

Équation de Yang-Baxter et intégrabilité quantique

Résultats issus de travaux de V. Kazakov, S. L., Z.Tsuboi, P. Vieira.

- 1 Présentation du modèle : Chaîne de spins
 - Formalisme de la mécanique quantique
 - « spins »
 - Chaînes de spins
- 2 Diagonalisation explicite : Ansatz de Bethe
- 3 Matrices de transfert et équation de Yang-Baxter
 - Matrices de transfert
 - Résultats "combinatoires"
 - Équations de Bethe

Mécanique quantique

Système quantique

Système dynamique

$$i \frac{d}{dt} \psi = H \psi$$

- $\psi(t) \in \mathcal{H}$, espace de Hilbert
- Le « Hamiltonien » H est hermitien
- États physiques : éléments de $P(\mathcal{H}) = \left\{ \text{Vect}(\psi) \mid \begin{array}{l} \psi \in \mathcal{H} \\ \|\psi\| = 1 \end{array} \right\}$

spin : direction $d \in \mathcal{S}^2 \quad \leftrightarrow \quad \text{élément de } P_1(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^2).$

« Mesure quantique » (interaction avec un système classique)

choix de la quantité que l'on mesure \leftrightarrow choix d'une décomposition $\mathcal{H} = \bigoplus_i V_i$

- Projection $\psi \rightarrow p_{V_n}(\psi)$ avec probabilité $\|p_{V_n}(\psi)\|^2$
- L'expérimentateur apprend la valeur de n

Mécanique quantique

Système quantique

Système dynamique

$$i \frac{d}{dt} \psi = H \psi$$

- $\psi(t) \in \mathcal{H}$, espace de Hilbert
- Le « Hamiltonien » H est hermitien
- États physiques : éléments de $P(\mathcal{H}) = \left\{ \text{Vect}(\psi) \mid \begin{array}{l} \psi \in \mathcal{H} \\ \|\psi\| = 1 \end{array} \right\}$

spin : direction $d \in \mathcal{S}^2 \quad \leftrightarrow \quad \text{élément de } P_1(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^2).$

« Mesure quantique » (interaction avec un système classique)

choix de la quantité que l'on mesure \leftrightarrow choix d'une décomposition $\mathcal{H} = \bigoplus_i V_i$

- Projection $\psi \rightarrow p_{V_n}(\psi)$ avec probabilité $\|p_{V_n}(\psi)\|^2$
- L'expérimentateur apprend la valeur de n

Mécanique quantique

Système quantique

Système dynamique

$$i \frac{d}{dt} \psi = H \psi$$

- $\psi(t) \in \mathcal{H}$, espace de Hilbert
- Le « Hamiltonien » H est hermitien
- États physiques : éléments de $P(\mathcal{H}) = \left\{ \text{Vect}(\psi) \mid \begin{array}{l} \psi \in \mathcal{H} \\ \|\psi\| = 1 \end{array} \right\}$

spin : direction $d \in \mathcal{S}^2 \quad \leftrightarrow \quad \text{élément de } P_1(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^2).$

« Mesure quantique » (interaction avec un système classique)

choix de la quantité que l'on mesure \leftrightarrow choix d'une décomposition $\mathcal{H} = \bigoplus_i V_i$

- Projection $\psi \rightarrow p_{V_n}(\psi)$ avec probabilité $\|p_{V_n}(\psi)\|^2$
- L'expérimentateur apprend la valeur de n

Mécanique quantique

Système quantique

Système dynamique

$$i \frac{d}{dt} \psi = H \psi$$

- $\psi(t) \in \mathcal{H}$, espace de Hilbert
- Le « Hamiltonien » H est hermitien
- États physiques : éléments de $P(\mathcal{H}) = \left\{ \text{Vect}(\psi) \mid \begin{array}{l} \psi \in \mathcal{H} \\ \|\psi\| = 1 \end{array} \right\}$

spin : direction $d \in \mathcal{S}^2 \quad \leftrightarrow \quad \text{élément de } P_1(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^2).$

« Mesure quantique » (interaction avec un système classique)

choix de la quantité que l'on mesure \leftrightarrow choix d'une décomposition $\mathcal{H} = \bigoplus_i V_i$

- Projection $\psi \rightarrow p_{V_n}(\psi)$ avec probabilité $\|p_{V_n}(\psi)\|^2$
- L'expérimentateur apprend la valeur de n

Mécanique quantique

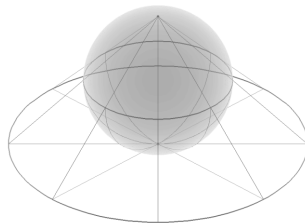
Système quantique isolé

Système dynamique

$$i \frac{d}{dt} \psi = H \psi$$

- $\psi(t) \in \mathcal{H}$, espace de Hilbert
- Le « Hamiltonien » H est hermitien
- États physiques : éléments de $P(\mathcal{H}) = \left\{ \text{Vect}(\psi) \mid \begin{array}{l} \psi \in \mathcal{H} \\ \|\psi\| = 1 \end{array} \right\}$

spin : direction $d \in \mathcal{S}^2 \leftrightarrow$ élément de $P_1(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^2)$.



Mécanique quantique

Système quantique isolé

Système dynamique

$$i \frac{d}{dt} \psi = H \psi$$

- $\psi(t) \in \mathcal{H}$, espace de Hilbert
- Le « Hamiltonien » H est hermitien
- États physiques : éléments de $P(\mathcal{H}) = \left\{ \text{Vect}(\psi) \mid \begin{array}{l} \psi \in \mathcal{H} \\ \|\psi\| = 1 \end{array} \right\}$

spin : direction $d \in \mathcal{S}^2 \quad \leftrightarrow \quad \text{élément de } P_1(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^2).$

« Mesure quantique » (interaction avec un système classique)

choix d'une décomposition
choix de la quantité que l'on mesure $\leftrightarrow \mathcal{H} = \bigoplus_i V_i$

- Projection $\psi \rightarrow p_{V_n}(\psi)$ avec probabilité $\|p_{V_n}(\psi)\|^2$
- L'expérimentateur apprend la valeur de n

Mécanique quantique

Système quantique isolé

Système dynamique

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

- $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$, espace de Hilbert
- Le « Hamiltonien » H est hermitien
- États physiques : éléments de $P(\mathcal{H}) = \left\{ \text{Vect}(v) \left| \begin{array}{l} v \in \mathcal{H} \\ \|v\| = 1 \end{array} \right. \right\}$

spin : direction $d \in \mathcal{S}^2 \quad \leftrightarrow \quad \text{élément de } P_1(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^2).$

« Mesure quantique » (interaction avec un système classique)

choix d'une décomposition
choix de la quantité que l'on mesure $\leftrightarrow \mathcal{H} = \bigoplus_i V_i$

- Projection $v \rightarrow p_{V_n}(v)$ avec probabilité $\|p_{V_n}(v)\|^2$
- L'expérimentateur apprend la valeur de n

Produit tensoriel

- « spin 1/2 » : Élément de $\mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$ (ou de $P_1(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{S}^2$)
- Configuration de L spins : Élément de $\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{L \text{ fois}}$
- Exemple : pour $L = 2$, $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$
- $|\uparrow\downarrow\rangle \equiv (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \simeq ((u, v) \mapsto \langle\uparrow|u\rangle \langle\downarrow|v\rangle)^\dagger$

Intrication de deux spins : produit tensoriel plutôt que produit direct

Mesure du premier spin : $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle) \oplus \text{Vect}(|\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$

Mesure du second spin : $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle) \oplus \text{Vect}(|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$

Même résultat pour les $\frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \neq \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ ———— Résultat différent

deux spins

Produit tensoriel

- « spin 1/2 » : Élément de $\mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$ (ou de $P_1(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{S}^2$)
- Configuration de L spins : Élément de $\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{L \text{ fois}}$
- Exemple : pour $L = 2$, $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$
- $|\uparrow\downarrow\rangle \equiv (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \simeq ((u, v) \mapsto \langle \uparrow | u \rangle \langle \downarrow | v \rangle)^\dagger$

Intrication de deux spins : produit tensoriel plutôt que produit direct

Mesure du premier spin : $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle) \oplus \text{Vect}(|\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$

Mesure du second spin : $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle) \oplus \text{Vect}(|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$

$$\frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \neq \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

Même résultat pour les
deux spins

↑ Résultat différent

Produit tensoriel

- « spin 1/2 » : Élément de $\mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$ (ou de $P_1(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{S}^2$)
- Configuration de L spins : Élément de $\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{L \text{ fois}}$
- Exemple : pour $L = 2$, $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$
- $|\uparrow\downarrow\rangle \equiv (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \simeq ((u, v) \mapsto \langle\uparrow|u\rangle \langle\downarrow|v\rangle)^\dagger$

Intrication de deux spins : produit tensoriel plutôt que produit direct

Mesure du premier spin : $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle) \oplus \text{Vect}(|\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$

Mesure du second spin : $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Vect}(|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle) \oplus \text{Vect}(|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$

$$\frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \neq \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

Même résultat pour les
deux spins



Résultat différent

Représentations tensorielles de $SU(2)$

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \equiv \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n \text{ fois}}$ forme une représentation de $SU(2)$:

Pour $g \in SU(2)$

$$\pi(g) : |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \dots \otimes |v_n\rangle \mapsto |gv_1\rangle \otimes |gv_2\rangle \otimes \dots \otimes |gv_n\rangle$$

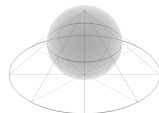
- Les formes n -linéaires symétriques forment une représentation irréductible, de dimension $2n + 1$. Un objet se transformant selon cette représentation s'appelle « spin $\frac{n}{2}$ »

Si $n = 0 \pmod{2}$
représentation de $\mathcal{O}(3)$.

