

Paradoxe de Zénon et autres curiosités mathématiques.

Sébastien Laurent



Paradoxe de Zénon et dilemme des prisonniers.

Sébastien Laurent



- 1 Le paradoxe de Zénon
- 2 Le dilemme des prisonniers

Plan

- 1 Le paradoxe de Zénon
 - Présentation du paradoxe
 - Explication mathématique
 - "Paradoxes" analogues
- 2 Le dilemme des prisonniers
 - Mathématiques et comportement humain
 - Dilemme des prisonniers
 - Cadre sportif : le dopage

Zénon d'Élée



Fresque réalisée en 1588-1595, attribuée à Bartolomeo Carducci ou Pellegrino Tibaldi

Zénon d'Élée (490-430 avant J.C.)

- Philosophe grec
- Vivant à Élée (sud de l'Italie)
- S'opposait aux pythagoriciens sur la question de la divisibilité du mouvement.
 - A énoncé des paradoxes pour contredire les pythagoriciens.

Zénon d'Élée



Fresque réalisée en 1588-1595, attribuée à Bartolomeo Carducci ou Pellegrino Tibaldi

Zénon d'Élée (490-430 avant J.C.)

- Philosophe grec
- Vivant à Élée (sud de l'Italie)
- S'opposait aux pythagoriciens sur la question de la divisibilité du mouvement.
 - A énoncé des paradoxes pour contredire les pythagoriciens.

Paradoxe d'Achille et la tortue

Course de vitesse entre Achille et une tortue



Achille triomphant exhibe le cadavre d'Hector devant la muraille de Troie
Franz Matsch, 1892



© CC-BY-SA-3.0
de Wikimedia Commons

- Pour simplifier, disons qu'Achille est deux fois plus rapide que la tortue.
- Beau joueur, Achille laisse la tortue partir avec un mètre d'avance.
- Zénon « *prouve* » qu'Achille ne parvient jamais à dépasser la tortue

Paradoxe d'Achille et la tortue

Course de vitesse entre Achille et une tortue



Achille triomphant exhibe le cadavre d'Hector devant la muraille de Troie
Franz Matsch, 1892



© CC-BY-SA-3.0
de Wikimedia Commons

- Pour simplifier, disons qu'Achille est deux fois plus rapide que la tortue.
- Beau joueur, Achille laisse la tortue partir avec un mètre d'avance.
- Zénon « *prouve* » qu'Achille ne parvient jamais à dépasser la tortue

Paradoxe d'Achille et la tortue

Course de vitesse entre Achille et une tortue



Achille triomphant exhibe le cadavre d'Hector devant la muraille de Troie
Franz Matsch, 1892



© CC-BY-SA-3.0
de Wikimedia Commons

- Pour simplifier, disons qu'Achille est deux fois plus rapide que la tortue.
- Beau joueur, Achille laisse la tortue partir avec un mètre d'avance.
- Zénon « *prouve* » qu'Achille ne parvient jamais à dépasser la tortue

Paradoxe d'Achille et la tortue

Course de vitesse entre Achille et une tortue



Achille triomphant exhibe le cadavre d'Hector devant la muraille de Troie
Franz Matsch, 1892



© CC-BY-SA-3.0
de Wikimedia Commons

- Pour simplifier, disons qu'Achille est deux fois plus rapide que la tortue.
- Beau joueur, Achille laisse la tortue partir avec un mètre d'avance.
- Zénon « *prouve* » qu'Achille ne parvient jamais à dépasser la tortue

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

0



0

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc

①



①



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



0



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



0



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



0



1



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



0



1



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



0



0



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



0



1



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



0



0



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



0



1



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



①



①



①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



①



①



①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteigne la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



①



①



①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



①



①



①



①

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ❶ Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ❷ Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ❸ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ❹ etc



❶



❷



❶



❷

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

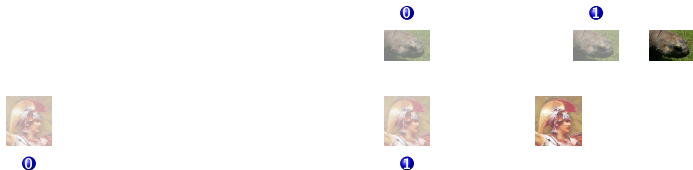
- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ❶ Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ❷ Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ❸ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ❹ etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ❶ Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ❷ Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ❸ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ❹ etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ❶ Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ❷ Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ❸ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ❹ etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



