

Mathématiques en physique quantique

Sébastien Leurent,
Équipe de mathématique physique

Institut de Mathématiques de Bourgogne



- 1 Physique quantique – dualité onde particule
- 2 Description de systèmes quantiques
- 3 Exemple de recherches à l'interface Math-Physique : systèmes intégrables

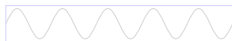
Fentes de Young : caractère ondulatoire de la lumière

écran

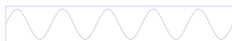


L'écran présente une alternance de franges sombres et de franges éclairées.

- Dans certaines directions, les ondes sont synchronisées :



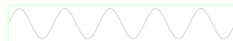
+



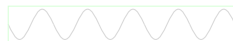
=



- Dans d'autres directions, elles se compensent :



+



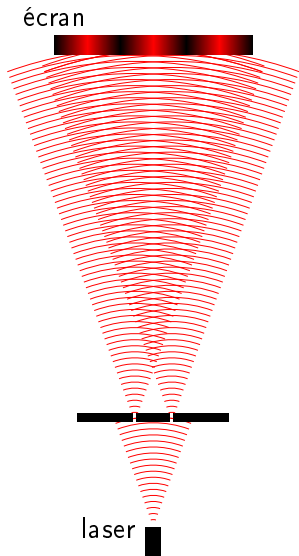
=



laser



Fentes de Young : caractère ondulatoire de la lumière

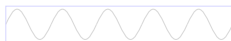


L'écran présente une alternance de franges sombres et de franges éclairées.

- Dans certaines directions, les ondes sont synchronisées :



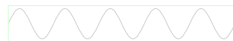
+



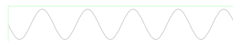
=



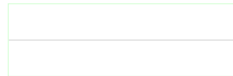
- Dans d'autres directions, elles se compensent :



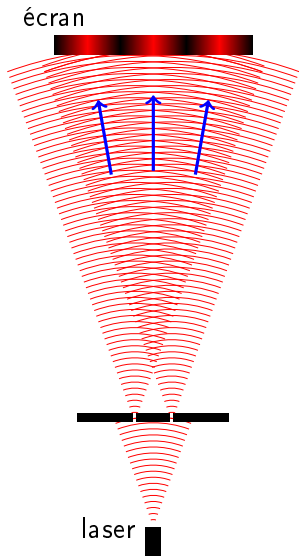
+



=



Fentes de Young : caractère ondulatoire de la lumière



L'écran présente une alternance de franges sombres et de franges éclairées.

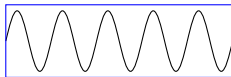
- Dans certaines directions, les ondes sont synchronisées :



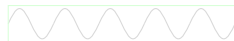
+



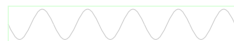
=



- Dans d'autres directions, elles se compensent :



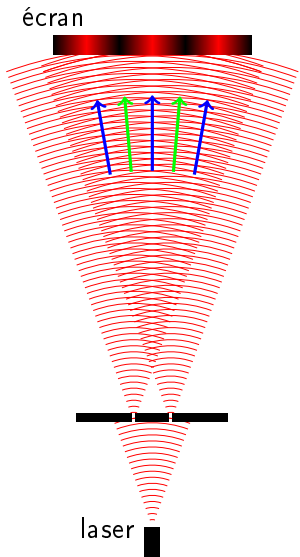
+



=



Fentes de Young : caractère ondulatoire de la lumière



L'écran présente une alternance de franges sombres et de franges éclairées.