Si $n = 1 \pmod{2}$
représentation projective de $\mathcal{O}(3)$.

- Exemple : pour un « spin $1/2$ »,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$



Représentations tensorielles de $SU(2)$

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \equiv \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{n \text{ fois}}$ forme une représentation de $SU(2)$:

Pour $g \in SU(2)$

$$g^{\otimes L} : |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \cdots \otimes |v_n\rangle \mapsto |gv_1\rangle \otimes |gv_2\rangle \otimes \cdots \otimes |gv_n\rangle$$

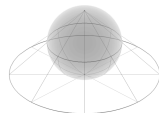
- Les formes n -linéaires symétriques forment une représentation irréductible, de dimension $2n + 1$. Un objet se transformant selon cette représentation s'appelle « spin $\frac{n}{2}$ »

Si $n = 0 \pmod{2}$
représentation de $\mathcal{O}(3)$.

Si $n = 1 \pmod{2}$
représentation projective de $\mathcal{O}(3)$.

- Exemple : pour un « spin $1/2$ »,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$



Représentations tensorielles de $SU(2)$

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \equiv \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{n \text{ fois}}$ forme une représentation de $SU(2)$:

Pour $g \in SU(2)$

$$g^{\otimes L} : |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \cdots \otimes |v_n\rangle \mapsto |gv_1\rangle \otimes |gv_2\rangle \otimes \cdots \otimes |gv_n\rangle$$

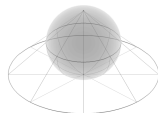
- Les formes n -linéaires symétriques forment une représentation irréductible, de dimension $2n + 1$. Un objet se transformant selon cette représentation s'appelle « spin $\frac{n}{2}$ »

Si $n = 0 \pmod{2}$
représentation de $\mathcal{O}(3)$.

Si $n = 1 \pmod{2}$
représentation projective de $\mathcal{O}(3)$.

- Exemple : pour un « spin $1/2$ »,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$



Représentations tensorielles de $SU(2)$

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \equiv \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{n \text{ fois}}$ forme une représentation de $SU(2)$:

Pour $g \in SU(2)$

$$g^{\otimes L} : |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \cdots \otimes |v_n\rangle \mapsto |gv_1\rangle \otimes |gv_2\rangle \otimes \cdots \otimes |gv_n\rangle$$

- Les formes n -linéaires symétriques forment une représentation irréductible, de dimension $2n + 1$. Un objet se transformant selon cette représentation s'appelle « spin $\frac{n}{2}$ »

Et une représentation de \mathfrak{S}^n

pour $\sigma \in \mathfrak{S}^n$,

$$\pi(\sigma) : |v_1, v_2, \dots, v_n\rangle \mapsto |v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}\rangle$$

Représentations tensorielles de $SU(2)$

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \equiv \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{n \text{ fois}}$ forme une représentation de $SU(2)$:

Pour $g \in SU(2)$

$$g^{\otimes L} : |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \cdots \otimes |v_n\rangle \mapsto |gv_1\rangle \otimes |gv_2\rangle \otimes \cdots \otimes |gv_n\rangle$$

- Les formes n -linéaires symétriques forment une représentation irréductible, de dimension $2n + 1$. Un objet se transformant selon cette représentation s'appelle « spin $\frac{n}{2}$ »

Et une représentation de \mathfrak{S}^n

pour $\sigma \in \mathfrak{S}^n$,

$$\mathcal{P}_\sigma : |v_1, v_2, \dots, v_n\rangle \mapsto |v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}\rangle$$

Chaîne de spin

Chaîne de spin : système quantique d'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_L$$

- L : nombre de sites
- $\mathcal{H}_i \simeq \mathbb{C}^2$ ou une autre représentation

Et de Hamiltonien $H = \sum_{i=1}^L H_{i,i+1}$

- $H_{i,i+1}$: interaction entre les sites i et $i+1$

Exemple : chaîne de spin "XXX" de Heisenberg

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$$

$$H = - \sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$$

$$\text{où } \mathcal{P}_{i,i+1} \equiv \mathcal{P}_\tau \text{ avec } \tau(j) = \begin{cases} i & \text{si } j = i+1 \\ i+1 & \text{si } j = i \\ j & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \mathcal{P}_{L,L+1} \equiv \mathcal{P}_{L,1}$$

Chaîne de spin

Chaîne de spin : système quantique d'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_L$$

- L : nombre de sites
- $\mathcal{H}_i \simeq \mathbb{C}^2$ ou une autre représentation

Et de Hamiltonien $H = \sum_{i=1}^L H_{i,i+1}$

- $H_{i,i+1}$: interaction entre les sites i et $i+1$

Exemple : chaîne de spin "XXX" de Heisenberg

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$$

$$H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$$

$$\text{où } \mathcal{P}_{i,i+1} \equiv \mathcal{P}_\tau \text{ avec } \tau(j) = \begin{cases} i & \text{si } j = i+1 \\ i+1 & \text{si } j = i \\ j & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \mathcal{P}_{L,L+1} \equiv \mathcal{P}_{L,1}$$

Chaîne de spin

Chaîne de spin : système quantique d'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_L$$

- L : nombre de sites
- $\mathcal{H}_i \simeq \mathbb{C}^2$ ou une autre représentation

Et de Hamiltonien $H = \sum_{i=1}^L H_{i,i+1}$

- $H_{i,i+1}$: interaction entre les sites i et $i+1$

Exemple : chaîne de spin "XXX" de Heisenberg

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$$

$$H = - \sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$$

$$\text{où } \mathcal{P}_{i,i+1} \equiv \mathcal{P}_\tau \text{ avec } \tau(j) = \begin{cases} i & \text{si } j = i+1 \\ i+1 & \text{si } j = i \\ j & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \mathcal{P}_{L,L+1} \equiv \mathcal{P}_{L,1}$$

Chaîne de spin

Chaîne de spin : système quantique d'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_L$$

- L : nombre de sites
- $\mathcal{H}_i \simeq \mathbb{C}^2$ ou une autre représentation

Et de Hamiltonien $H = \sum_{i=1}^L H_{i,i+1}$

- $H_{i,i+1}$: interaction entre les sites i et $i+1$

Exemple : chaîne de spin "XXX" de Heisenberg

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$$

$$H = - \sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$$

$$\text{où } \mathcal{P}_{i,i+1} \equiv \mathcal{P}_\tau \text{ avec } \tau(j) = \begin{cases} i & \text{si } j = i+1 \\ i+1 & \text{si } j = i \\ j & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \mathcal{P}_{L,L+1} \equiv \mathcal{P}_{L,1}$$

Plan

- 1 Présentation du modèle : Chaîne de spins
 - Formalisme de la mécanique quantique
 - « spins »
 - Chaînes de spins
- 2 Diagonalisation explicite : Ansatz de Bethe
- 3 Matrices de transfert et équation de Yang-Baxter
 - Matrices de transfert
 - Résultats "combinatoires"
 - Équations de Bethe

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$
- $$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

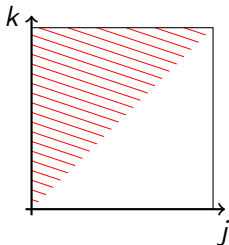
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{iLp_2} = S = e^{-iLp_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{ip_2}}{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{ip_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

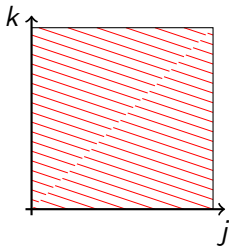
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{iLp_2} = S = e^{-iLp_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

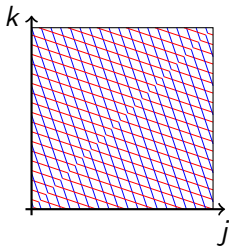
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{iLp_2} = S = e^{-iLp_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

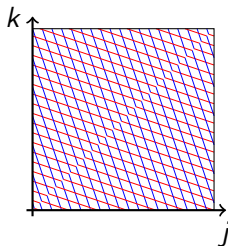
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{iLp_2} = S = e^{-iLp_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

