Intégrabilité quantique de certaines chaînes de spins et théories de champs conformes

Outline

1. Systèmes quantiques
   - Ondes↔particules
   - Équation de Schrödinger
   - Chaîne de Spins
2. Integrabilité des chaînes de spins *XXX*
   - "Coordinate Bethe Ansatz"
   - "Wronskian Bethe Ansatz"
   - Completude
3. Perspectives
   - Intégrabilité
   - Équations fonctionelles
   - Observables physiques

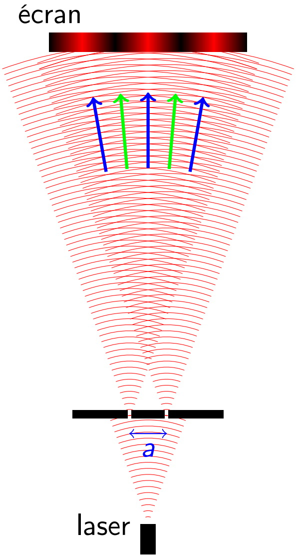
Fentes de Young : caractère ondulatoire de la lumière

L'écran présente une alternance de franges sombres et de franges éclairées.

- Angle multiple de λ/a : ondes en phase

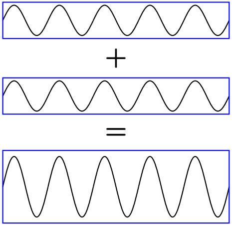
- Angle $\frac{2k+1}{2}\frac{\lambda}{a}$: opposition de phase

Fentes de Young : caractère ondulatoire de la lumière

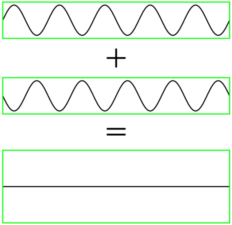


L'écran présente une alternance de franges sombres et de franges éclairées.

- Angle multiple de λ/a : ondes en phase



- Angle $\frac{2k+1}{2}\frac{\lambda}{a}$: opposition de phase



Ondes / particules

Lumière $\longrightarrow$ Onde

Matière (électrons, neutrons, protons) $\longrightarrow$ Particules

- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence)
  $\rightsquigarrow$ quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
  - $\rightarrow$ Particule lumineuse : "photon"
  - $\rightarrow$ Physique "quantique"
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :

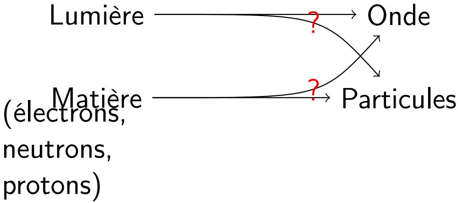
Ondes / particules

$$\begin{tikzcd} \text{Lumière} \arrow[r] \arrow[dr, bend left, "?"] & \text{Onde} \\ \text{Matière} \arrow[r] & \text{Particules} \end{tikzcd}$$

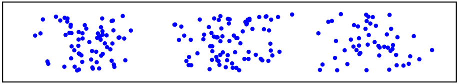
(électrons, neutrons, protons)

- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence)
  $\rightsquigarrow$ quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
  - $\rightarrow$ Particule lumineuse : “photon”
  - $\rightarrow$ Physique “quantique”
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :

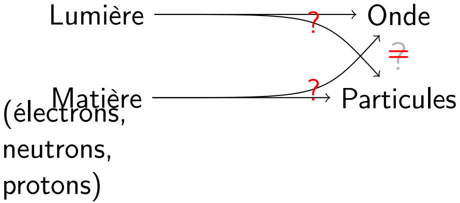
Ondes / particules



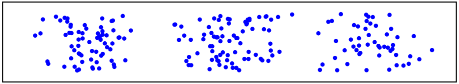
- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence)
  $\rightsquigarrow$ quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
  - $\rightarrow$ Particule lumineuse : “photon”
  - $\rightarrow$ Physique “quantique”
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :



Dualité onde-particule

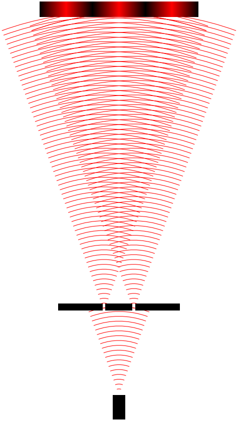


- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence)
  $\rightsquigarrow$ quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
  - $\rightarrow$ Particule lumineuse : "photon"
  - $\rightarrow$ Physique "quantique"
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :



Probabilités et fonction d'onde

Onde



Particule quantique

Densité de probabilité
$\rho(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2$
où $\psi(\vec{x})$ est la fonction d'onde

Systèmes quantiques

Description d'un système quantique :

- **États :** éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

  $\mathbb{C}$-ev + produit scalaire + completude

  Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

- **Observables :** opérateurs hermitiens sur $\mathcal{H}$.

  Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$.

Exemple : "fonction d'onde" comme dans les "fentes de Young"

- "fonction d'onde" $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$
- densité de probabilité $\rho(x) = |\psi(x)|^2$
- probabilité d'être dans $E \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_E] = \frac{\int \overline{\psi(x)} \mathbb{1}_E(x) \psi(x) \mathrm{d}x}{\|\psi\|^2_{L^2}}$

Systèmes quantiques

Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États :** éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  $\mathbb{C}$-ev + produit scalaire + completude
  Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- **Observables :** opérateurs hermitiens sur $\mathcal{H}$.
  Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$.

Exemple : "fonction d'onde" comme dans les "fentes de Young"

- "fonction d'onde" $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$
- densité de probabilité $\rho(x) = |\psi(x)|^2$
- probabilité d'être dans $E \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_E] = \frac{\int \overline{\psi(x)} \mathbb{1}_E(x)\psi(x)\mathrm{d}x}{\|\psi\|^2_{L^2}}$

Systèmes quantiques — Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États :** éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  $\mathbb{C}$-ev + produit scalaire + completude
  Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- **Observables :** opérateurs hermitiens sur $\mathcal{H}$.
  Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$.

Exemple : "fonction d'onde" comme dans les "fentes de Young"

- "fonction d'onde" $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$
- densité de probabilité $\rho(x) = |\psi(x)|^2$
- probabilité d'être dans $E \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_E] = \frac{\int \overline{\psi(x)} \mathbb{1}_E(x) \psi(x) \mathrm{d}x}{\|\psi\|^2_{L^2}}$

Systèmes quantiques

Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États :** éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  $\mathbb{C}$-ev + produit scalaire + completude
  Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- **Observables :** opérateurs hermitiens sur $\mathcal{H}$.
  Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$.