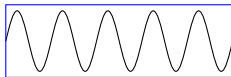
- Dans certaines directions, les ondes sont synchronisées :



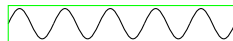
+



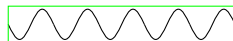
=



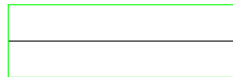
- Dans d'autres directions, elles se compensent :



+



=



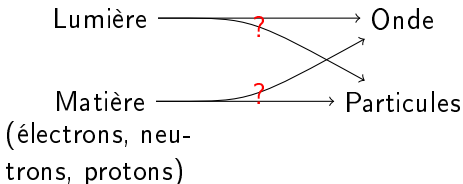
Ondes / particules

Lumière \longrightarrow OndeMatière \longrightarrow Particules
(électrons, neutrons, protons)

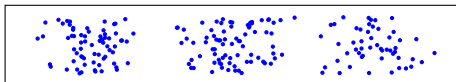
- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence) \rightsquigarrow quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
 - \rightarrow Particule lumineuse : "photon"
 - \rightarrow Physique "quantique" \rightsquigarrow lasers, composants électroniques, etc
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :



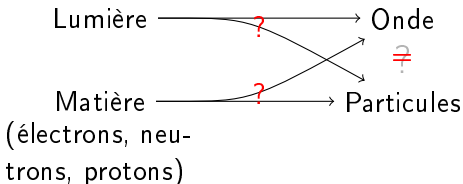
Ondes / particules



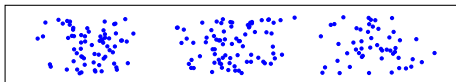
- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence) \rightsquigarrow quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
 - Particule lumineuse : "photon"
 - Physique "quantique" \rightsquigarrow lasers, composants électroniques, etc
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :



Dualité onde-particule

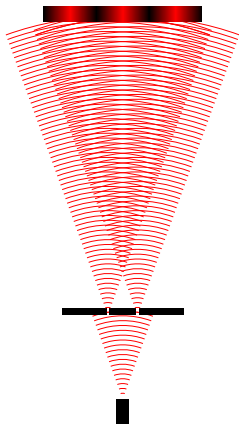


- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence) \rightsquigarrow quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
 - Particule lumineuse : "photon"
 - Physique "quantique" \rightsquigarrow lasers, composants électroniques, etc
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :



Probabilités et fonction d'onde

Onde



Particule quantique



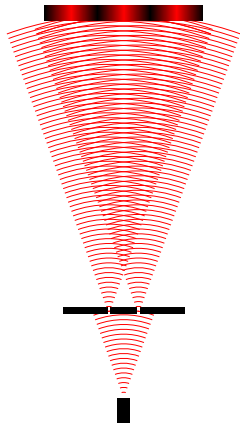
- Plus grande **probabilité** d'arriver dans certaines zones de l'écran
- Densité de probabilité $\rho(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2$ où $\psi(\vec{x})$ est la fonction d'onde
- Oscillations de la fonction d'onde \rightsquigarrow interférences

Difficulté

On ne réussit à calculer la fonction d'onde que pour des systèmes assez simples.

Probabilités et fonction d'onde

Onde



Particule quantique



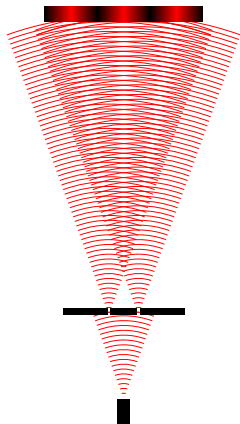
- Plus grande probabilité d'arriver dans certaines zones de l'écran
- Densité de probabilité $\rho(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2$ où $\psi(\vec{x})$ est la **fonction d'onde**
- Oscillations de la fonction d'onde \rightsquigarrow interférences

Difficulté

On ne réussit à calculer la fonction d'onde que pour des systèmes assez simples.

Probabilités et fonction d'onde

Onde



Particule quantique



- Plus grande probabilité d'arriver dans certaines zones de l'écran
- Densité de probabilité $\rho(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2$ où $\psi(\vec{x})$ est la fonction d'onde
- Oscillations de la fonction d'onde \rightsquigarrow interférences

Difficulté

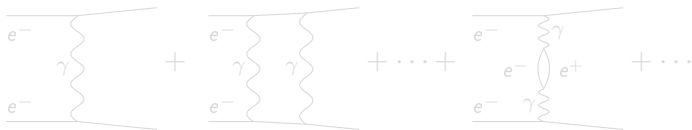
On ne réussit à calculer la fonction d'onde que pour des systèmes assez simples.