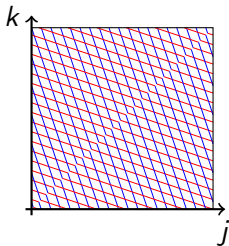
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \mathcal{P}_{i,i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{iLp_2} = S = e^{-iLp_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

- deux "excitations" : $|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$
où $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$, avec $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

- n "excitations" :

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq L} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\{j_1, j_2, \dots, j_n\}\rangle$$

c'est un vecteur propre si

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \iff \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^L \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_{\sigma'} e^{i \sum_k p_{\sigma'(k)} j_k} = E \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^L \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k}$$

$$\iff \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_{\sigma'} e^{i \sum_k p_{\sigma'(k)} j_k} = E \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} \iff \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_{\sigma'} e^{i \sum_k p_{\sigma'(k)} j_k} = E \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k}$$

Associé à la valeur propre

$$E = -L + \sum_k (4 - 4 \cos p_k)$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

- deux "excitations" : $|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$
où $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$, avec $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

- n "excitations" :

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq L} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\{j_1, j_2, \dots, j_n\}\rangle$$

c'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j < k} (1 + e^{i(p_{\sigma(j)} + p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}})$
- $\forall j, e^{i L p_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p, p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip}}{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip'}}$

Associé à la valeur propre

$$E = -L + \sum_k (4 - 4 \cos p_k)$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

- deux "excitations" : $|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$
où $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$, avec $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{i p_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{i p_1}}$

- n "excitations" :

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq L} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\{j_1, j_2, \dots, j_n\}\rangle$$

c'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j < k} (1 + e^{i(p_{\sigma(j)} + p_{\sigma(k)})} - 2e^{i p_{\sigma(k)}})$
- $\forall j, e^{i L p_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p, p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')} - 2e^{i p}}{1+e^{i(p+p')} - 2e^{i p'}}$

Associé à la valeur propre

$$E = -L + \sum_k (4 - 4 \cos p_k)$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

- deux "excitations" : $|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$
où $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$, avec $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{i p_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{i p_1}}$

- n "excitations" :

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq L} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\{j_1, j_2, \dots, j_n\}\rangle$$

c'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j < k} (1 + e^{i(p_{\sigma(j)} + p_{\sigma(k)})} - 2e^{i p_{\sigma(k)}})$
- $\forall j, e^{i L p_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p, p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')} - 2e^{i p}}{1+e^{i(p+p')} - 2e^{i p'}}$

Associé à la valeur propre

$$E = -L + \sum_k (4 - 4 \cos p_k)$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

- deux "excitations" : $|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$
où $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$, avec $S = -\frac{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_2}}{1+e^{i(p_1+p_2)}-2e^{ip_1}}$

- n "excitations" :

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq L} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} |\{j_1, j_2, \dots, j_n\}\rangle$$

c'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j < k} (1 + e^{i(p_{\sigma(j)} + p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}})$
- $\forall j, e^{i L p_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$ où $S(p, p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip}}{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip'}}$

Associé à la valeur propre

$$E = -L + \sum_k (4 - 4 \cos p_k)$$

spectre

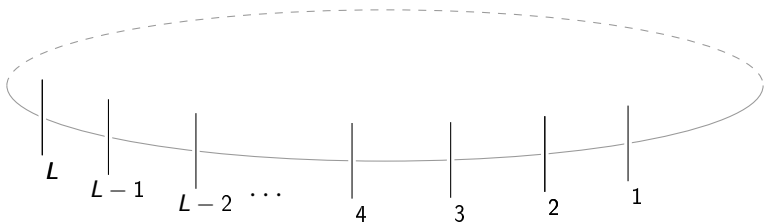
leur
nombre
est
 $\dim(\mathcal{H})$

Opérateurs T de la chaîne de Heisenberg

$$H = -\sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = -\frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a \left((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \right)$$

opérateur sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$



$$\text{trace partielle : } \langle y | \text{tr}_a M | x \rangle = \sum_{z \in \mathcal{B}_a} (\langle y | \otimes \langle z |) M (| x \rangle \otimes | z \rangle)$$

où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\text{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; \mathcal{B}_a : b.o.n. de \mathcal{H}_a .

$$\begin{aligned} & ((u-v)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j})(u\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})(v\mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k}) \\ &= (v\mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k})(u\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})((u-v)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j}) \end{aligned}$$

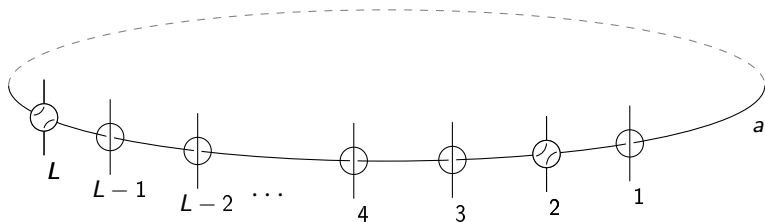


Opérateurs T de la chaîne de Heisenberg

$$H = - \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = - \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a ((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}))$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y | \text{tr}_a M | x \rangle = \sum_{z \in \mathcal{B}_a} (\langle y | \otimes \langle z |) M (| x \rangle \otimes | z \rangle)$
 où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\text{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; \mathcal{B}_a : b.o.n. de \mathcal{H}_a .

$$\begin{aligned} & ((u - v) \mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j})(u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})(v \mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k}) \\ &= (v \mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k})(u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})((u - v) \mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j}) \end{aligned}$$

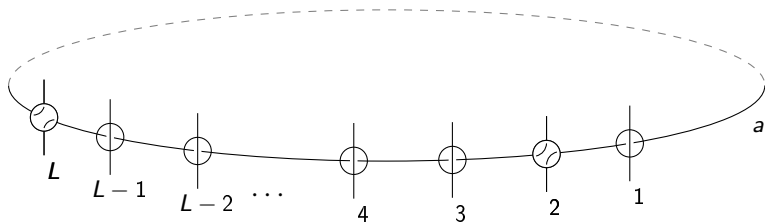


Opérateurs T de la chaîne de Heisenberg

$$H = - \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = - \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a ((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}))$$

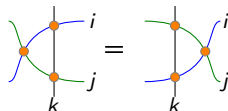
opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$



$$\text{trace partielle : } \langle y | \text{tr}_a M | x \rangle = \sum_{z \in \mathcal{B}_a} (\langle y | \otimes \langle z |) M (| x \rangle \otimes | z \rangle)$$

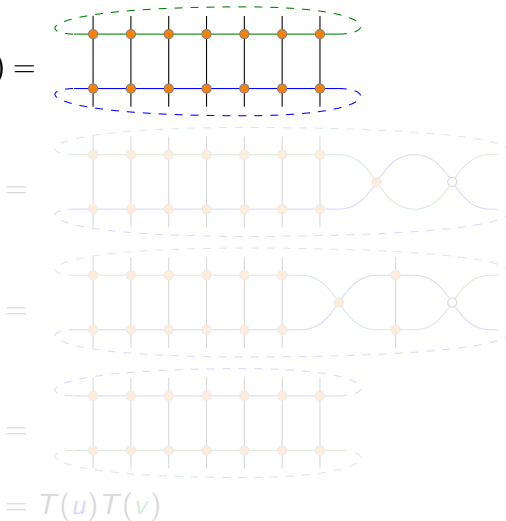
où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\text{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; \mathcal{B}_a : b.o.n. de \mathcal{H}_a .

$$\begin{aligned} & \bullet ((u - v) \mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j})(u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})(v \mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k}) \\ &= (v \mathbb{I} + \mathcal{P}_{j,k})(u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,k})((u - v) \mathbb{I} + \mathcal{P}_{i,j}) \end{aligned}$$



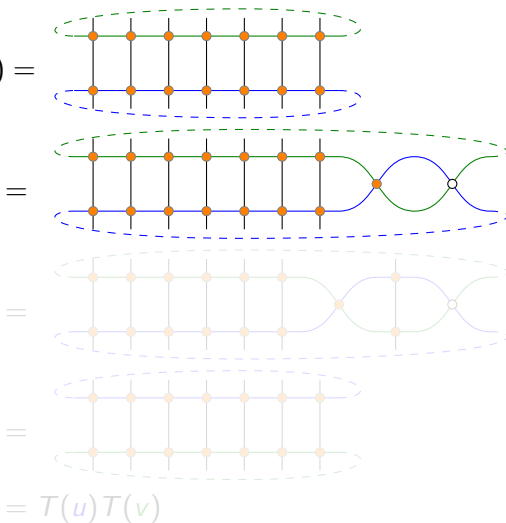
Commutation des operators T

$$T(v)T(u) =$$



Commutation des operators T

$$T(v)T(u) =$$



Commutation des operators T

$$\begin{aligned}
 T(v)T(u) &= \text{Diagram 1} \\
 &= \text{Diagram 2} \\
 &= \text{Diagram 3} \\
 &= \text{Diagram 4} \\
 &= T(u)T(v)
 \end{aligned}$$

The diagrams illustrate the commutation of the operators $T(u)$ and $T(v)$ using the Yang-Baxter equation. Each diagram consists of two horizontal rows of sites (orange dots) connected by vertical lines. The top row is enclosed in a green dashed oval, and the bottom row is enclosed in a blue dashed oval. The sites are labeled with v and u in the first diagram. The diagrams show the evolution of the system as the operators $T(u)$ and $T(v)$ are applied, with the final result being the commuted product $T(u)T(v)$.