Exemple : "fonction d'onde" comme dans les "fentes de Young"

- "fonction d'onde" $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$
- densité de probabilité $\rho(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{\int |\psi(x)|^2}$
- probabilité d'être dans $E \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad \mathbb{E}[\mathbb{1}_E] = \frac{\int \overline{\psi(x)}\mathbb{1}_E(x)\psi(x)\mathrm{d}x}{\|\psi\|^2_{L^2}}$

Systèmes quantiques

Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États :** éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

  $\mathbb{C}$-ev + produit scalaire + completude

  Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

- **Observables :** opérateurs hermitiens sur $\mathcal{H}$.
  Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$.

Exemple : "fonction d'onde" comme dans les "fentes de Young"

- "fonction d'onde" $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$
- densité de probabilité $\rho(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{\int |\psi(x)|^2}$
- probabilité d'être dans $E \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad \mathbb{E}[\mathbb{1}_E] = \frac{\int \overline{\psi(x)} \mathbb{1}_E(x) \psi(x) \mathrm{d}x}{\|\psi\|^2_{L^2}}$

Systèmes quantiques — Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États :** éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  $\mathbb{C}$-ev + produit scalaire + completude
  Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- **Observables :** opérateurs hermitiens sur $\mathcal{H}$.
  Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$.
- **Évolution :** $i\frac{\partial}{\partial_t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$,
  où le *Hamiltonien* H est un opérateur Hermitien sur $\mathcal{H}$.
  $\rightsquigarrow \quad \frac{\partial}{\partial_t}\|\psi\| = 0$

Systèmes quantiques

Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États :** éléments de $\mathcal{H}/\sim$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $\sim$ est la colinéarité.
  Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- **Observables :** opérateurs hermitiens sur $\mathcal{H}$.
  Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$.
- **Évolution :** $i\frac{\partial}{\partial_t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$,
  où le *Hamiltonien* H est un opérateur Hermitien sur $\mathcal{H}$.

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\partial}{\partial_t}\|\psi\| = 0$$

Systèmes quantiques — Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États :** éléments de $\mathcal{H}/\sim$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $\sim$ est la colinéarité.
  Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- **Observables :** opérateurs hermitiens sur $\mathcal{H}$.
  Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$.
- **Évolution :** $i\frac{\partial}{\partial_t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$,
  où le *Hamiltonien* H est un opérateur Hermitien sur $\mathcal{H}$.

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\partial}{\partial_t}\|\psi\| = 0$$

On s'intéressera ici à diagonaliser le Hamiltonien H :
Ses valeurs propres sont les *énergies* des *états propres* du système

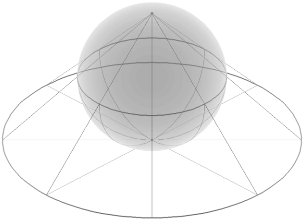
Spin Quantique

Spin : objet quantique pointant dans une direction

"Directions" : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2/\sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \binom{1}{0} \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \binom{0}{1} \in \mathbb{C}^2$.

Direction arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$



Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ $(\dim \mathcal{H} = 2^L)$.

Exemple : si $L = 3$, c'est

$\mathrm{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$

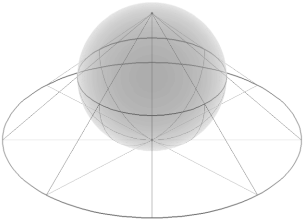
Spin Quantique

Spin : objet quantique pointant dans une direction

"Directions" : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2/\sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \binom{1}{0} \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \binom{0}{1} \in \mathbb{C}^2$.

Direction arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$



Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ $(\dim \mathcal{H} = 2^L)$.

Exemple : si $L = 3$, c'est

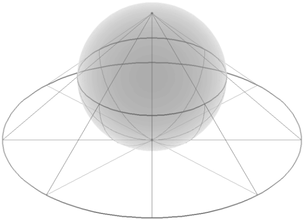
Spin Quantique

Spin : objet quantique pointant dans une direction

"Directions" : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2/\sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$.

Direction arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$



Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ $(\dim \mathcal{H} = 2^L)$.

Exemple : si $L = 3$, c'est

Chaîne de spins

Spin : objet quantique pointant dans une direction

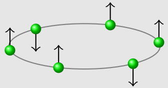
"Directions" : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2/\sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$.

Direction arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$

Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ $(\dim \mathcal{H} = 2^L)$.



Exemple : si $L = 3$, c'est
$\mathrm{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$.

Chaîne de spins "XXX" : Hamiltonien $H = -L - \sum_{i=1}^{L} \vec{\sigma_i} \cdot \vec{\sigma_{i+1}}$
où $\vec{\sigma_i} \cdot \vec{\sigma_{i+1}} \equiv \sum_{k=1}^{3} \sigma_i^{(k)} \sigma_{i+1}^{(k)}$; $\sigma_i^{(k)}$ est $\sigma^{(k)}$ agissant sur le i$^{\text{ème}}$ spin, et $\sigma^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix}0&-i\\i&0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma^{(3)} = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$.
Périodicité : On identifie $\sigma_{L+1} = \sigma_1$.

Chaîne de spins

Spin : objet quantique pointant dans une direction

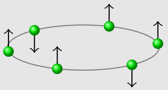
"Directions" : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2/\sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$.

Direction arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$

Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ $(\dim \mathcal{H} = 2^L)$.



Exemple : si $L = 3$, c'est
$\mathrm{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$.

Chaîne de spins "XXX" : Hamiltonien $H = -L - \sum_{i=1}^{L} \vec{\sigma_i} \cdot \vec{\sigma_{i+1}}$
où $\vec{\sigma_i} \cdot \vec{\sigma_{i+1}} \equiv \sum_{k=1}^{3} \sigma_i^{(k)} \sigma_{i+1}^{(k)}$; $\sigma_i^{(k)}$ est $\sigma^{(k)}$ agissant sur le i$^{\text{ème}}$ spin, et $\sigma^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix}0&-i\\i&0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma^{(3)} = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$.

Périodicité : On identifie $\sigma_{L+1} = \sigma_1$.

Chaîne de spins

Spin : objet quantique pointant dans une direction

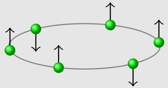
"Directions" : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2/\sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$.

Direction arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$

Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ $\qquad$ $(\dim \mathcal{H} = 2^L)$.



Exemple : si $L = 3$, c'est
$\mathrm{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$.

Chaîne de spins "XXX" : Hamiltonien $H = -L - \sum_{i=1}^{L} \vec{\sigma_i} \cdot \vec{\sigma_{i+1}}$
où $\vec{\sigma_i} \cdot \vec{\sigma_{i+1}} \equiv \sum_{k=1}^{3} \sigma_i^{(k)} \sigma_{i+1}^{(k)}$; $\sigma_i^{(k)}$ est $\sigma^{(k)}$ agissant sur le i$^{\text{ème}}$ spin, et $\sigma^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix}0&-i\\i&0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma^{(3)} = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$.