0



0



1



1



2



2

On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achilles. Achilles ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- 1 Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- 2 Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- 3 Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- 4 etc



On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

L'argument de Zénon

- ① Le temps qu'Achille parcourt 1 mètre et atteint la position d'où est partie la tortue, celle-ci a franchi 50cm.
- ② Le temps qu'Achille ait franchi ces 50cm, la tortue a avancé de 25cm.
- ③ Le temps qu'Achille ait franchi ces 25cm, la tortue a avancé de 12,5cm.
- ④ etc



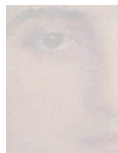
On a ainsi une infinité d'étapes où la tortue est toujours devant Achille. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



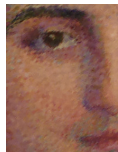
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



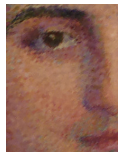
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



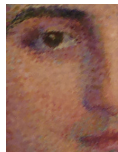
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



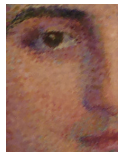
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



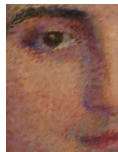
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



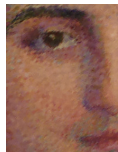
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



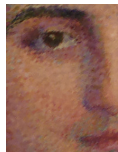
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



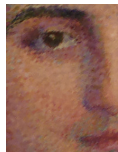
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



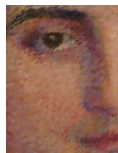
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



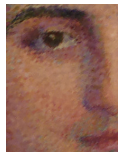
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



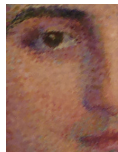
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



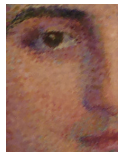
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



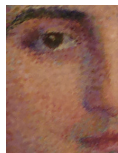
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



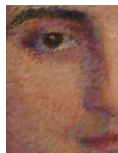
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



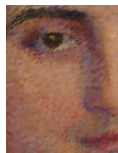
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



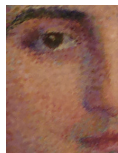
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



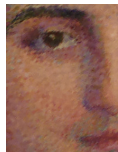
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



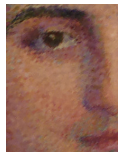
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



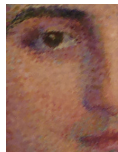
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



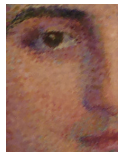
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



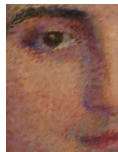
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



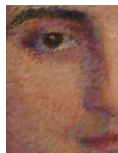
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



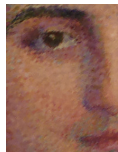
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



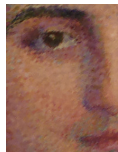
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



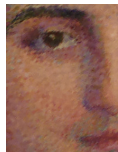
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



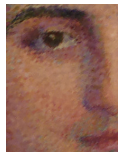
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



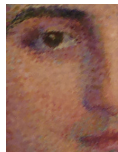
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



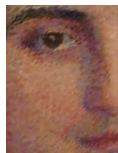
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



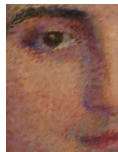
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



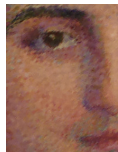
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



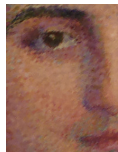
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



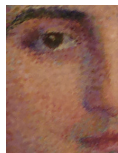
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



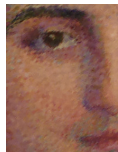
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



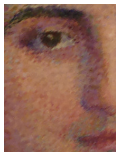
- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

Pourquoi énoncer ce paradoxe ?

Atomisme

Peut-on couper la matière en morceaux arbitrairement petit ?

- Les atomistes pensaient que non, que la matière est constitué de petits grains indivisibles.



Portrait de Madame Marthe – Hippolyte Petitjean
1899

Décomposabilité du mouvement

Peut-on décomposer le mouvement en étapes arbitrairement petites ?

- Zénon pensait que non et a énoncé des paradoxes pour le prouver



- On va voir que son argumentation est erronée, et ne prouve pas l'indécomposabilité du mouvement.