Commutation des operators T

$$\begin{aligned}
 T(v)T(u) &= \text{Diagram 1} \\
 &= \text{Diagram 2} \\
 &= \text{Diagram 3} \\
 &= \text{Diagram 4} \\
 &= T(u)T(v)
 \end{aligned}$$

The diagrams illustrate the commutation of the operators $T(u)$ and $T(v)$ using the Yang-Baxter equation. Each diagram consists of two horizontal rows of sites (orange dots) connected by vertical lines. The top row is enclosed in a green dashed oval, and the bottom row is enclosed in a blue dashed oval. The diagrams show how the operators $T(u)$ and $T(v)$ act on the system, with the final result being the commuted product $T(u)T(v)$.

Commutation des operators T

$$\begin{aligned}
 T(v)T(u) &= \text{Diagram 1} \\
 &= \text{Diagram 2} \\
 &= \text{Diagram 3} \\
 &= \text{Diagram 4} \\
 &= T(u)T(v)
 \end{aligned}$$

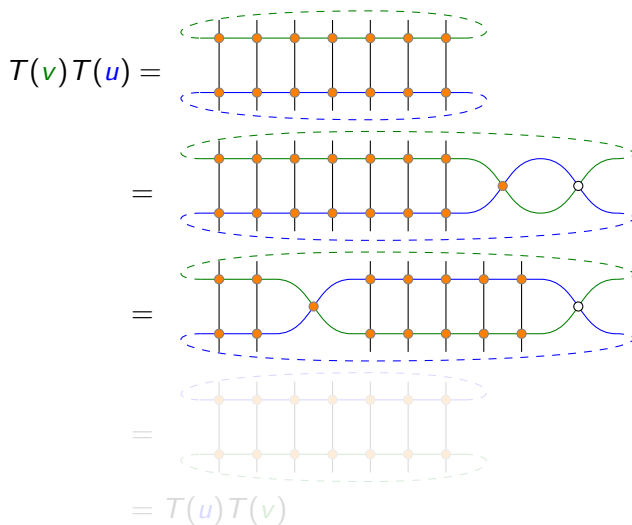
The diagrams illustrate the commutation of the operators $T(u)$ and $T(v)$ using the Yang-Baxter equation. Each diagram consists of two horizontal rows of sites (orange dots) connected by vertical lines. The top row is enclosed in a green dashed oval, and the bottom row is enclosed in a blue dashed oval. The diagrams show how the operators $T(u)$ and $T(v)$ act on the sites and how their order can be swapped using the Yang-Baxter equation, which is represented by the crossing of lines in the diagrams.

Commutation des operators T

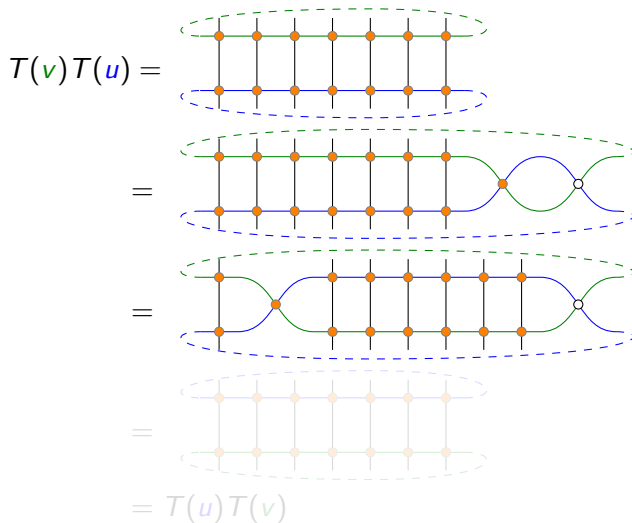
$$\begin{aligned}
 T(v)T(u) &= \text{Diagram 1} \\
 &= \text{Diagram 2} \\
 &= \text{Diagram 3} \\
 &= \text{Diagram 4} \\
 &= T(u)T(v)
 \end{aligned}$$

The diagrams illustrate the commutation of the operators $T(u)$ and $T(v)$ using the Yang-Baxter equation. Each diagram consists of two horizontal rows of sites (orange dots) connected by vertical lines. The top row is enclosed in a green dashed oval, and the bottom row is enclosed in a blue dashed oval. The diagrams show how the operators $T(u)$ and $T(v)$ act on the sites, with the final result being the commuted product $T(u)T(v)$.

Commutation des operators T

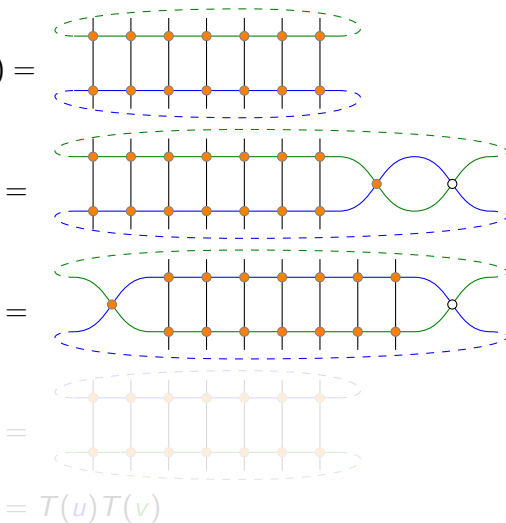


Commutation des operators T



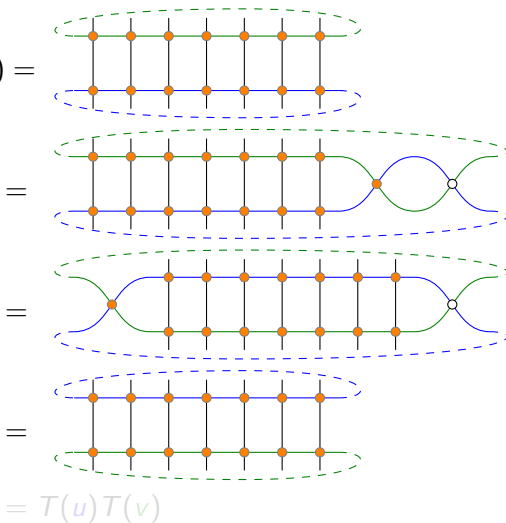
Commutation des operators T

$$T(v)T(u) =$$



Commutation des operators T

$$T(v)T(u) =$$



Commutation des operators T

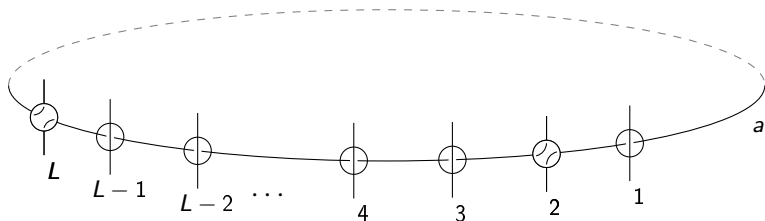
$$\begin{aligned}
 T(v)T(u) &= \\
 &= \\
 &= \\
 &= \\
 &= T(u)T(v)
 \end{aligned}$$

Opérateurs T de la chaîne de Heisenberg

$$H = - \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = - \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a ((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}))$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$



$$\text{trace partielle : } \langle y | \text{tr}_a M | x \rangle = \sum_{z \in \mathcal{B}_a} (\langle y | \otimes \langle z |) M (| x \rangle \otimes | z \rangle)$$

où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\text{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; \mathcal{B}_a : b.o.n. de \mathcal{H}_a .

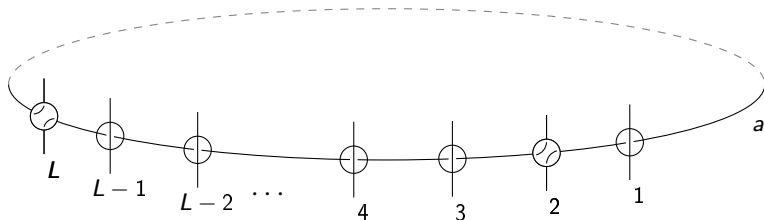
- $[T(u), T(v)] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = - \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} = - \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a ((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}))$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^K)^{\otimes L}$



$$\text{trace partielle : } \langle y | \text{tr}_a M | x \rangle = \sum_{z \in \mathcal{B}_a} (\langle y | \otimes \langle z |) M (| x \rangle \otimes | z \rangle)$$

où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\text{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; \mathcal{B}_a : b.o.n. de \mathcal{H}_a .

