

Modèles intégrables quantiques et théorie des champs

Sébastien Leurent, Équipe Math-Phys, **IMB**

Résultats issus de collaborations avec

N. Gromov, V. Kazakov, Z. Tsuboi, D. Volin :

ArXiv : 1010.4022, 1305.1939, 1405.soon

Plan

- 1 Systèmes quantiques
 - Ondes ↔ particules
 - Équation de Schrödinger
 - Champs quantiques
- 2 Intégrabilité
 - Chaîne de spins “XXX”
 - Ansatz de Bethe
 - Équation de Hirota
- 3 Cas de super-Yang-Mills
 - Effets de taille finie pour les théories des champs intégrables
 - Dualité AdS/CFT
 - Système “P- μ ”

Fentes de Young : caractère ondulatoire de la lumière

écran



L'écran présente une alternance de franges sombres et de franges éclairées.

- Angle multiple de λ/a : ondes en phase



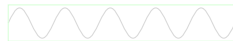
+



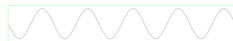
=



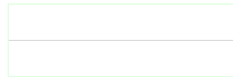
- Angle $\frac{2k+1}{2} \frac{\lambda}{a}$: opposition de phase



+



=

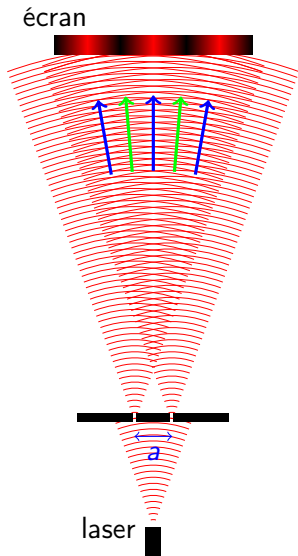


a

laser

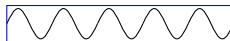


Fentes de Young : caractère ondulatoire de la lumière

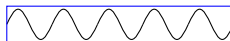


L'écran présente une alternance de franges sombres et de franges éclairées.

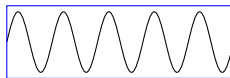
- Angle multiple de λ/a : ondes en phase



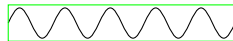
+



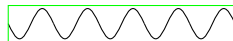
=



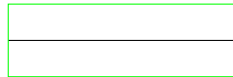
- Angle $\frac{2k+1}{2} \frac{\lambda}{a}$: opposition de phase



+



=



Ondes / particules

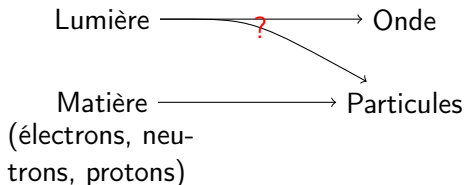
Lumière \longrightarrow Onde

Matière \longrightarrow Particules
(électrons, neutrons, protons)

- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence)
 \rightsquigarrow quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
 - \rightarrow Particule lumineuse : "photon"
 - \rightarrow Physique "quantique"
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :



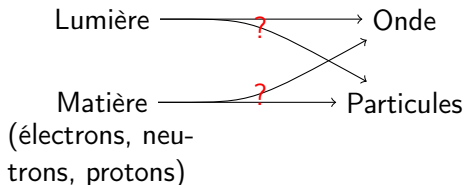
Ondes / particules



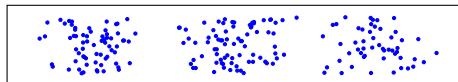
- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence)
 ↪ quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
 - Particule lumineuse : "photon"
 - Physique "quantique"
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :



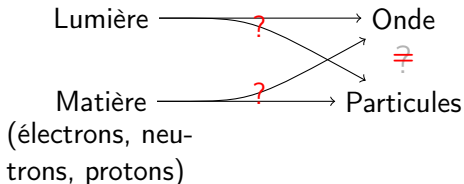
Ondes / particules



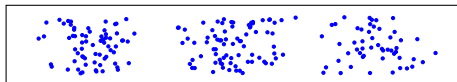
- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence)
 ↪ quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
 - Particule lumineuse : "photon"
 - Physique "quantique"
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :



Dualité onde-particule

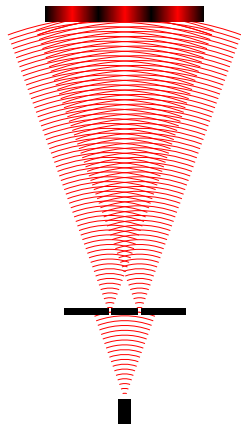


- Étude du rayonnement de corps noir (phénomène qui fait fonctionner les ampoules à incandescence)
 ↷ quantité élémentaire d'énergie lumineuse.
 - Particule lumineuse : "photon"
 - Physique "quantique"
- Fentes de Young avec des électrons, des neutrons, ou de petits atomes :



Probabilités et fonction d'onde

Onde



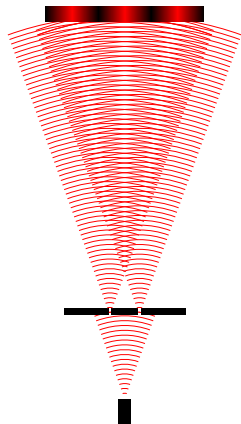
Particule quantique



- Plus grande **probabilité** d'arriver dans certaines zones de l'écran
- Densité de probabilité $\rho(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2$ où $\psi(\vec{x})$ est la fonction d'onde
- Oscillations de la fonction d'onde \rightsquigarrow interférences

Probabilités et fonction d'onde

Onde



Particule quantique



- Plus grande probabilité d'arriver dans certaines zones de l'écran
- Densité de probabilité $\rho(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2$ où $\psi(\vec{x})$ est la **fonction d'onde**
- Oscillations de la fonction d'onde \rightsquigarrow interférences

Systèmes quantiques

Description d'un système quantique :

- **États** : éléments d'un espace de Hilbert \mathcal{H} .

Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

- **Évolution** : $i\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$,
où le *Hamiltonien* H est un opérateur Hermitien sur \mathcal{H} .
- **Observables** : opérateurs hermitiens sur \mathcal{H} .
Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\langle \psi | A | \psi \rangle$.

On s'intéressera ici à diagonaliser le Hamiltonien H :

Ses valeurs propres sont les *énergies des états propres* du système

Systèmes quantiques

Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États** : éléments d'un espace de Hilbert \mathcal{H} .

Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

- **Évolution** : $i\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$,
où le *Hamiltonien* H est un opérateur Hermitien sur \mathcal{H} .
- **Observables** : opérateurs hermitiens sur \mathcal{H} .
Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\langle \psi | A | \psi \rangle$.

On s'intéressera ici à diagonaliser le Hamiltonien H :

Ses valeurs propres sont les *énergies des états propres* du système

Systèmes quantiques

Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États** : éléments de \mathcal{H}/\sim où \mathcal{H} est un espace de Hilbert et \sim est la colinéarité.
Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- **Évolution** : $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$,
où le *Hamiltonien* H est un opérateur Hermitien sur \mathcal{H} .
- **Observables** : opérateurs hermitiens sur \mathcal{H} .
Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\langle\psi|A|\psi\rangle$.

On s'intéressera ici à diagonaliser le Hamiltonien H :

Ses valeurs propres sont les *énergies des états propres* du système

Systèmes quantiques

Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États** : éléments de \mathcal{H}/\sim où \mathcal{H} est un espace de Hilbert et \sim est la colinéarité.
Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- **Évolution** : $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$,
où le *Hamiltonien* H est un opérateur Hermitien sur \mathcal{H} .
- **Observables** : opérateurs hermitiens sur \mathcal{H} .
Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\langle\psi|A|\psi\rangle$.