Périodicité : On identifie $\sigma_{L+1} = \sigma_1$.

Outline

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow\dots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow\dots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow\dots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow\dots}\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)\,|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H\,|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))\,|\{k\}\rangle.$

  états propres $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp}\,|\{k\}\rangle}$ où $e^{2ipL}=1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-j-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle}$

$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)})\,|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{iLp_2} = S = e^{-iLp_1}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow\ldots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow\ldots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)\,|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H\,|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))\,|\{k\}\rangle.$

  états propres $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L}=1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-j-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle}$

$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)})\,|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\uparrow}{\downarrow}\ldots\rangle = |{\uparrow}{\downarrow}{\downarrow}\ldots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\ldots\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\ldots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- “vide” : $|{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{k-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{L-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)\,|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H\,|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))\,|\{k\}\rangle.$

  états propres $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L}=1$

- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{j-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{k-j-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{L-j-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle}$

$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)})\,|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et S … $1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow}\dots\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow}\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow}\dots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)\,|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H\,|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))\,|\{k\}\rangle.$

  états propres $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L}=1$

- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-j-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$

$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)})\,|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|\downarrow\uparrow\downarrow\ldots\rangle = |\uparrow\downarrow\downarrow\ldots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|\downarrow\downarrow\uparrow\ldots\rangle = |\downarrow\downarrow\uparrow\ldots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_k \Psi(k)\,|\{k\}\rangle$
  $\Rightarrow H\,|\psi\rangle = -2\sum_k(\Psi(k+1)+\Psi(k-1)+(L-2)\Psi(k))\,|\{k\}\rangle.$

  états propres $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$

- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-j-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle}$

$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)})\,|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow\dots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow\dots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow\dots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow\dots}\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L}=1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-j-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\uparrow}{\downarrow}\ldots\rangle = |{\uparrow}{\downarrow}{\downarrow}\ldots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\ldots\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\ldots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{k-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{L-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{j-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{k-j-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{L-j-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle}$

$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H — pour la chaîne XXX

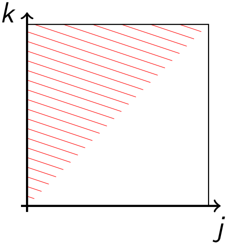
Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow\ldots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow\ldots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-k}\rangle$

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-j-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$
et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

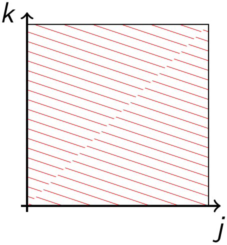
Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\uparrow}{\downarrow}\dots\rangle = |{\uparrow}{\downarrow}{\downarrow}\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\dots\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\dots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{k-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{L-k}\rangle$

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{j-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{k-j-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{L-j-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k + p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

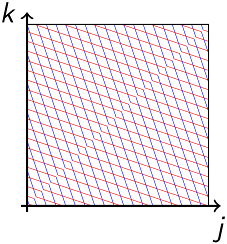
Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow\ldots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow\ldots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-k}\rangle$

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-j-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

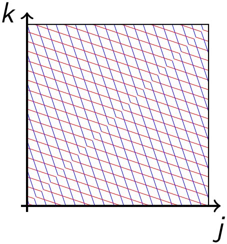
Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\uparrow}{\downarrow}\dots\rangle = |{\uparrow}{\downarrow}{\downarrow}\dots\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\dots\rangle = |{\downarrow}{\downarrow}{\uparrow}\dots\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{k-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{L-k}\rangle$

  $|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle$ où $e^{2i\,p\,L} = 1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{{\downarrow}{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{j-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{k-j-1}{\uparrow}\underbrace{{\downarrow}\cdots{\downarrow}}_{L-j-k}\rangle$

  $|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

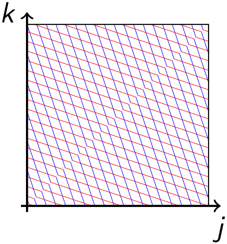
Notation : $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\uparrow\downarrow\ldots}\rangle = |{\uparrow\downarrow\downarrow\ldots}\rangle$ et $\mathcal{P}_{1,2}\,|{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle = |{\downarrow\downarrow\uparrow\ldots}\rangle$

$H = -2\sum_{i=1}^{L}\mathcal{P}_{i,i+1}$ **a pour états propres :**

- "vide" : $|{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}\rangle$ (valeur propre : $-2L$).
- états à une "excitation" : combinaisons de $|\{k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i\,k\,p}\,|\{k\}\rangle}$ où $e^{2i\,p\,L}=1$
- combinaisons de $|\{j,k\}\rangle = |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-j-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{L-j-k}\rangle$

  $\boxed{|\psi\rangle = \sum_{j,k}\Psi(j,k)\,|\{j,k\}\rangle}$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j<k}\left(e^{i(p_1 j+p_2 k)} + S\,e^{i(p_1 k+p_2 j)}\right)|\{j,k\}\rangle$$

avec $e^{i\,L\,p_2} = S = e^{-i\,L\,p_1}$

et $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

États à n "excitations"

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i\sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j_1-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j_2-j_1-1}\uparrow\downarrow\cdots\rangle$$

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j<k}\left(1+e^{i(p_{\sigma(j)}+p_{\sigma(k)})}-2e^{ip_{\sigma(k)}}\right)$

Équations de Bethe

- $\forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j,p_k)$ où $S(p,p')\equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$

Valeur propre : $E = -2L + 4\sum_k (1-\cos p_k)$

Completude : existence d'une base de vecteurs propres sous cette forme

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

États à n "excitations"

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i\sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j_1-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j_2-j_1-1}\uparrow\downarrow\cdots\rangle$$

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j<k} \left(1 + e^{i(p_{\sigma(j)}+p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}}\right)$

Équations de Bethe

- $\forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p,p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$

Valeur propre : $E = -2L + 4\sum_k (1-\cos p_k)$

Completude : existence d'une base de vecteurs propres sous cette forme

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

États à n "excitations"

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i\sum_k p_{\sigma(k)}j_k} |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j_1-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j_2-j_1-1}\uparrow\downarrow\cdots\rangle$$

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j<k} \left(1 + e^{i(p_{\sigma(j)}+p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}}\right)$

Équations de Bethe

- $\forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p,p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$

Valeur propre : $$E = -2L + 4\sum_k (1-\cos p_k)$$

Completude : existence d'une base de vecteurs propres sous cette forme

Vecteurs propres de H pour la chaîne XXX

États à n "excitations"

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i\sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j_1-1}\uparrow\underbrace{\downarrow\downarrow\cdots\downarrow}_{j_2-j_1-1}\uparrow\downarrow\cdots\rangle$$