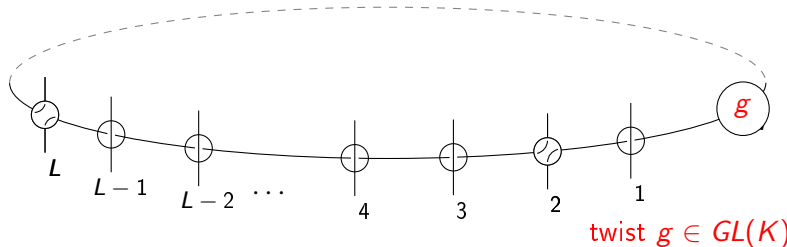
- $[T(u), T(v)] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = \ll - \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} \gg = - \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a ((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot g)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^K)^{\otimes L}$



trace partielle : $\langle y | \text{tr}_a M | x \rangle = \sum_{z \in \mathcal{B}_a} (\langle y | \otimes \langle z |) M (| x \rangle \otimes | z \rangle)$
 où $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_a)$, $\text{tr}_a(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$, $x, y \in \mathcal{H}_p$; \mathcal{B}_a : b.o.n. de \mathcal{H}_a .

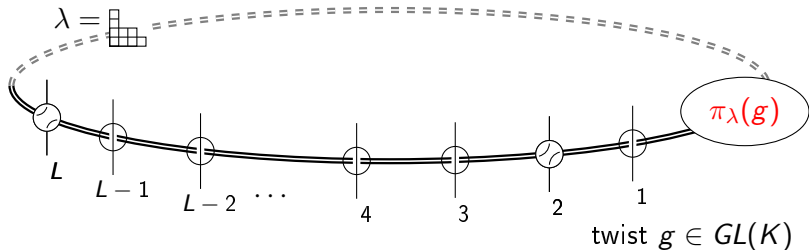
- $[T(u), T(v)] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = \ll - \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} \gg = - \frac{d}{du} \log T^{\square}(u) \Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \text{tr}_a \left((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_{\lambda}(g) \right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^K)^{\otimes L}$



Opérateur de permutation **généralisé** : $\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}^{(i)} \otimes \pi_{\lambda}(e_{\beta,\alpha}^{(j)})$

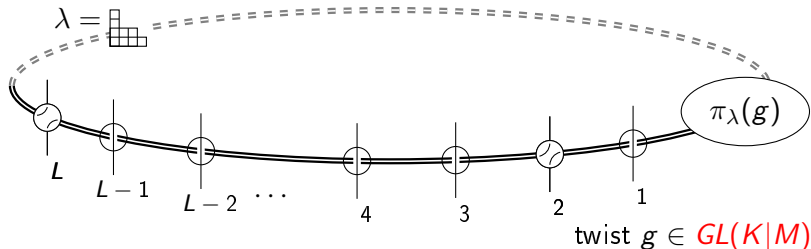
- $[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = \ll - \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} \gg = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \Big|_{u=0}$$

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_a \left((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^{K|M})^{\otimes L}$



Opérateur de permutation généralisé : $\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}^{(i)} \otimes \pi_\lambda(e_{\beta,\alpha}^{(j)})$

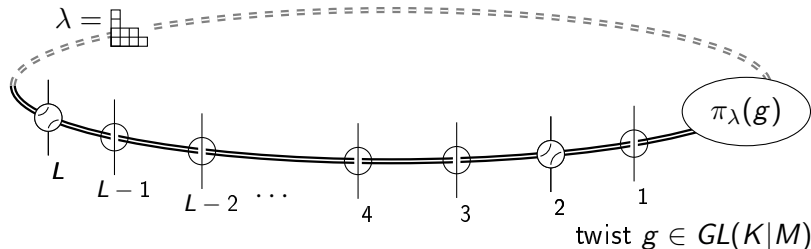
- $[T^\lambda(u), T^\mu(v)] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = \ll - \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} \gg = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \Big|_{u=0}$$

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_a (((u - \xi_L) \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \xi_1) \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g))$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^{K|M})^{\otimes L}$



Opérateur de permutation généralisé : $\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}^{(i)} \otimes \pi_\lambda(e_{\beta,\alpha}^{(j)})$

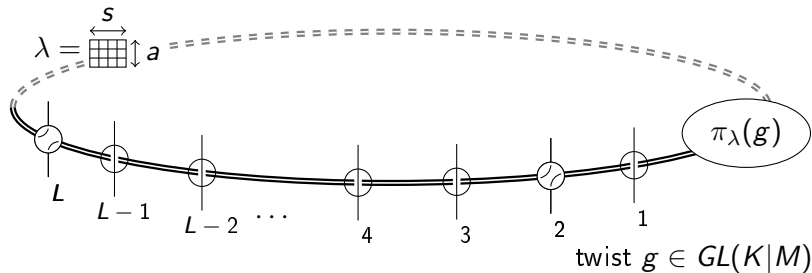
- $[T^\lambda(u), T^\mu(v)] = 0$

Opérateurs T généralisant la chaîne de Heisenberg

$$H = \langle - \sum_i \mathcal{P}_{i,i+1} \rangle = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \Big|_{u=0}$$

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_a (((u - \xi_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \xi_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g))$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^{K|M})^{\otimes L}$

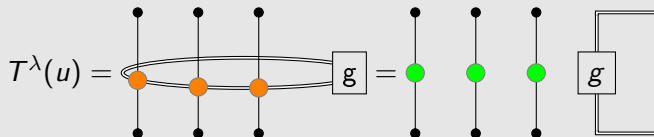


- $[T^\lambda(u), T^\mu(v)] = 0$
- Pour des diagrammes de Young rectangulaires,

$$T^{a,s}(u+1) \cdot T^{a,s}(u) = T^{a+1,s}(u+1) \cdot T^{a-1,s}(u) + T^{a,s-1}(u+1) \cdot T^{a,s+1}(u)$$

Dérivée par rapport au twist

Mode de calcul explicite



dessin pour la chaîne de taille $L = 3$,
(opérateurs sur $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^N)^{\otimes 3}$)

Dérivée par rapport au twist

let $\boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N)$, $\underbrace{\boxed{f(g)}}_L \in \mathcal{L}((\mathbb{C}^N)^{\otimes L})$

dérivée de f par rapport à $\log(g)$:

$$\underbrace{\boxed{\hat{D} \otimes f(g)}}_{L+1} \equiv \left. \boxed{\partial_{\phi^t} f(e^{\phi} g)} \right|_{\phi \rightarrow 0}$$

$$\bullet \left(\hat{D} \otimes g \right)_{\alpha_1, \alpha_0}^{\beta_1, \beta_0} = \frac{\partial_{\phi_{\beta_1}^{\alpha_1}}}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} (e^{\phi} g)_{\alpha_0}^{\beta_0} \Big|_{\phi \rightarrow 0} = \frac{\partial_{\phi_{\beta_1}^{\alpha_1}}}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} \phi_{\alpha_0}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_0} = \delta_{\alpha_1}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_1}$$

$$\rightsquigarrow \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0}(\mathbb{I} \otimes g) \quad \boxed{\hat{D}} \boxed{g} = \boxed{\begin{array}{c} \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \end{array}} \boxed{g} = \text{diagram with crossing and box } g$$

$$\bullet \hat{D} \otimes \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0} \mathcal{P}_{2,0}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes g)$$

$$\boxed{\hat{D}} \boxed{\hat{D}} \boxed{g} = \text{diagram with two crossings} \boxed{g} = \text{diagram with a loop and box } g$$

