que

1. $L_0 = \mathbf{Q}$;
2. L_{i+1} est une extension quadratique de L_i pour $0 \leq i \leq n-1$;
3. le réel x appartient à L_n.

Corollaire

Pour qu'un nombre soit constructible, il est nécessaire que le degré du polynôme de plus petit degré parmi tous les polynômes à coefficients dans $\mathbf{Q}$ s'annulant en x (polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ de x) soit une puissance de 2.

Théorème de Wantzel (1837) et quelques conséquences

Théorème

Le nombre réel x est constructible si et seulement s'il existe une suite finie de corps L_i telle que

1. $L_0 = \mathbf{Q}$;
2. L_{i+1} est une extension quadratique de L_i pour $0 \leq i \leq n-1$;
3. le réel x appartient à L_n.

Corollaire

Pour qu'un nombre soit constructible, il est nécessaire que le degré du polynôme de plus petit degré parmi tous les polynômes à coefficients dans $\mathbf{Q}$ s'annulant en x (polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ de x) soit une puissance de 2.

$\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.