On s'intéressera ici à diagonaliser le Hamiltonien H :

Ses valeurs propres sont les *énergies des états propres* du système

Systèmes quantiques

Équation de Schrödinger

Description d'un système quantique :

- **États** : éléments de \mathcal{H}/\sim où \mathcal{H} est un espace de Hilbert et \sim est la colinéarité.
Notation : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- **Évolution** : $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$,
où le *Hamiltonien* H est un opérateur Hermitien sur \mathcal{H} .
- **Observables** : opérateurs hermitiens sur \mathcal{H} .
Dans un état $|\psi\rangle$, une observable A vaut en moyenne $\langle\psi|A|\psi\rangle$.

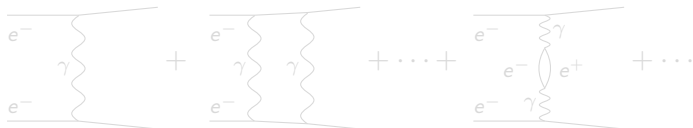
On s'intéressera ici à diagonaliser le Hamiltonien H :

Ses valeurs propres sont les *énergies* des *états propres* du système

Interactions entre particules quantiques Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- Mécanique “classique” : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- Physique quantique : les électrons échangent un photon



Probabilité que les électrons soient déviés dans une direction fixée : $|\mathcal{A}^2|$. Les diagrammes donnent le développement de Taylor de \mathcal{A} quand l'intensité des interactions tends vers zero.

- Une telle série ne contient pas forcément toutes les informations.
- Le plus souvent on ne sait calculer que les tout premiers termes.

Interactions entre particules quantiques Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique “classique”** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent un photon



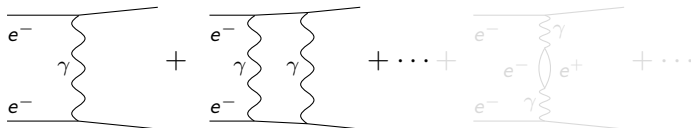
Probabilité que les électrons soient déviés dans une direction fixée : $|\mathcal{A}^2|$. Les diagrammes donnent le développement de Taylor de \mathcal{A} quand l'intensité des interactions tends vers zero.

- Une telle série ne contient pas forcément toutes les informations.
- Le plus souvent on ne sait calculer que les tout premiers termes.

Interactions entre particules quantiques Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- Mécanique “classique” : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- Physique quantique : les électrons échangent des photons



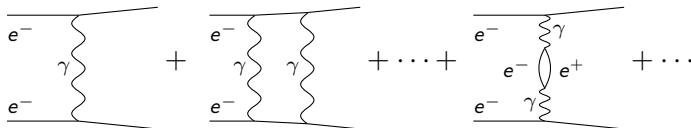
Probabilité que les électrons soient déviés dans une direction fixée : $|\mathcal{A}^2|$. Les diagrammes donnent le développement de Taylor de \mathcal{A} quand l'intensité des interactions tends vers zero.

- Une telle série ne contient pas forcément toutes les informations.
- Le plus souvent on ne sait calculer que les tout premiers termes.

Interactions entre particules quantiques Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique “classique”** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent des particules



Probabilité que les électrons soient déviées dans une direction fixée : $|\mathcal{A}^2|$. Les diagrammes donnent le développement de Taylor de \mathcal{A} quand l'intensité des interactions tends vers zero.

- Une telle série ne contient pas forcément toutes les informations.
- Le plus souvent on ne sait calculer que les tout premiers termes.

Interactions entre particules quantiques Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique “classique”** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent des particules

$$\mathcal{A} = \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \\ e^- \text{---} e^+ \\ \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} + \dots$$

Probabilité que les électrons soient déviées dans une direction fixée : $|\mathcal{A}^2|$. Les diagrammes donnent le développement de Taylor de \mathcal{A} quand l'intensité des interactions tends vers zero.

- Une telle série ne contient pas forcément toutes les informations.
- Le plus souvent on ne sait calculer que les tout premiers termes.

Interactions entre particules quantiques Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique “classique”** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent des particules

$$\mathcal{A} \simeq \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \\ e^+ \\ \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} + \dots$$

Probabilité que les électrons soient déviées dans une direction fixée : $|\mathcal{A}^2|$. Les diagrammes donnent le développement de Taylor de \mathcal{A} quand l'intensité des interactions tends vers zero.