Interactions entre particules quantiques

Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique "classique"** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent un photon



La probabilité que les électrons soient déviées dans une direction fixée s'obtient à partir de la somme d'une infinité de processus

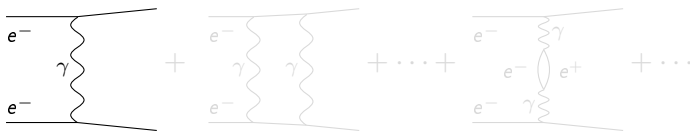
- Une telle somme n'a parfois aucun sens
- Les modèles où apparaissent ces diagrammes de Feynmann s'appellent "théories quantiques des champs".
 - Physique des particules
 - Supraconducteurs

Interactions entre particules quantiques

Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique "classique"** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent un photon



La probabilité que les électrons soient déviés dans une direction fixée s'obtient à partir de la somme d'une infinité de processus

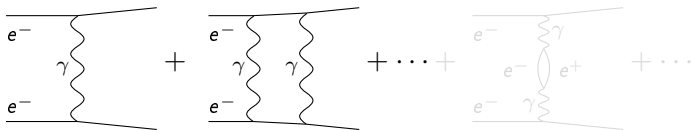
- Une telle somme n'a parfois aucun sens
- Les modèles où apparaissent ces diagrammes de Feynmann s'appellent "théories quantiques des champs".
 - Physique des particules
 - Supraconducteurs

Interactions entre particules quantiques

Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique "classique"** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent des photons



La probabilité que les électrons soient déviés dans une direction fixée s'obtient à partir de la somme d'une infinité de processus

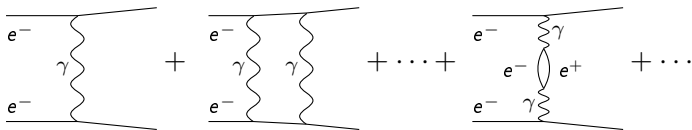
- Une telle somme n'a parfois aucun sens
- Les modèles où apparaissent ces diagrammes de Feynmann s'appellent "théories quantiques des champs".
 - Physique des particules
 - Supraconducteurs

Interactions entre particules quantiques

Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique "classique"** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent des particules



La probabilité que les électrons soient déviées dans une direction fixée s'obtient à partir de la somme d'une infinité de processus

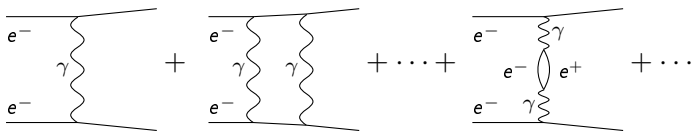
- Une telle somme n'a parfois aucun sens
- Les modèles où apparaissent ces diagrammes de Feynmann s'appellent "théories quantiques des champs".
 - ↪ Physique des particules
 - ↪ Supraconducteurs, ...

Interactions entre particules quantiques

Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique "classique"** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent des particules



La probabilité que les électrons soient déviées dans une direction fixée s'obtient à partir de la somme d'une infinité de processus

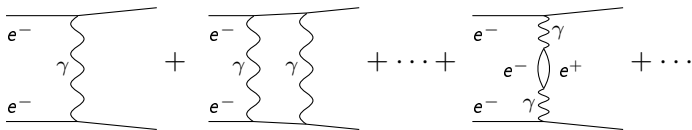
- Une telle somme n'a parfois aucun sens
- Les modèles où apparaissent ces diagrammes de Feynmann s'appellent "théories quantiques des champs".
 - ↪ Physique des particules
 - ↪ Supraconducteurs, ...