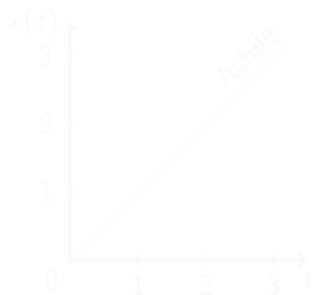
Plan

- 1 Le paradoxe de Zénon
 - Présentation du paradoxe
 - Explication mathématique
 - "Paradoxes" analogues
- 2 Le dilemme des prisonniers
 - Mathématiques et comportement humain
 - Dilemme des prisonniers
 - Cadre sportif : le dopage

Calculs mathématiques

fonctions affines

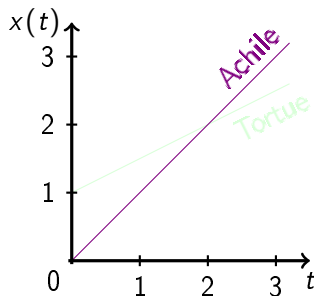
- Si Achille court à 1m/s et la tortue à $0,5\text{m/s}$, alors
 - Au bout de t secondes Achille a parcouru t mètres. Sa position est donc $x_A(t) = t$.
 - Au bout de t secondes la tortue a parcouru $\frac{t}{2}$ mètres. Elle était partie avec un mètre d'avance. Sa position est donc $x_T(t) = 1 + \frac{t}{2}$.



Calculs mathématiques

fonctions affines

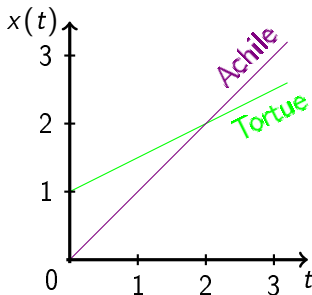
- Si Achille court à 1m/s et la tortue à $0,5\text{m/s}$, alors
 - Au bout de t secondes Achille a parcouru t mètres. Sa position est donc $x_A(t) = t$.
 - Au bout de t secondes la tortue a parcouru $\frac{t}{2}$ mètres. Elle était partie avec un mètre d'avance. Sa position est donc $x_T(t) = 1 + \frac{t}{2}$.



Calculs mathématiques

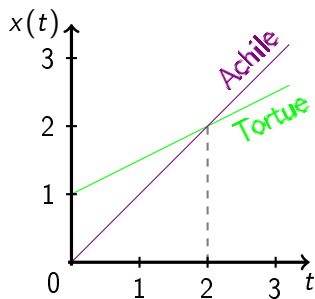
fonctions affines

- Si Achille court à 1m/s et la tortue à $0,5\text{m/s}$, alors
 - Au bout de t secondes Achille a parcouru t mètres. Sa position est donc $x_A(t) = t$.
 - Au bout de t secondes la tortue a parcouru $\frac{t}{2}$ mètres. Elle était partie avec un mètre d'avance. Sa position est donc $x_T(t) = 1 + \frac{t}{2}$.



Calculs mathématiques

durée des étapes



Achille court à 1m/s et la tortue à 0,5m/s.

- ① Au bout d'une seconde Achille a parcouru 1m et atteint la position initiale de la tortue.
- ② 0,5s plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ③ 0,25s plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ④ 0,125s plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.

temps écoulé : s

Bien qu'il y ait une *infinité* de telles étapes, elles finissent toutes avant

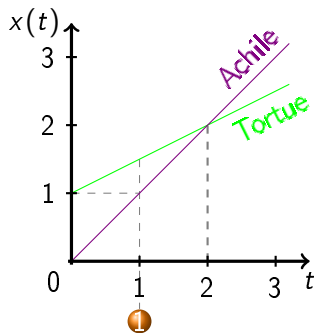
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2\text{s.}$$

La course continue même *après* cette *infinité* d'étapes, et Achille double alors la tortue.



Calculs mathématiques

durée des étapes



Achille court à 1m/s et la tortue à $0,5\text{m/s}$.

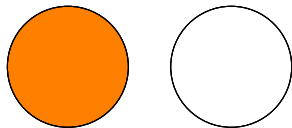
- ① Au bout d'une seconde Achille a parcouru 1m et atteint la position initiale de la tortue.
- ② $0,5\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ③ $0,25\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ④ $0,125\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.

temps écoulé : 1s

Bien qu'il y ait une *infinité* de telles étapes, elles finissent toutes avant

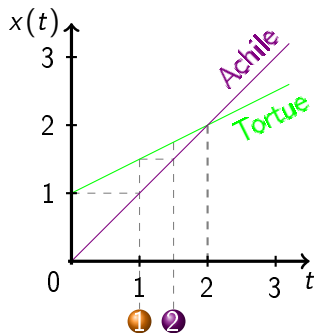
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2\text{s}.$$

La course continue même *après* cette *infinité* d'étapes, et Achille double alors la tortue.