Dérivée par rapport au twist

let $\boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N)$, $\boxed{} \in \mathcal{L}((\mathbb{C}^N)^{\otimes L})$

dérivée de f par rapport à $\log(g)$:

$$\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} \equiv \left. \boxed{\partial_{\phi^t}} \boxed{f(e^{\phi} g)} \right|_{\phi \rightarrow 0}$$

$$\bullet \left(\hat{D} \otimes g \right)_{\alpha_1, \alpha_0}^{\beta_1, \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} (e^{\phi} g)_{\alpha_0}^{\beta_0} \Big|_{\phi \rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} \phi_{\alpha_0}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_1} = \delta_{\alpha_1}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_1}$$

$$\rightsquigarrow \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0} (\mathbb{I} \otimes g)$$

$$\bullet \hat{D} \otimes \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0} \mathcal{P}_{2,0} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes g)$$

où $\bullet = u\mathbb{I} + \mathcal{P}$, $\bullet = u\mathbb{I} + \hat{D}$

Dérivée par rapport au twist

let $\boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N)$, $\boxed{} \in \mathcal{L}((\mathbb{C}^N)^{\otimes L})$

dérivée de f par rapport à $\log(g)$:

$$\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} \equiv \left. \boxed{\partial_{\phi^t}} \boxed{f(e^\phi g)} \right|_{\phi \rightarrow 0}$$

$$\bullet \left(\hat{D} \otimes g \right)_{\alpha_1, \alpha_0}^{\beta_1, \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} (e^\phi g)_{\alpha_0}^{\beta_0} \Big|_{\phi \rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} \phi_{\alpha_0}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_0} = \delta_{\alpha_1}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_1}$$

$$\rightsquigarrow \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0} (\mathbb{I} \otimes g)$$

$$\bullet \hat{D} \otimes \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0} \mathcal{P}_{2,0} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes g)$$

où $\bullet = u\mathbb{I} + \mathcal{P}$, $\bullet = u\mathbb{I} + \hat{D}$

Dérivée par rapport au twist

let $\boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N)$, $\boxed{} \in \mathcal{L}((\mathbb{C}^N)^{\otimes L})$

dérivée de f par rapport à $\log(g)$:

$$\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} \equiv \left. \boxed{\partial_{\phi^t}} \boxed{f(e^{\phi} g)} \right|_{\phi \rightarrow 0}$$

$$\bullet \left(\hat{D} \otimes g \right)_{\alpha_1, \alpha_0}^{\beta_1, \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} (e^{\phi} g)_{\alpha_0}^{\beta_0} \Big|_{\phi \rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} \phi_{\alpha_0}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_0} = \delta_{\alpha_1}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_1}$$

$$\rightsquigarrow \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0} (\mathbb{I} \otimes g)$$

$$\bullet \hat{D} \otimes \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0} \mathcal{P}_{2,0} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes g)$$

où $\bullet = u\mathbb{I} + \mathcal{P}$, $\bullet = u\mathbb{I} + \hat{D}$

Dérivée par rapport au twist

let $\boxed{g} \in GL(\mathbb{C}^N)$, $\boxed{} \in \mathcal{L}((\mathbb{C}^N)^{\otimes L})$

dérivée de f par rapport à $\log(g)$:

$$\boxed{\hat{D} \otimes f(g)} \equiv \left. \boxed{\partial_{\phi^t}} \boxed{f(e^{\phi} g)} \right|_{\phi \rightarrow 0}$$

$$\bullet \left(\hat{D} \otimes g \right)_{\alpha_1, \alpha_0}^{\beta_1, \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} (e^{\phi} g)_{\alpha_0}^{\beta_0} \Big|_{\phi \rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta_1}^{\alpha_1}} \phi_{\alpha_0}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_0} = \delta_{\alpha_1}^{\beta_0} g_{\alpha_0}^{\beta_1}$$

$$\rightsquigarrow \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0} (\mathbb{I} \otimes g)$$

$$\bullet \hat{D} \otimes \hat{D} \otimes g = \mathcal{P}_{1,0} \mathcal{P}_{2,0} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes g)$$

où $\bullet = u\mathbb{I} + \mathcal{P}$, $\bullet = u\mathbb{I} + \hat{D}$

Dérivée par rapport au twist

Mode de calcul explicite

$$\begin{aligned}
 T^\lambda(u) &= \text{diagram with 3 orange nodes and a box } g = \text{diagram with 3 green nodes and a box } g \\
 &= \left(u - \zeta_L + \hat{D}\right) \otimes \cdots \otimes \left(u - \zeta_1 + \hat{D}\right) \chi_\lambda(g)
 \end{aligned}$$

On peut alors généraliser les relations

$$\bullet \chi_\lambda(g) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} x_k^{\lambda_j + N - j}}{\det_{1 \leq j, k \leq N} x_k^{N - j}}$$

$$g = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$$

$$\bullet \chi_\lambda(g) = \det_{1 \leq j, k \leq \ell(\lambda)} \chi_{(\lambda_k + j - k)}(g)$$

$$\Leftrightarrow T^{a,s}(u+1) \cdot T^{a,s}(u) = T^{a+1,s}(u+1) \cdot T^{a-1,s}(u) + T^{a,s-1}(u+1) \cdot T^{a,s+1}(u)$$

Dérivée par rapport au twist

Mode de calcul explicite

$$T^\lambda(u) = \text{diagram with 3 orange nodes and a box } g = \text{diagram with 3 green nodes and a box } g$$

$$= (u - \zeta_L + \hat{D}) \otimes \cdots \otimes (u - \zeta_1 + \hat{D}) \chi_\lambda(g)$$

On peut alors généraliser les relations

$$\bullet \chi_\lambda(g) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} x_k^{\lambda_j + N - j}}{\det_{1 \leq j, k \leq N} x_k^{N - j}}$$

$$g = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$$

$$\bullet \chi_\lambda(g) = \det_{1 \leq j, k \leq \ell(\lambda)} \chi_{(\lambda_k + j - k)}(g)$$

$$\Leftrightarrow T^{a,s}(u+1) \cdot T^{a,s}(u) = T^{a+1,s}(u+1) \cdot T^{a-1,s}(u) + T^{a,s-1}(u+1) \cdot T^{a,s+1}(u)$$

Dérivée par rapport au twist

Mode de calcul explicite

$$T^\lambda(u) = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} = \left(u - \zeta_L + \hat{D}\right) \otimes \cdots \otimes \left(u - \zeta_1 + \hat{D}\right) \chi_\lambda(g)$$

The diagram shows the explicit calculation of the transfer matrix $T^\lambda(u)$. It is represented as a product of local matrices $(u - \zeta_k + \hat{D})$ and a character $\chi_\lambda(g)$. The first diagram shows three orange nodes connected by horizontal lines, with a box labeled g to the right. The second diagram shows three green nodes connected by horizontal lines, with a box labeled g to the right.

On peut alors généraliser les relations

$$\bullet \chi_\lambda(g) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} x_k^{\lambda_j + N - j}}{\det_{1 \leq j, k \leq N} x_k^{N - j}}$$

$$g = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$$

$$\bullet \chi_\lambda(g) = \det_{1 \leq j, k \leq \ell(\lambda)} \chi_{(\lambda_k + j - k)}(g)$$

$$\Leftrightarrow T^{a,s}(u+1) \cdot T^{a,s}(u) = T^{a+1,s}(u+1) \cdot T^{a-1,s}(u) + T^{a,s-1}(u+1) \cdot T^{a,s+1}(u)$$

Dérivée par rapport au twist

Mode de calcul explicite

$$\begin{aligned}
 T^\lambda(u) &= \text{diagram with 3 orange nodes and a box } g = \text{diagram with 3 green nodes and a box } g \\
 &= \left(u - \zeta_L + \hat{D}\right) \otimes \cdots \otimes \left(u - \zeta_1 + \hat{D}\right) \chi_\lambda(g)
 \end{aligned}$$

On peut alors généraliser les relations

$$\bullet \chi_\lambda(g) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} x_k^{\lambda_j + N - j}}{\det_{1 \leq j, k \leq N} x_k^{N - j}}$$

$$g = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$$

$$\bullet \chi_\lambda(g) = \det_{1 \leq j, k \leq \ell(\lambda)} \chi(\lambda_k + j - k)(g)$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow T^{a,s}(u+1) \cdot T^{a,s}(u) &= \\
 T^{a+1,s}(u+1) \cdot T^{a-1,s}(u) &+ T^{a,s-1}(u+1) \cdot T^{a,s+1}(u)
 \end{aligned}$$

Calcul explicite d'opérateurs T

- $\sum_{z \geq 0} T_{1,s} z^s = \bigotimes_i \left(u - \zeta_i + \hat{D} \right) w(z)$

où $w(z) = \sum_{z \geq 0} \chi(s) z^s = \frac{1}{\det(1 - g z)}$.

- $\hat{D}^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} | \quad \times \\ | \quad \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \quad | \\ \times \quad | \end{array} + \begin{array}{c} \times \quad \times \\ \times \quad \times \end{array} \right) w(z).$

$$(1 + \hat{D})^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array} + \begin{array}{c} | \quad \times \\ \vdots \quad \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \quad | \\ \vdots \quad \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \quad \times \\ \vdots \quad \times \end{array} \right) w(z)$$

où $\text{—} = \frac{g z}{1 - g z}$ et $\text{---} = \frac{1}{1 - g z}$

$$\rightsquigarrow \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_2) \right] = \frac{z_2}{z_1} \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_2) \right]$$

- avec des identités sur des déterminants (Jacobi, Plücker, ...),
obtention Identités sur des déterminants d'opérateurs T .

Calcul explicite d'opérateurs T

- $\sum_{z \geq 0} T_{1,s} z^s = \bigotimes_i \left(u - \zeta_i + \hat{D} \right) w(z)$

où $w(z) = \sum_{z \geq 0} \chi(s) z^s = \frac{1}{\det(1 - g z)}$.