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j<k} \left(1 + e^{i(p_{\sigma(j)}+p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}}\right)$

Équations de Bethe

- $\forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k\neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p,p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p}}{1+e^{i(p+p')}-2e^{i\,p'}}$

Valeur propre : $E = -2L + 4\sum_k (1-\cos p_k)$

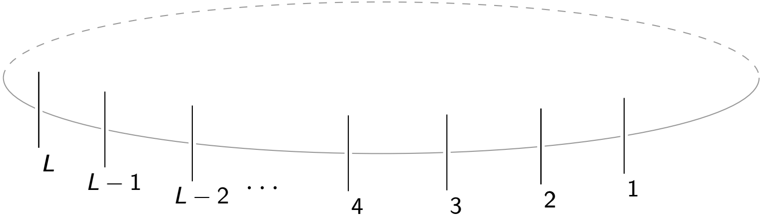
Completude : existence d'une base de vecteurs propres sous cette forme

Opérateurs T de la chaîne de Heisenberg

$$H = -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log T(u)\Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateur sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\;M\;(|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p\otimes\mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x,y\in\mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

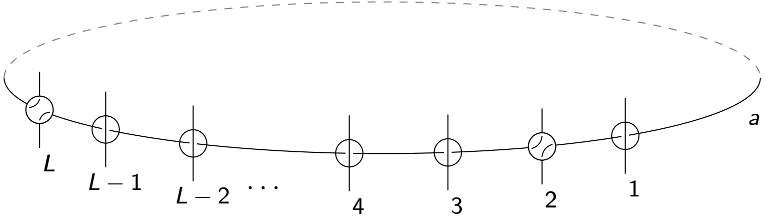
- $((u-v)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,j})(u\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,k})(v\mathbb{I}+\mathcal{P}_{j,k})$
  $= (v\mathbb{I}+\mathcal{P}_{j,k})(u\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,k})((u-v)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,j})$

Opérateurs T de la chaîne de Heisenberg

$$H = -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T(u)\Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\;M\;(|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p\otimes\mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x,y\in\mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

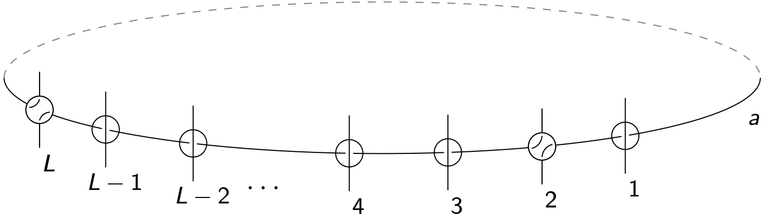
- $((u-v)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,j})(u\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,k})(v\mathbb{I}+\mathcal{P}_{j,k})$
  $= (v\mathbb{I}+\mathcal{P}_{j,k})(u\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,k})((u-v)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,j})$

Opérateurs T de la chaîne de Heisenberg

$$H = -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T(u)\Big|_{u=0}$$

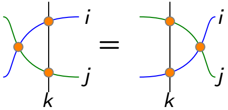
$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}$



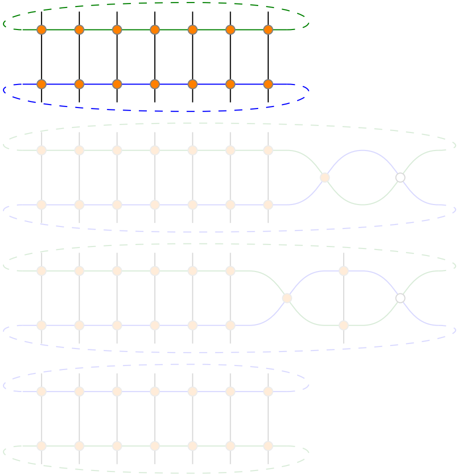
trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\;M\;(|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p\otimes\mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x,y\in\mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

- $((u-v)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,j})(u\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,k})(v\mathbb{I}+\mathcal{P}_{j,k})$
  $= (v\mathbb{I}+\mathcal{P}_{j,k})(u\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,k})((u-v)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{i,j})$