Calculs mathématiques

durée des étapes



Achille court à 1m/s et la tortue à $0,5\text{m/s}$.

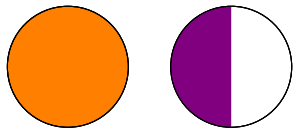
- ① Au bout d'une seconde Achille a parcouru 1m et atteint la position initiale de la tortue.
- ② $0,5\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ③ $0,25\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ④ $0,125\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.

temps écoulé : $1 + \frac{1}{2} = 1,5\text{s}$

Bien qu'il y ait une *infinité* de telles étapes, elles finissent toutes avant

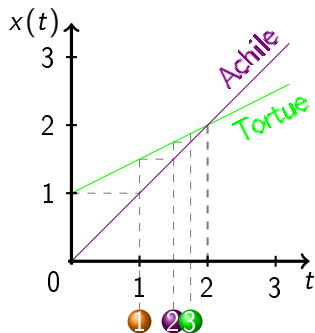
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2\text{s}.$$

La course continue même *après* cette *infinité* d'étapes, et Achille double alors la tortue.



Calculs mathématiques

durée des étapes



Achille court à 1m/s et la tortue à $0,5\text{m/s}$.

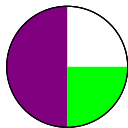
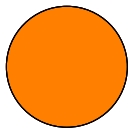
- ① Au bout d'une seconde Achille a parcouru 1m et atteint la position initiale de la tortue.
- ② $0,5\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ③ $0,25\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ④ $0,125\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.

$$\text{temps écoulé} : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,75\text{s}$$

Bien qu'il y ait une *infinité* de telles étapes, elles finissent toutes avant

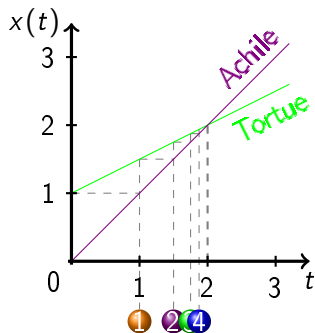
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2\text{s}.$$

La course continue même *après* cette *infinité* d'étapes, et Achille double alors la tortue.



Calculs mathématiques

durée des étapes



Achille court à 1m/s et la tortue à $0,5\text{m/s}$.

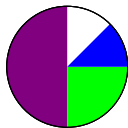
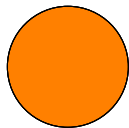
- ① Au bout d'une seconde Achille a parcouru 1m et atteint la position initiale de la tortue.
- ② $0,5\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ③ $0,25\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ④ $0,125\text{s}$ plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.

temps écoulé : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1,875\text{s}$

Bien qu'il y ait une *infinité* de telles étapes, elles finissent toutes avant

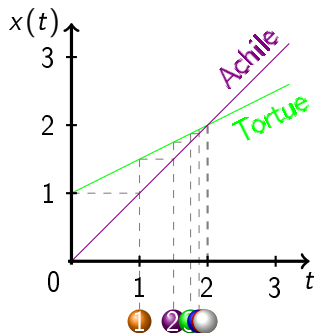
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2\text{s}.$$

La course continue même *après* cette *infinité* d'étapes, et Achille double alors la tortue.



Calculs mathématiques

durée des étapes



Achille court à 1m/s et la tortue à 0,5m/s.

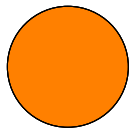
- ① Au bout d'une seconde Achille a parcouru 1m et atteint la position initiale de la tortue.
- ② 0,5s plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ③ 0,25s plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ④ 0,125s plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.

temps écoulé : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Bien qu'il y ait une *infinité* de telles étapes, elles finissent toutes avant

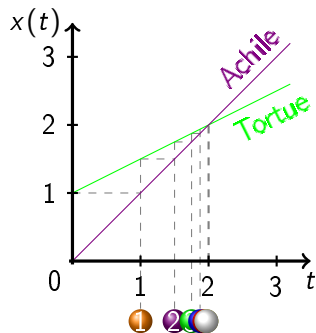
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2\text{s.}$$

La course continue même *après* cette *infinité* d'étapes, et Achille double alors la tortue.