Interactions entre particules quantiques

Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique “classique”** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent des particules



La probabilité que les électrons soient déviées dans une direction fixée s'obtient à partir de la **somme d'une infinité de processus**

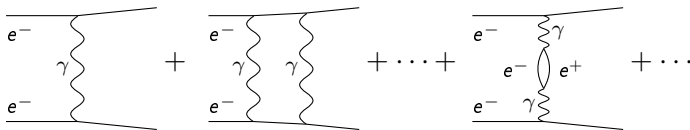
- Une telle somme n'a parfois aucun sens
- Les modèles où apparaissent ces diagrammes de Feynmann s'appellent “théories quantiques des champs”.
 - ↪ Physique des particules
 - ↪ Supraconducteurs, ...

Interactions entre particules quantiques

Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique “classique”** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent des particules



La probabilité que les électrons soient déviées dans une direction fixée s'obtient à partir de la somme d'une infinité de processus

- Une telle somme n'a parfois aucun sens
- Les modèles où apparaissent ces diagrammes de Feynmann s'appellent “théories quantiques des champs”.
 - ↪ Physique des particules
 - ↪ Supraconducteurs, ...

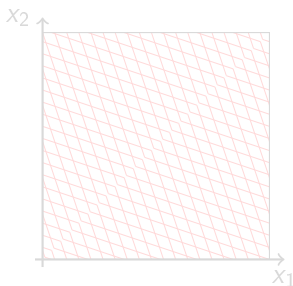
Fonction d'onde pour plusieurs particules

Systèmes intégrables

- Densité de probabilité $\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)|^2$
- Dans des systèmes "intégrables", on peut calculer la fonction d'onde.

Exemple : deux particules se déplaçant sur une droite

↪ superposition d'ondes



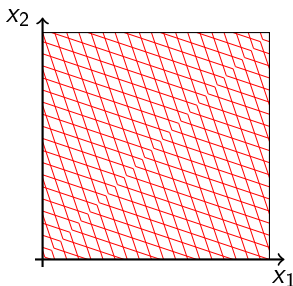
Fonction d'onde pour plusieurs particules

Systèmes intégrables

- Densité de probabilité $\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = |\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)|^2$
- Dans des systèmes “intégrables”, on peut calculer la fonction d'onde.

Exemple : deux particules se déplaçant sur une droite

↪ superposition d'ondes



Exemple de travaux de recherche à l'interface

Mathématiques \leftrightarrow Physique

Approche possible : étude des “charges conservées”

(analogue de l'énergie mécanique de la physique classique)

- Quand on sait calculer la fonction d'onde, il apparaît que ces charges conservées ont des propriétés mathématiques remarquables
- Ces propriétés persistent pour des systèmes plus compliqués, y compris des “théories quantiques des champs”

Ces travaux font appel à l'étude de certaines fonctions, dites “analytiques”, qui apparaissent lorsqu'on manipule des nombres complexes.

Exemple de travaux de recherche à l'interface

Mathématiques \leftrightarrow Physique

Approche possible : étude des “charges conservées”

(analogue de l'énergie mécanique de la physique classique)

- Quand on sait calculer la fonction d'onde, il apparaît que ces charges conservées ont des propriétés mathématiques remarquables
- Ces propriétés persistent pour des systèmes plus compliqués, y compris des “théories quantiques des champs”

Ces travaux font appel à l'étude de certaines fonctions, dites “analytiques”, qui apparaissent lorsqu'on manipule des nombres complexes.

Exemple de travaux de recherche à l'interface

Mathématiques \leftrightarrow Physique

Approche possible : étude des “charges conservées”

(analogue de l'énergie mécanique de la physique classique)

- Quand on sait calculer la fonction d'onde, il apparaît que ces charges conservées ont des propriétés mathématiques remarquables
- Ces propriétés persistent pour des systèmes plus compliqués, y compris des “théories quantiques des champs”

Ces travaux font appel à l'étude de certaines fonctions, dites “analytiques”, qui apparaissent lorsqu'on manipule des nombres complexes.