Commutation des operators T

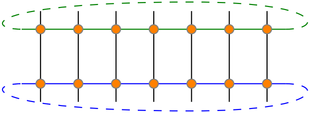
$T(v)T(u) =$



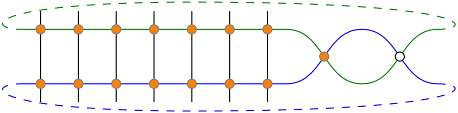
$= \;=\;=\; = T(u)T(v)$

Commutation des operators T

$T(v)T(u) =$



$=$



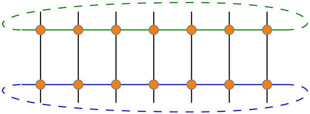
$=$

$=$

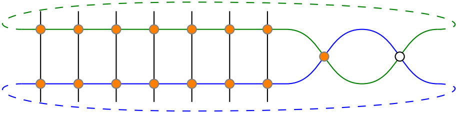
$= T(u)T(v)$

Commutation des operators T

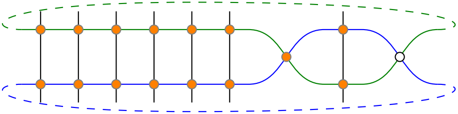
$T(v)T(u) =$



$=$



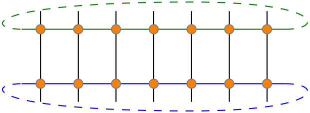
$=$

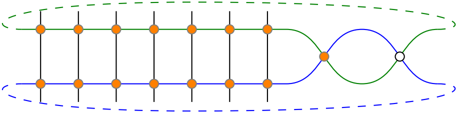


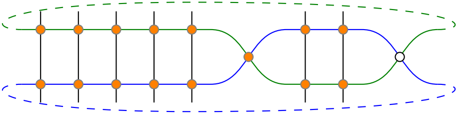
$=$

$= T(u)T(v)$

Commutation des operators T

$T(v)T(u) =$ 

$=$ 

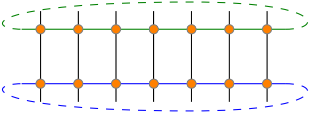
$=$ 

$=$

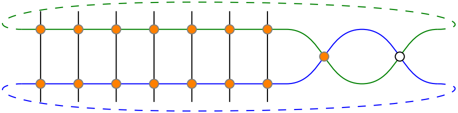
$= T(u)T(v)$

Commutation des operators T

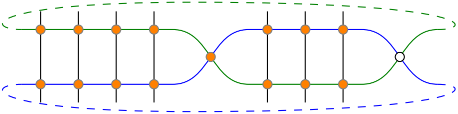
$T(v)T(u) =$



$=$



$=$

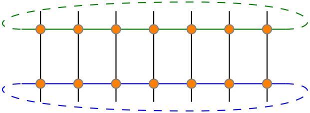


$=$

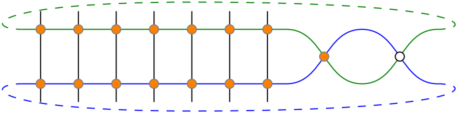
$= T(u)T(v)$

Commutation des operators T

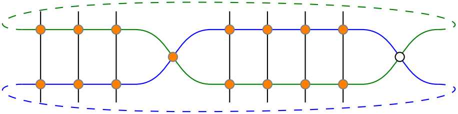
$T(v)T(u) =$



$=$



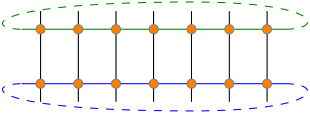
$=$

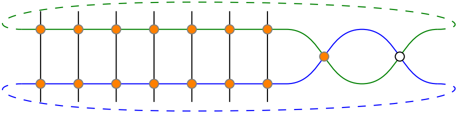


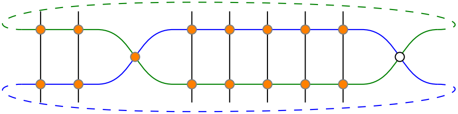
$=$

$= T(u)T(v)$

Commutation des operators T

$T(v)T(u) =$ 

$=$ 

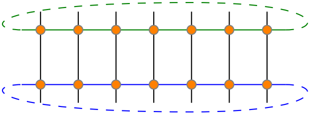
$=$ 

$=$

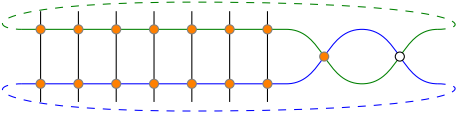
$= T(u)T(v)$

Commutation des operators T

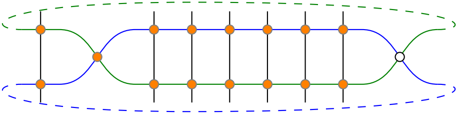
$T(v)T(u) =$



$=$



$=$

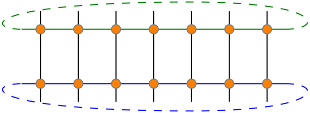


$=$

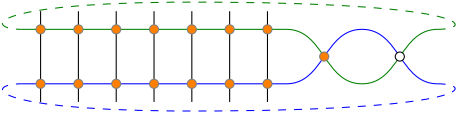
$= T(u)T(v)$

Commutation des operators T

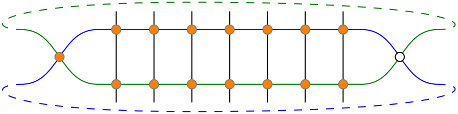
$T(v)T(u) =$



$=$



$=$

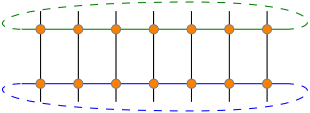


$=$

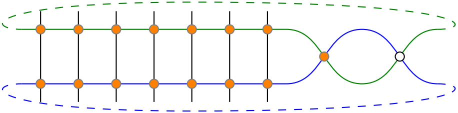
$= T(u)T(v)$

Commutation des operators T

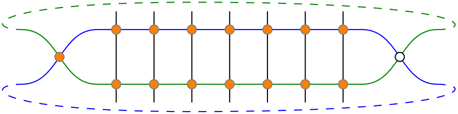
$T(v)T(u) =$



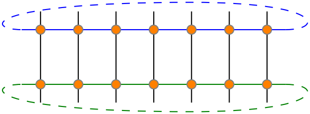
$=$



$=$



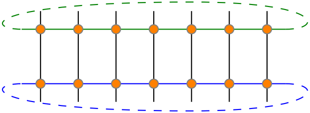
$=$



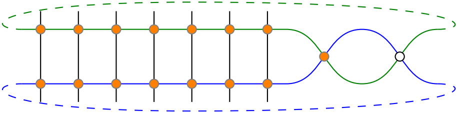
$= T(u)T(v)$

Commutation des operators T

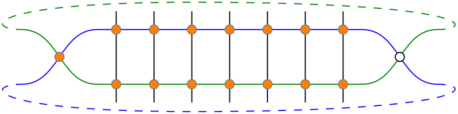
$T(v)T(u) =$



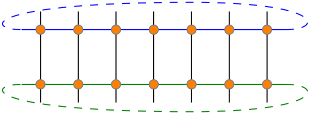
$=$



$=$



$=$



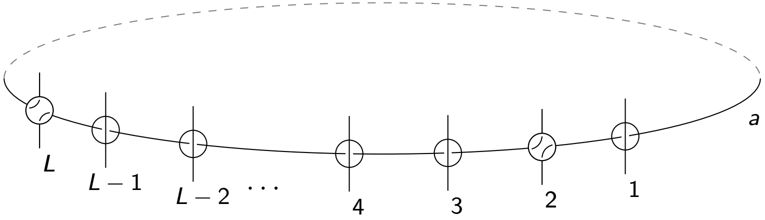
$= T(u)T(v)$

Opérateurs T de la chaîne de Heisenberg

$$H = -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T(u)\Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\ M\ (|x\rangle\otimes|z\rangle)$

où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

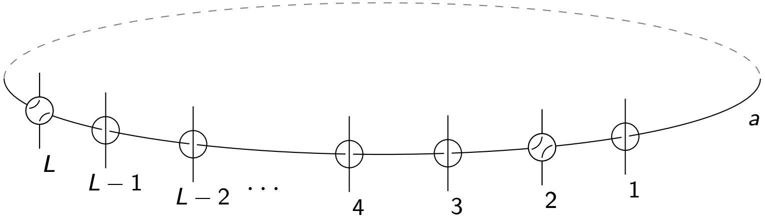
- $\left[T\ (u), T\ (v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\log T(u)\Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I}+\mathcal{P}_{1,a})\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^{K}\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\ M\ (|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p\otimes\mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x,y\in\mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

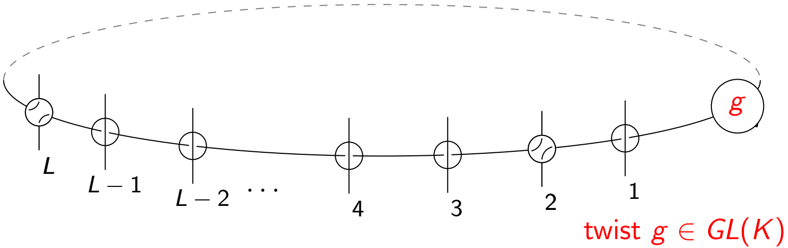
- $\left[T\ (u), T\ (v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = \text{«} -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} \text{»} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} \log T(u)\big|_{u=0}$$

$$T(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot g\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^K\right)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y|\,\mathrm{tr}_a M\,|x\rangle = \sum_{z\in\mathcal{B}_a}(\langle y|\otimes\langle z|)\ M\ (|x\rangle\otimes|z\rangle)$
où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\mathrm{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; $\mathcal{B}_a$: b.o.n. de $\mathcal{H}_a$.