Calculs mathématiques

durée des étapes



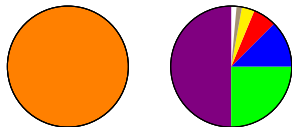
Achille court à 1m/s et la tortue à 0,5m/s.

- ① Au bout d'une seconde Achille a parcouru 1m et atteint la position initiale de la tortue.
- ② 0,5s plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ③ 0,25s plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.
- ④ 0,125s plus tard, Achille a atteint la position précédente de la tortue.

Bien qu'il y ait une *infinité* de telles étapes, elles finissent toutes avant

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2s.$$

La course continue même *après* cette *infinité* d'étapes, et Achille double alors la tortue.



Plan

- 1 Le paradoxe de Zénon
 - Présentation du paradoxe
 - Explication mathématique
 - "Paradoxes" analogues
- 2 Le dilemme des prisonniers
 - Mathématiques et comportement humain
 - Dilemme des prisonniers
 - Cadre sportif : le dopage

Paradoxes de Zénon

Paradoxe : affirmation surprenante, contraire à l'*intuition*.

- Paradoxe de la flèche : on tire une flèche vers une cible
 - Elle franchit la moitié de la distance qui la sépare de la cible
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - etc
- Ces paradoxes se résument à « il y a une infinité de nombre réels entre 0 et 1 ».
- Autre exemple : quand on verse 2dl d'eau dans un verre, il y a un moment à l'issue duquel on a versé 0,9dl, un autre où on a versé 0,99dl, un autre où on a 0,999dl, etc.
On ne s'en rend évidemment pas compte, et cela ne nous empêche pas de verser les 2dl d'eau.

Paradoxes de Zénon

Paradoxe : affirmation surprenante, contraire à l'*intuition*.

- Paradoxe de la flèche : on tire une flèche vers une cible
 - Elle franchit la moitié de la distance qui la sépare de la cible
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - etc
- Ces paradoxes se résument à « il y a une infinité de nombre réels entre 0 et 1 ».
- Autre exemple : quand on verse 2dl d'eau dans un verre, il y a un moment à l'issue duquel on a versé 0,9dl, un autre où on a versé 0,99dl, un autre où on a 0,999dl, etc.
On ne s'en rend évidemment pas compte, et cela ne nous empêche pas de verser les 2dl d'eau.

Paradoxes de Zénon

Paradoxe : affirmation surprenante, contraire à l'*intuition*.

- Paradoxe de la flèche : on tire une flèche vers une cible
 - Elle franchit la moitié de la distance qui la sépare de la cible
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - etc
- Ces paradoxes se résument à « il y a une infinité de nombre réels entre 0 et 1 ».
- Autre exemple : quand on verse 2dl d'eau dans un verre, il y a un moment à l'issue duquel on a versé 0,9dl, un autre où on a versé 0,99dl, un autre où on a 0,999dl, etc.
On ne s'en rend évidemment pas compte, et cela ne nous empêche pas de verser les 2dl d'eau.

Paradoxes de Zénon

Paradoxe : affirmation surprenante, contraire à l'*intuition*.

- Paradoxe de la flèche : on tire une flèche vers une cible
 - Elle franchit la moitié de la distance qui la sépare de la cible
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - etc
- Ces paradoxes se résument à « il y a une infinité de nombre réels entre 0 et 1 ».
- Autre exemple : quand on verse 2dl d'eau dans un verre, il y a un moment à l'issue duquel on a versé 0,9dl, un autre où on a versé 0,99dl, un autre où on a 0,999dl, etc.
On ne s'en rend évidemment pas compte, et cela ne nous empêche pas de verser les 2dl d'eau.

Paradoxes de Zénon

Paradoxe : affirmation surprenante, contraire à l'*intuition*.

- Paradoxe de la flèche : on tire une flèche vers une cible
 - Elle franchit la moitié de la distance qui la sépare de la cible
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - etc
- Ces paradoxes se résument à « il y a une infinité de nombre réels entre 0 et 1 ».
- Autre exemple : quand on verse 2dl d'eau dans un verre, il y a un moment à l'issue duquel on a versé 0,9dl, un autre où on a versé 0,99dl, un autre où on a 0,999dl, etc.
On ne s'en rend évidemment pas compte, et cela ne nous empêche pas de verser les 2dl d'eau.