- $\hat{D}^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} | \quad \diagup \quad \diagdown \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} | \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad | \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \end{array} \right) w(z).$

$$(1 + \hat{D})^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} | \quad \diagup \quad \diagdown \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} | \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad | \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \end{array} \right) w(z)$$

où $\text{—} = \frac{g z}{1 - g z}$ et $\text{⋯} = \frac{1}{1 - g z}$

$$\leadsto \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_2) \right] = \frac{z_2}{z_1} \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_2) \right]$$

- avec des identités sur des déterminants (Jacobi, Plücker, ...),
obtention Identités sur des déterminants d'opérateurs T .

Calcul explicite d'opérateurs T

- $\sum_{z \geq 0} T_{1,s} z^s = \bigotimes_i \left(u - \zeta_i + \hat{D} \right) w(z)$

où $w(z) = \sum_{z \geq 0} \chi(s) z^s = \frac{1}{\det(1 - g z)}$.

- $\hat{D}^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \end{array} \right) w(z).$

$$(1 + \hat{D})^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \end{array} \right) w(z)$$

où $\text{—} = \frac{g z}{1 - g z}$ et $\text{⋯} = \frac{1}{1 - g z}$

$$\rightsquigarrow \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_2) \right] = \frac{z_2}{z_1} \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_2) \right]$$

- avec des identités sur des déterminants (Jacobi, Plücker, ...),
obtention Identités sur des déterminants d'opérateurs T .

Calcul explicite d'opérateurs T

- $\sum_{z \geq 0} T_{1,s} z^s = \bigotimes_i \left(u - \zeta_i + \hat{D} \right) w(z)$

où $w(z) = \sum_{z \geq 0} \chi(s) z^s = \frac{1}{\det(1 - g z)}$.

- $\hat{D}^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \end{array} \right) w(z).$

$$(1 + \hat{D})^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \end{array} \right) w(z)$$

où $\text{—} = \frac{g z}{1 - g z}$ et $\text{---} = \frac{1}{1 - g z}$

$$\rightsquigarrow \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_2) \right] = \frac{z_2}{z_1} \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_2) \right]$$

- avec des identités sur des déterminants (Jacobi, Plücker, ...),
obtention Identités sur des déterminants d'opérateurs T .

Calcul explicite d'opérateurs T

- $\sum_{z \geq 0} T_{1,s} z^s = \bigotimes_i \left(u - \zeta_i + \hat{D} \right) w(z)$

où $w(z) = \sum_{z \geq 0} \chi(s) z^s = \frac{1}{\det(1 - g z)}$.

- $\hat{D}^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \end{array} \right) w(z).$

$$(1 + \hat{D})^{\otimes 3} w(z) = \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \end{array} \right) w(z)$$

où $\text{—} = \frac{g z}{1 - g z}$ et $\text{---} = \frac{1}{1 - g z}$

$$\rightsquigarrow \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_2) \right] = \frac{z_2}{z_1} \left[\hat{D}^{\otimes L} w(z_1) \right] \cdot \left[(1 + \hat{D})^{\otimes L} w(z_2) \right]$$

- avec des identités sur des déterminants (Jacobi, Plücker, ...),
obtention Identités sur des déterminants d'opérateurs T .

Opérateurs T et Q Généralisation de $\chi_\lambda(g) = \det x_k^{\lambda_j + N - j} / \det x_k^{N - j}$ On définit Q (qui commute avec T , par

$$Q_j = \bigotimes_i \left(u + (N - 1) - \zeta_i + \hat{D} \right) \prod_{k \neq j} \det \frac{1}{1 - g t_k} \Big|_{t_k \rightarrow 1/x_k}.$$

Alors,

$$T^\lambda(u) = \frac{\det \left(x_j^{\lambda_k - k + 1} Q_j(u + (\lambda_k - k + 1)) \right)_{1 \leq j, k \leq N}}{\Delta(x_1, \dots, x_N)}$$

De plus,

$$T^\lambda(u) = \frac{\det \left(T^{(\lambda_j + i - j)}(u + 1 - i) \right)_{1 \leq j, k \leq \ell(\lambda)}}{\prod_{k=1}^{\ell(\lambda)-1} T^0(u - k)}$$

Opérateurs T et Q

Généralisation de $\chi_\lambda(g) = \det x_k^{\lambda_j + N - j} / \det x_k^{N - j}$

On définit Q (qui commute avec T , par

$$Q_j = \bigotimes_i \left(u + (N - 1) - \zeta_i + \hat{D} \right) \prod_{k \neq j} \det \frac{1}{1 - g t_k} \Big|_{t_k \rightarrow 1/x_k}.$$

Alors,

$$T^\lambda(u) = \frac{\det \left(x_j^{\lambda_k - k + 1} Q_j(u + (\lambda_k - k + 1)) \right)_{1 \leq j, k \leq N}}{\Delta(x_1, \dots, x_N)}$$

De plus,

$$T^\lambda(u) = \frac{\det \left(T^{(\lambda_j + i - j)}(u + 1 - i) \right)_{1 \leq j, k \leq \ell(\lambda)}}{\prod_{k=1}^{\ell(\lambda)-1} T^{(k)}(u - k)}$$

Hirota equation \leftrightarrow Spectrum

Trois conditions fixent le spectre de la chaîne de spin :

- Q_j is polynomial in u (for $1 \leq j \leq N$)
- $T^\emptyset(u) = \prod_i (u - \zeta_i)$
- $H = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \big|_{u=0}$

- Par exemple pour la chaîne de Heisenberg ($g \in \text{SU}(2)$, $\zeta_i = 0$) :
Sur un sous espace propre de H , $Q_1(u) = \prod_j (u - \theta_j)$

$$(x_1 - x_2)u^L = x_1 Q_1(u) Q_2(u-1) - x_2 Q_1(u-1) Q_2(u)$$

$$(x_1 - x_2)(u+1)^L = x_1 Q_1(u+1) Q_2(u) - x_2 Q_1(u) Q_2(u+1)$$

$$\forall j, \quad \frac{\prod_k (\theta_j - \theta_k - 1)}{\prod_k (\theta_j - \theta_k + 1)} = -\frac{x_2}{x_1} \left(\frac{\theta_j}{\theta_j + 1} \right)^L \quad E = \sum_j \frac{1}{\theta_j (\theta_j + 1)}$$

retrouve les équations de Bethe, avec $\theta_j = e^{ip_j} / (1 - e^{ip_j})$

Hirota equation \leftrightarrow Spectrum

Trois conditions fixent le spectre de la chaîne de spin :

- Q_j is polynomial in u (for $1 \leq j \leq N$)
 - $T^\emptyset(u) = \prod_i (u - \zeta_i)$
 - $H = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \big|_{u=0}$
- Par exemple pour la chaîne de Heisenberg ($g \in \text{SU}(2), \zeta_i = 0$) :
Sur un sous espace propre de H , $Q_1(u) = \prod_j (u - \theta_j)$

$$(x_1 - x_2)u^L = x_1 Q_1(u) Q_2(u-1) - x_2 Q_1(u-1) Q_2(u)$$

$$(x_1 - x_2)(u+1)^L = x_1 Q_1(u+1) Q_2(u) - x_2 Q_1(u) Q_2(u+1)$$

$$\forall j, \quad \frac{\prod_k (\theta_j - \theta_k - 1)}{\prod_k (\theta_j - \theta_k + 1)} = -\frac{x_2}{x_1} \left(\frac{\theta_j}{\theta_j + 1} \right)^L \quad E = \sum_j \frac{1}{\theta_j (\theta_j + 1)}$$

retrouve les équations de Bethe, avec $\theta_j = e^{ip_j} / (1 - e^{ip_j})$

Hirota equation \leftrightarrow Spectrum

Trois conditions fixent le spectre de la chaîne de spin :

- Q_j is polynomial in u (for $1 \leq j \leq N$)
- $T^\emptyset(u) = \prod_i (u - \zeta_i)$
- $H = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \big|_{u=0}$

- Par exemple pour la chaîne de Heisenberg ($g \in \text{SU}(2), \zeta_i = 0$) :
Sur un sous espace propre de H , $Q_1(u) = \prod_j (u - \theta_j)$

$$(x_1 - x_2)u^L = x_1 Q_1(u) Q_2(u - 1) - x_2 Q_1(u - 1) Q_2(u)$$

$$(x_1 - x_2)(u + 1)^L = x_1 Q_1(u + 1) Q_2(u) - x_2 Q_1(u) Q_2(u + 1)$$

$$\forall j, \quad \frac{\prod_k (\theta_j - \theta_k - 1)}{\prod_k (\theta_j - \theta_k + 1)} = -\frac{x_2}{x_1} \left(\frac{\theta_j}{\theta_j + 1} \right)^L \quad E = \sum_j \frac{1}{\theta_j (\theta_j + 1)}$$

retrouve les équations de Bethe, avec $\theta_j = e^{ip_j} / (1 - e^{ip_j})$

Hirota equation \leftrightarrow Spectrum

Trois conditions fixent le spectre de la chaîne de spin :