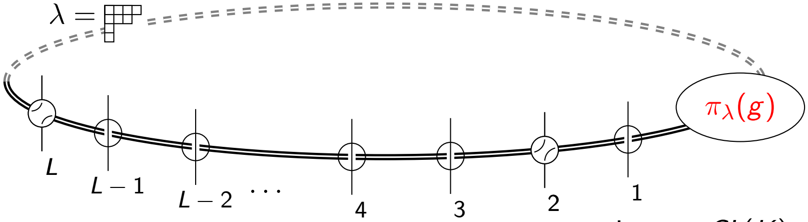
- $\left[T\ (u), T\ (v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = \text{«} -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} \text{»} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log T^{\square}(u)\Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\cdot\pi_\lambda(g)\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^K\right)^{\otimes L}$



twist $g \in GL(K)$

Operateur de permutation géneralisé : $\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e^{(i)}_{\alpha,\beta} \otimes \pi_\lambda(e^{(j)}_{\beta,\alpha})$

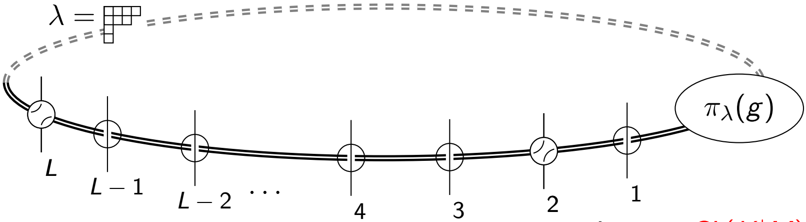
- $\left[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = « -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} » = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} \log T^{\square}(u)\Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \mathrm{tr}_a\left((u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a})\cdot(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a})\cdots(u\,\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a})\cdot\pi_\lambda(g)\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^{K|M}\right)^{\otimes L}$



twist $g \in GL(K|M)$

Operateur de permutation géneralisé : $\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e^{(i)}_{\alpha,\beta} \otimes \pi_\lambda(e^{(j)}_{\beta,\alpha})$

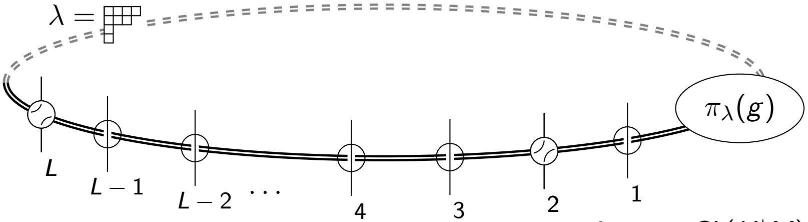
- $\left[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = \text{«} -2\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} \text{»} = -2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log T^{\square}(u)\Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \mathrm{tr}_a\left(((u-\xi_L)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{L,a})\cdots((u-\xi_1)\mathbb{I}+\mathcal{P}_{1,a})\cdot\pi_\lambda(g)\right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^{K|M}\right)^{\otimes L}$



twist $g \in GL(K|M)$

Operateur de permutation géneralisé : $\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e^{(i)}_{\alpha,\beta} \otimes \pi_\lambda(e^{(j)}_{\beta,\alpha})$

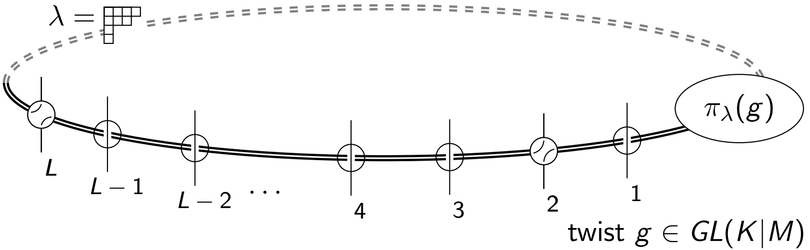
- $\left[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)\right] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = « -2 \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} » = -2 \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} \log T^{\square}(u)\Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \mathrm{tr}_a \left(((u-\xi_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u-\xi_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $\left(\mathbb{C}^{K|M}\right)^{\otimes L}$



- $\left[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)\right] = 0$
- représentation de dimension infinie $\rightsquigarrow$ Operateurs Q.
  $[Q_{12\ldots}(u), Q_{13\ldots}(v)] = 0$ $\qquad$ $[Q_{12\ldots}(u), T^{\lambda}(v)] = 0$

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{123} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_3(u-1)/x_3 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$

  for twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanée de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftrightarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{ip}}{1-e^{ip}}$)

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $Q_{123} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_3(u-1)/x_3 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$
  for twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$

- Une base d'états propres simultanée de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftrightarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{i\,p}}{1-e^{i\,p}}$)

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{123} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_3(u-1)/x_3 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$
  for twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanée de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftrightarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{ip}}{1-e^{ip}}$)

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{123} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_3(u-1)/x_3 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$
  for twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \dots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \dots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanée de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftrightarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{ip}}{1-e^{ip}}$)

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{123} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_3(u-1)/x_3 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$
  for twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \cdots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \cdots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanée de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftrightarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{ip}}{1-e^{ip}}$)

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{123} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_3(u-1)/x_3 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$
  for twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \cdots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \cdots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanée de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftrightarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{ip}}{1-e^{ip}}$)

Propriétés des opérateurs T et Q

- Commutent entre eux, et avec le hamiltonien
- Dépendance polynomiale en u

Relations fonctionnelles

- $$Q_{123} = \begin{vmatrix} Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) \\ Q_1(u-1)/x_1 & Q_2(u-1)/x_2 & Q_3(u-1)/x_3 \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$
  for twist $g = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots)$
- $$T^{\boxplus}(u) = \begin{vmatrix} Q_1(u+2)x_1^2 & Q_2(u+2)x_2^2 & Q_3(u+2)x_3^2 & \cdots \\ Q_1(u) & Q_2(u) & Q_3(u) & \cdots \\ Q_1(u-2)/x_1^2 & Q_2(u-2)/x_2^2 & Q_3(u-2)/x_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 1/x_3^2 \end{vmatrix}$$

- Une base d'états propres simultanée de tous ces opérateurs
- États propres caractérisés par les valeurs propres de ces opérateurs (polynômes en u)
- Équations de Bethe $\Leftarrow$ existence de polynômes satisfaisant ces relations fonctionnelles (avec $u = \frac{e^{ip}}{1-e^{ip}}$)