Paradoxes de Zénon

Paradoxe : affirmation surprenante, contraire à l'*intuition*.

- Paradoxe de la flèche : on tire une flèche vers une cible
 - Elle franchit la moitié de la distance qui la sépare de la cible
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - etc
- Ces paradoxes se résument à « il y a une infinité de nombre réels entre 0 et 1 ».
- Autre exemple : quand on verse 2dl d'eau dans un verre, il y a un moment à l'issue duquel on a versé 0,9dl, un autre où on a versé 0,99dl, un autre où on a 0,999dl, etc.
On ne s'en rend évidemment pas compte, et cela ne nous empêche pas de verser les 2dl d'eau.

Paradoxes de Zénon

Paradoxe : affirmation surprenante, contraire à l'*intuition*.

- Paradoxe de la flèche : on tire une flèche vers une cible
 - Elle franchit la moitié de la distance qui la sépare de la cible
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - Puis la moitié de la distance qui reste
 - etc
- Ces paradoxes se résument à « il y a une infinité de nombre réels entre 0 et 1 ».
- Autre exemple : quand on verse 2dl d'eau dans un verre, il y a un moment à l'issue duquel on a versé 0,9dl, un autre où on a versé 0,99dl, un autre où on a 0,999dl, etc.
On ne s'en rend évidemment pas compte, et cela ne nous empêche pas de verser les 2dl d'eau.

Plan

- 1 Le paradoxe de Zénon
 - Présentation du paradoxe
 - Explication mathématique
 - "Paradoxes" analogues
- 2 Le dilemme des prisonniers
 - Mathématiques et comportement humain
 - Dilemme des prisonniers
 - Cadre sportif : le dopage

Mathématiques et comportement humain

En *Sciences humaines* (sociologie, économie, etc), on essaye parfois de prédire le comportement humain.

↪ On considère un *être humain* qui estime les conséquences de ses actes, ce qu'ils lui feront gagner (ou perdre) et avec quelle probabilité, puis choisit l'action qui maximise (en moyenne) son intérêt (*utilité*).

On appelle « *homo œconomicus* » une telle personne.

- Certaines situations sont difficiles à décrire de cette façon : par exemple le « *dilemme des prisonniers* ».

Mathématiques et comportement humain

En *Sciences humaines* (sociologie, économie, etc), on essaye parfois de prédire le comportement humain.

↪ On considère un *être humain* qui estime les conséquences de ses actes, ce qu'ils lui feront gagner (ou perdre) et avec quelle probabilité, puis choisit l'action qui maximise (en moyenne) son intérêt (*utilité*).

On appelle « *homo œconomicus* » une telle personne.

- Certaines situations sont difficiles à décrire de cette façon : par exemple le « *dilemme des prisonniers* ».

Mathématiques et comportement humain

En *Sciences humaines* (sociologie, économie, etc), on essaye parfois de prédire le comportement humain.

↪ On considère un *être humain* qui estime les conséquences de ses actes, ce qu'ils lui feront gagner (ou perdre) et avec quelle probabilité, puis choisit l'action qui maximise (en moyenne) son intérêt (*utilité*).

On appelle « *homo œconomicus* » une telle personne.

- Certaines situations sont difficiles à décrire de cette façon : par exemple le « *dilemme des prisonniers* ».

Mathématiques et comportement humain

En *Sciences humaines* (sociologie, économie, etc), on essaye parfois de prédire le comportement humain.

↪ On considère un *être humain* qui estime les conséquences de ses actes, ce qu'ils lui feront gagner (ou perdre) et avec quelle probabilité, puis choisit l'action qui maximise (en moyenne) son intérêt (*utilité*).

On appelle « *homo œconomicus* » une telle personne.

- Certaines situations sont difficiles à décrire de cette façon : par exemple le « *dilemme des prisonniers* ».

Dilemme des prisonniers

Les deux complices (Alice et Bob) d'un même crime sont arrêtés par la police, et vont être jugés.