- Q_j is polynomial in u (for $1 \leq j \leq N$)
- $T^\emptyset(u) = \prod_i (u - \zeta_i)$
- $H = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \big|_{u=0}$

- Par exemple pour la chaîne de Heisenberg ($g \in \text{SU}(2), \zeta_i = 0$) :
Sur un sous espace propre de H , $Q_1(u) = \prod_j (u - \theta_j)$

$$(x_1 - x_2)u^L = x_1 Q_1(u) Q_2(u - 1) - x_2 Q_1(u - 1) Q_2(u)$$

$$(x_1 - x_2)(u + 1)^L = x_1 Q_1(u + 1) Q_2(u) - x_2 Q_1(u) Q_2(u + 1)$$

$$\forall j, \quad \frac{\prod_k (\theta_j - \theta_{k-1})}{\prod_k (\theta_j - \theta_{k+1})} = - \frac{x_2}{x_1} \left(\frac{\theta_j}{\theta_{j+1}} \right)^L \quad E = \sum_j \frac{1}{\theta_j (\theta_{j+1})}$$

retrouve les équations de Bethe, avec $\theta_j = e^{ip_j} / (1 - e^{ip_j})$

Hirota equation \leftrightarrow Spectrum

Trois conditions fixent le spectre de la chaîne de spin :

- Q_j is polynomial in u (for $1 \leq j \leq N$)
- $T^\emptyset(u) = \prod_i (u - \zeta_i)$
- $H = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \big|_{u=0}$

- Par exemple pour la chaîne de Heisenberg ($g \in \text{SU}(2), \zeta_i = 0$) :

Sur un sous espace propre de H , $Q_1(u) = \prod_j (u - \theta_j)$

$$(x_1 - x_2)\theta_j^L = x_1 \cancel{Q_1(\theta_j)} Q_2(\theta_j - 1) - x_2 Q_1(\theta_j - 1) \cancel{Q_2(\theta_j)}$$

$$(x_1 - x_2)(\theta_j + 1)^L = x_1 Q_1(\theta_j + 1) Q_2(\theta_j) - x_2 \cancel{Q_1(\theta_j)} \cancel{Q_2(\theta_j + 1)}$$

$$\forall j, \quad \frac{\prod_k (\theta_j - \theta_{k-1})}{\prod_k (\theta_j - \theta_{k+1})} = - \frac{x_2}{x_1} \left(\frac{\theta_j}{\theta_j + 1} \right)^L \quad E = \sum_j \frac{1}{\theta_j (\theta_j + 1)}$$

retrouve les équations de Bethe, avec $\theta_j = e^{ip_j} / (1 - e^{ip_j})$

Hirota equation \leftrightarrow Spectrum

Trois conditions fixent le spectre de la chaîne de spin :

- Q_j is polynomial in u (for $1 \leq j \leq N$)
- $T^\emptyset(u) = \prod_i (u - \zeta_i)$
- $H = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \big|_{u=0}$

- Par exemple pour la chaîne de Heisenberg ($g \in \text{SU}(2), \zeta_i = 0$) :
Sur un sous espace propre de H , $Q_1(u) = \prod_j (u - \theta_j)$

$$(x_1 - x_2)\theta_j^L = x_1 \cancel{Q_1(\theta_j)} Q_2(\theta_j - 1) - x_2 Q_1(\theta_j - 1) \cancel{Q_2(\theta_j)}$$

$$(x_1 - x_2)(\theta_j + 1)^L = x_1 Q_1(\theta_j + 1) Q_2(\theta_j) - x_2 \cancel{Q_1(\theta_j)} \cancel{Q_2(\theta_j + 1)}$$

$$\forall j, \quad \frac{\prod_k (\theta_j - \theta_{k-1})}{\prod_k (\theta_j - \theta_{k+1})} = - \frac{x_2}{x_1} \left(\frac{\theta_j}{\theta_j + 1} \right)^L$$

$$E = \sum_j \frac{1}{\theta_j (\theta_j + 1)}$$

retrouve les équations de Bethe, avec $\theta_j = e^{ip_j} / (1 - e^{ip_j})$

Hirota equation \leftrightarrow Spectrum

Trois conditions fixent le spectre de la chaîne de spin :

- Q_j is polynomial in u (for $1 \leq j \leq N$)
- $T^\emptyset(u) = \prod_i (u - \zeta_i)$
- $H = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \big|_{u=0}$

- Par exemple pour la chaîne de Heisenberg ($g \in \text{SU}(2), \zeta_i = 0$) :

Sur un sous espace propre de H , $Q_1(u) = \prod_j (u - \theta_j)$

$$(x_1 - x_2)\theta_j^L = x_1 \cancel{Q_1(\theta_j)} Q_2(\theta_j - 1) - x_2 Q_1(\theta_j - 1) Q_2(\theta_j)$$

$$(x_1 - x_2)(\theta_j + 1)^L = x_1 Q_1(\theta_j + 1) Q_2(\theta_j) - x_2 \cancel{Q_1(\theta_j)} Q_2(\theta_j + 1)$$

$$\forall j, \quad \frac{\prod_k (\theta_j - \theta_{k-1})}{\prod_k (\theta_j - \theta_{k+1})} = - \frac{x_2}{x_1} \left(\frac{\theta_j}{\theta_j + 1} \right)^L \quad E = \sum_j \frac{1}{\theta_j (\theta_j + 1)}$$

retrouve les équations de Bethe, avec $\theta_j = e^{ip_j} / (1 - e^{ip_j})$

Hirota equation \leftrightarrow Spectrum

Trois conditions fixent le spectre de la chaîne de spin :

- Q_j is polynomial in u (for $1 \leq j \leq N$)
- $T^\emptyset(u) = \prod_i (u - \zeta_i)$
- $H = - \frac{d}{du} \log T^\square(u) \big|_{u=0}$

- Par exemple pour la chaîne de Heisenberg ($g \in \text{SU}(2), \zeta_i = 0$) :

Sur un sous espace propre de H , $Q_1(u) = \prod_j (u - \theta_j)$

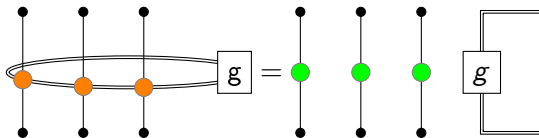
$$(x_1 - x_2)\theta_j^L = x_1 \cancel{Q_1(\theta_j)} Q_2(\theta_j - 1) - x_2 Q_1(\theta_j - 1) Q_2(\theta_j)$$

$$(x_1 - x_2)(\theta_j + 1)^L = x_1 Q_1(\theta_j + 1) Q_2(\theta_j) - x_2 \cancel{Q_1(\theta_j)} Q_2(\theta_j + 1)$$

$$\forall j, \quad \frac{\prod_k (\theta_j - \theta_{k-1})}{\prod_k (\theta_j - \theta_{k+1})} = - \frac{x_2}{x_1} \left(\frac{\theta_j}{\theta_j + 1} \right)^L \quad E = \sum_j \frac{1}{\theta_j (\theta_j + 1)}$$

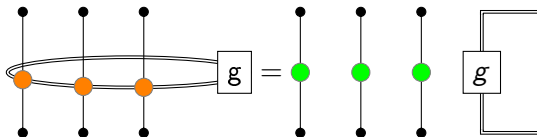
retrouve les équations de Bethe, avec $\theta_j = e^{ip_j} / (1 - e^{ip_j})$

Conclusions



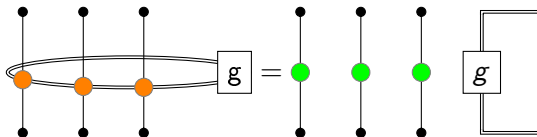
- Spectre du modèle donné par l'existence de Q et T avec $T = \det Q$, $H = \partial_u \log T|_{u=0}$ et
 - T^0 est connu
 - Q est polynomial
- Des opérateurs et une combinatoire qui semblent similaires à certains objets apparaissant dans d'autres domaines (théorie des nœuds?)

Conclusions



- Spectre du modèle donné par l'existence de Q et T avec $T = \det Q$, $H = \partial_u \log T|_{u=0}$ et
 - $T^{(0)}$ est connu
 - Q est polynomial
- Des opérateurs et une combinatoire qui semblent similaires à certains objets apparaissant dans d'autres domaines (théorie des nœuds?)

Conclusions



- Spectre du modèle donné par l'existence de Q et T avec $T = \det Q$, $H = \partial_u \log T|_{u=0}$ et
 - $T^{(0)}$ est connu
 - Q est polynomial
- Des opérateurs et une combinatoire qui semblent similaires à certains objets apparaissant dans d'autres domaines (théorie des nœuds?)