Comptage des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que
  $\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$
- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

$\rightsquigarrow$ comptage des solutions

1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto \xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto \xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto \xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto \xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto \xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto \xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto \xi_{16}})$$

$\rightsquigarrow$ complétude

Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que

$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$

- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

$\rightsquigarrow$ comptage des solutions

1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto \xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto \xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto \xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto \xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto \xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto \xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto \xi_{16}})$$

$\rightsquigarrow$ complétude

Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que
  $\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$
- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

$\rightsquigarrow$ comptage des solutions

1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto\xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto\xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto\xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto\xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto\xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto\xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto\xi_{16}})$$

$\rightsquigarrow$ complétude

Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que

$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$

- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

$\rightsquigarrow$ comptage des solutions

1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = \underbrace{(u - u_1^{(0,3)})}_{\propto \xi_7}\underbrace{(u - u_2^{(0,3)})}_{\propto \xi_{10}}\underbrace{(u - u_3^{(0,3)})}_{\propto \xi_{13}}$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = \underbrace{(u - u_1^{(2,1)})}_{\propto \xi_9}\underbrace{(u - u_2^{(2,1)})}_{\propto \xi_{11}}\underbrace{(u - u_3^{(2,1)})}_{\propto \xi_{15}}\underbrace{(u - u_4^{(2,1)})}_{\propto \xi_{16}}$$

$\rightsquigarrow$ complétude

Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que

$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$

- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

$\rightsquigarrow$ comptage des solutions

1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto\xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto\xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto\xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto\xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto\xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto\xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto\xi_{16}})$$

$\rightsquigarrow$ complétude

Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que
  $\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$
- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

$\rightsquigarrow$ comptage des solutions

1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto\xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto\xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto\xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto\xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto\xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto\xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto\xi_{16}})$$

$\rightsquigarrow$ complétude

Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que
$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$
- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

$\rightsquigarrow$ comptage des solutions

1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto \xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto \xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto \xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto \xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto \xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto \xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto \xi_{16}})$$

$\rightsquigarrow$ complétude

Comptage et caractérisation des solution polynomiales de ces équations fonctionnelles

- Exemple du cas périodique (twist $g = 1$).
- Des polynômes $\mathbb{Q}_{a,s}$ tels que
$$\mathbb{Q}_{a+1,s+1}\mathbb{Q}_{a,s} \propto \begin{vmatrix} \mathbb{Q}_{a+1,s}(u) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u) \\ \mathbb{Q}_{a+1,s}(u-1) & \mathbb{Q}_{a,s+1}(u-1) \end{vmatrix}$$
- Limite où $1 \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \cdots \ll \xi_L$
- Solutions indexées par des tableaux de Young standards :

$\rightsquigarrow$ comptage des solutions

1	2	4	7	10
3	6	8	13	
5	9	11		
12	15	16		
14				

$$\mathbb{Q}_{0,3} = (u - \underbrace{u_1^{(0,3)}}_{\propto \xi_7})(u - \underbrace{u_2^{(0,3)}}_{\propto \xi_{10}})(u - \underbrace{u_3^{(0,3)}}_{\propto \xi_{13}})$$

$$\mathbb{Q}_{2,1} = (u - \underbrace{u_1^{(2,1)}}_{\propto \xi_9})(u - \underbrace{u_2^{(2,1)}}_{\propto \xi_{11}})(u - \underbrace{u_3^{(2,1)}}_{\propto \xi_{15}})(u - \underbrace{u_4^{(2,1)}}_{\propto \xi_{16}})$$

$\rightsquigarrow$ complétude

Outline

Systèmes quantiques intégrables

Systèmes intégrables : Valeurs propres de H sont

$$E = E_0 + \sum_k e(p_k) \quad \text{où} \quad \forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$$

où les fonctions $e(p)$ et $S(p, p')$ dépendent du modèle.

Propriété emblématique : Équation de Yang-Baxter

Conditions (en général) :

- espace unidimensionnel, périodique
- interactions à faible portée (comparé à la taille de l'espace)
- "beaucoup" de symétries
- " Thermodynamic Bethe Ansatz" : continuation analytique pour une petite période spatiale

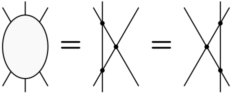
Systèmes quantiques intégrables

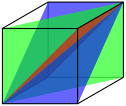
Systèmes intégrables : Valeurs propres de H sont

$$E = E_0 + \sum_k e(p_k) \quad \text{où} \quad \forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$$

où les fonctions $e(p)$ et $S(p, p')$ dépendent du modèle.

Propriété emblématique : Équation de Yang-Baxter





Conditions (en général) :

- espace unidimensionnel, périodique
- interactions à faible portée (comparé à la taille de l'espace)
- "beaucoup" de symétries

- " Thermodynamic Bethe Ansatz" : continuation analytique pour une petite période spatiale

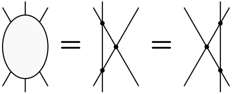
Systèmes quantiques intégrables

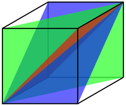
Systèmes intégrables : Valeurs propres de H sont

$$E = E_0 + \sum_k e(p_k) \quad \text{où} \quad \forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$$

où les fonctions $e(p)$ et $S(p, p')$ dépendent du modèle.

Propriété emblématique : Équation de Yang-Baxter





Conditions (en général) :

- espace unidimensionnel, périodique
- interactions à faible portée (comparé à la taille de l'espace)
- "beaucoup" de symétries

- " Thermodynamic Bethe Ansatz" : continuation analytique pour une petite période spatiale

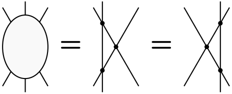
Systèmes quantiques intégrables

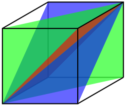
Systèmes intégrables : Valeurs propres de H sont

$$E = E_0 + \sum_k e(p_k) \quad \text{où} \quad \forall j, e^{i\,L\,p_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$$

où les fonctions $e(p)$ et $S(p, p')$ dépendent du modèle.