La peine qui leur sera infligée dépend du fait que l'un ou l'autre des suspects dénonce son/sa complice :

| | A se tait | A dénonce B |
|-------------|-----------------------|------------------------|
| B se tait | A : 1 an B : 1 an | A : 0 an B : 3 ans |
| B dénonce A | A : 3 ans B : 0 an | A : 2 ans B : 2 ans |

- Intérêt collectif : se taire tous les deux
- Intérêt individuel : chacun dénonce l'autre

↪ Un individu rationnel cherchant son intérêt dénoncerait l'autre.
Ce n'est toutefois pas ce qu'on observe que font les humains.
(dans de nombreuses situations)

Dilemme des prisonniers

Les deux complices (Alice et Bob) d'un même crime sont arrêtés par la police, et vont être jugés.

La peine qui leur sera infligée dépend du fait que l'un ou l'autre des suspects dénonce son/sa complice :

| | A se tait | A dénonce B |
|-------------|-----------------------|------------------------|
| B se tait | A : 1 an B : 1 an | A : 0 an B : 3 ans |
| B dénonce A | A : 3 ans B : 0 an | A : 2 ans B : 2 ans |

- Intérêt collectif : se taire tous les deux
 - Intérêt individuel : chacun dénonce l'autre
- ↪ Un individu rationnel cherchant son intérêt dénoncerait l'autre.
Ce n'est toutefois pas ce qu'on observe que font les humains.
(dans de nombreuses situations)

Dilemme des prisonniers

Les deux complices (Alice et Bob) d'un même crime sont arrêtés par la police, et vont être jugés.

La peine qui leur sera infligée dépend du fait que l'un ou l'autre des suspects dénonce son/sa complice :

| | A se tait | A dénonce B |
|-------------|-----------------------|------------------------|
| B se tait | A : 1 an B : 1 an | A : 0 an B : 3 ans |
| B dénonce A | A : 3 ans B : 0 an | A : 2 ans B : 2 ans |

- Intérêt collectif : se taire tous les deux
- Intérêt individuel : chacun dénonce l'autre

↪ Un individu rationnel cherchant son intérêt dénoncerait l'autre.
Ce n'est toutefois pas ce qu'on observe que font les humains.
(dans de nombreuses situations)

Dilemme des prisonniers

Les deux complices (Alice et Bob) d'un même crime sont arrêtés par la police, et vont être jugés.

La peine qui leur sera infligée dépend du fait que l'un ou l'autre des suspects dénonce son/sa complice :

| | A se tait | A dénonce B |
|-------------|-----------------------|------------------------|
| B se tait | A : 1 an B : 1 an | A : 0 an B : 3 ans |
| B dénonce A | A : 3 ans B : 0 an | A : 2 ans B : 2 ans |

- Intérêt collectif : se taire tous les deux
 - Intérêt individuel : chacun dénonce l'autre
- ↪ Un individu rationnel cherchant son intérêt dénoncerait l'autre.

Ce n'est toutefois pas ce qu'on observe que font les humains.
(dans de nombreuses situations)

Dilemme des prisonniers

Les deux complices (Alice et Bob) d'un même crime sont arrêtés par la police, et vont être jugés.

La peine qui leur sera infligée dépend du fait que l'un ou l'autre des suspects dénonce son/sa complice :

| | A se tait | A dénonce B |
|-------------|-----------------------|------------------------|
| B se tait | A : 1 an B : 1 an | A : 0 an B : 3 ans |
| B dénonce A | A : 3 ans B : 0 an | A : 2 ans B : 2 ans |

- Intérêt collectif : se taire tous les deux
 - Intérêt individuel : chacun dénonce l'autre
- ↪ Un individu rationnel cherchant son intérêt dénoncerait l'autre.
Ce n'est toutefois pas ce qu'on observe que font les humains.
(dans de nombreuses situations)

Cas sportif : le dopage

Deux grands sportifs s'affrontent pour conquérir un titre. Un sportif qui se dope court (notamment) le risque de perdre le titre a posteriori (s'il est ensuite avéré qu'il était dopé) et de voir diminuer son espérance de vie. Leurs chances de victoire sont

| | A ne se dope pas | A se dope |
|------------------|--------------------|--------------------|
| B ne se dope pas | A : 50% B : 50% | A : 80% B : 20% |
| B se dope | A : 20% B : 80% | A : 50% B : 50% |

- 1 Le paradoxe de Zénon
 - Présentation du paradoxe
 - Explication mathématique
 - "Paradoxes" analogues

- 2 Le dilemme des prisonniers
 - Mathématiques et comportement humain
 - Dilemme des prisonniers
 - Cadre sportif : le dopage