Propriété emblématique : Équation de Yang-Baxter





Conditions (en général) :

- espace unidimensionnel, périodique
- interactions à faible portée (comparé à la taille de l'espace)
- "beaucoup" de symétries

- " Thermodynamic Bethe Ansatz" : continuation analytique pour une petite période spatiale

Exemples d'autres modèles intégrables

Beaucoup de modèles où le spectre se déduit
d'équations fonctionelles et conditions d'analyticité :

- Théorie de super-Yang Mills avec $\mathcal{N} = 4$ supersymmétries :
  - mêmes equations fonctionnelle que précédemment
  - "polynomialité" remplacée holomorphie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et une coupure $\subset \mathbb{R}$
- Chaîne de spins de symétrie SO
  - polynomialité
  - equations fonctionnelles différentes de celles présentées ici
- ABJM, Fishnet (autres théories des champs)
  - fonctions non-polynomiales
  - équations fonctionelles différentes de celles présentées ici

bonus : Les fonctions Q sur lesquelles portent ces équations apparaissent aussi dans le calcul d'autres observables physiques (fonctions de corrélation)

Exemples d'autres modèles intégrables

Beaucoup de modèles où le spectre se déduit
d'équations fonctionelles et conditions d'analyticité :

- Théorie de super-Yang Mills avec $\mathcal{N} = 4$ supersymmétries :
  - mêmes equations fonctionnelle que précédemment
  - "polynomialité" remplacée holomorphie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et une coupure $\subset \mathbb{R}$
- Chaîne de spins de symétrie SO
  - polynomialité
  - equations fonctionnelles différentes de celles présentées ici
- ABJM, Fishnet (autres théories des champs)
  - fonctions non-polynomiales
  - équations fonctionelles différentes de celles présentées ici

bonus : Les fonctions Q sur lesquelles portent ces équations apparaissent aussi dans le calcul d'autres observables physiques (fonctions de corrélation)

Exemples d'autres modèles intégrables

Beaucoup de modèles où le spectre se déduit
d'équations fonctionelles et conditions d'analyticité :

- Théorie de super-Yang Mills avec $\mathcal{N} = 4$ supersymmétries :
  - mêmes equations fonctionnelle que précédemment
  - "polynomialité" remplacée holomorphie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et une coupure $\subset \mathbb{R}$
- Chaîne de spins de symétrie SO
  - polynomialité
  - equations fonctionnelles différentes de celles présentées ici
- ABJM, Fishnet (autres théories des champs)
  - fonctions non-polynomiales
  - équations fonctionelles différentes de celles présentées ici

bonus : Les fonctions Q sur lesquelles portent ces équations apparaissent aussi dans le calcul d'autres observables physiques (fonctions de corrélation)

Exemples d'autres modèles intégrables

Beaucoup de modèles où le spectre se déduit
d'équations fonctionelles et conditions d'analyticité :

- Théorie de super-Yang Mills avec $\mathcal{N} = 4$ supersymmétries :
  - mêmes equations fonctionnelle que précédemment
  - "polynomialité" remplacée holomorphie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et une coupure $\subset \mathbb{R}$
- Chaîne de spins de symétrie SO
  - polynomialité
  - equations fonctionnelles différentes de celles présentées ici
- ABJM, Fishnet (autres théories des champs)
  - fonctions non-polynomiales
  - équations fonctionelles différentes de celles présentées ici

bonus : Les fonctions Q sur lesquelles portent ces équations apparaissent aussi dans le calcul d'autres observables physiques (fonctions de corrélation)

Exemples d'autres modèles intégrables

Beaucoup de modèles où le spectre se déduit
d'équations fonctionelles et conditions d'analyticité :

- Théorie de super-Yang Mills avec $\mathcal{N} = 4$ supersymmétries :
  - mêmes equations fonctionnelle que précédemment
  - "polynomialité" remplacée holomorphie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et une coupure $\subset \mathbb{R}$
- Chaîne de spins de symétrie SO
  - polynomialité
  - equations fonctionnelles différentes de celles présentées ici
- ABJM, Fishnet (autres théories des champs)
  - fonctions non-polynomiales
  - équations fonctionelles différentes de celles présentées ici

bonus : Les fonctions Q sur lesquelles portent ces équations apparaissent aussi dans le calcul d'autres observables physiques (fonctions de corrélation)

Exemples d'autres modèles intégrables

Beaucoup de modèles où le spectre se déduit
d'équations fonctionelles et conditions d'analyticité :

- Théorie de super-Yang Mills avec $\mathcal{N} = 4$ supersymmétries :
  - mêmes equations fonctionnelle que précédemment
  - "polynomialité" remplacée holomorphie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et une coupure $\subset \mathbb{R}$
- Chaîne de spins de symétrie SO
  - polynomialité
  - equations fonctionnelles différentes de celles présentées ici
- ABJM, Fishnet (autres théories des champs)
  - fonctions non-polynomiales
  - équations fonctionelles différentes de celles présentées ici

bonus : Les fonctions Q sur lesquelles portent ces équations apparaissent aussi dans le calcul d'autres observables physiques (fonctions de corrélation)

Exemples d'autres modèles intégrables

Beaucoup de modèles où le spectre se déduit
d'équations fonctionelles et conditions d'analyticité :

- Théorie de super-Yang Mills avec $\mathcal{N} = 4$ supersymmétries :
  - mêmes equations fonctionnelle que précédemment
  - "polynomialité" remplacée holomorphie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et une coupure $\subset \mathbb{R}$
- Chaîne de spins de symétrie SO
  - polynomialité
  - equations fonctionnelles différentes de celles présentées ici
- ABJM, Fishnet (autres théories des champs)
  - fonctions non-polynomiales
  - équations fonctionelles différentes de celles présentées ici

bonus : Les fonctions Q sur lesquelles portent ces équations apparaissent aussi dans le calcul d'autres observables physiques (fonctions de corrélation)

Exemples d'autres modèles intégrables

Beaucoup de modèles où le spectre se déduit
d'équations fonctionelles et conditions d'analyticité :

- Théorie de super-Yang Mills avec $\mathcal{N} = 4$ supersymmétries :
    - mêmes equations fonctionnelle que précédemment
    - "polynomialité" remplacée holomorphie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et une coupure $\subset \mathbb{R}$
- Chaîne de spins de symétrie SO
    - polynomialité
    - equations fonctionnelles différentes de celles présentées ici
- ABJM, Fishnet (autres théories des champs)
    - fonctions non-polynomiales
    - équations fonctionelles différentes de celles présentées ici

bonus : Les fonctions Q sur lesquelles portent ces équations apparaissent aussi dans le calcul d'autres observables physiques (fonctions de corrélation)

Exemples d'autres modèles intégrables

Beaucoup de modèles où le spectre se déduit
d'équations fonctionelles et conditions d'analyticité :

- Théorie de super-Yang Mills avec $\mathcal{N} = 4$ supersymmétries :
  - mêmes equations fonctionnelle que précédemment
  - "polynomialité" remplacée holomorphie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et une coupure $\subset \mathbb{R}$
- Chaîne de spins de symétrie SO
  - polynomialité
  - equations fonctionnelles différentes de celles présentées ici
- ABJM, Fishnet (autres théories des champs)
  - fonctions non-polynomiales
  - équations fonctionelles différentes de celles présentées ici

bonus : Les fonctions Q sur lesquelles portent ces équations apparaissent aussi dans le calcul d'autres observables physiques (fonctions de corrélation)