- Une telle série ne contient pas forcément toutes les informations.
- Le plus souvent on ne sait calculer que les tout premiers termes.

Interactions entre particules quantiques Diagrammes de Feynmann

Exemple : deux électrons se repoussent mutuellement.

- **Mécanique “classique”** : le champs électrique de chaque électron dévie l'autre électron
- **Physique quantique** : les électrons échangent des particules

$$\mathcal{A} \simeq \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ e^+ \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \gamma \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ e^- \\ \text{---} \end{array} + \dots$$

Probabilité que les électrons soient déviées dans une direction fixée : $|\mathcal{A}^2|$. Les diagrammes donnent le développement de Taylor de \mathcal{A} quand l'intensité des interactions tends vers zero.

- Une telle série ne contient pas forcément toutes les informations.
- Le plus souvent on ne sait calculer que les tout premiers termes.

Spin Quantique

Spin : objet quantique pointant dans une direction

“Directions” : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 / \sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Spin arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$

Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$.

Exemple : si $L = 3$, c'est

$\text{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$.



Chaîne de spins “XXX” : Hamiltonien $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

où $\vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1} \equiv \sum_{k=1}^3 \sigma_i^{(k)} \sigma_{i+1}^{(k)}$; $\sigma_i^{(k)}$ est $\sigma^{(k)}$ agissant sur le $i^{\text{ème}}$ spin, et $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Périodicité : On identifie $\sigma_{L+1} = \sigma_1$.

Spin Quantique

Spin : objet quantique pointant dans une direction

“Directions” : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 / \sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

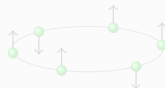
Spin arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$

Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$.

Exemple : si $L = 3$, c'est

$\text{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$.



Chaîne de spins “XXX” : Hamiltonien $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

où $\vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1} \equiv \sum_{k=1}^3 \sigma_i^{(k)} \sigma_{i+1}^{(k)}$; $\sigma_i^{(k)}$ est $\sigma^{(k)}$ agissant sur le $i^{\text{ème}}$ spin, et $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Périodicité : On identifie $\sigma_{L+1} = \sigma_1$.

Spin Quantique

Spin : objet quantique pointant dans une direction

“Directions” : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 / \sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

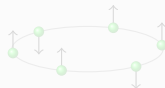
Spin arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$

Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$.

Exemple : si $L = 3$, c'est

$\text{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$.



Chaîne de spins “XXX” : Hamiltonien $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

où $\vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1} \equiv \sum_{k=1}^3 \sigma_i^{(k)} \sigma_{i+1}^{(k)}$; $\sigma_i^{(k)}$ est $\sigma^{(k)}$ agissant sur le $i^{\text{ème}}$ spin, et $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Périodicité : On identifie $\sigma_{L+1} = \sigma_1$.

Spin Quantique

Spin : objet quantique pointant dans une direction

“Directions” : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 / \sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

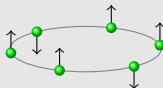
Spin arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$

Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$.

Exemple : si $L = 3$, c'est

$\text{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$.



Chaîne de spins “XXX” : Hamiltonien $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$
 où $\vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1} \equiv \sum_{k=1}^3 \sigma_i^{(k)} \sigma_{i+1}^{(k)}$; $\sigma_i^{(k)}$ est $\sigma^{(k)}$ agissant sur le $i^{\text{ème}}$ spin, et $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Périodicité : On identifie $\sigma_{L+1} = \sigma_1$.

Spin Quantique

Spin : objet quantique pointant dans une direction

“Directions” : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 / \sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

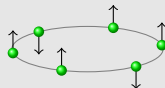
Spin arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$

Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$.

Exemple : si $L = 3$, c'est

$\text{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$.



Chaîne de spins “XXX” : Hamiltonien $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

où $\vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1} \equiv \sum_{k=1}^3 \sigma_i^{(k)} \sigma_{i+1}^{(k)}$; $\sigma_i^{(k)}$ est $\sigma^{(k)}$ agissant sur le $i^{\text{ème}}$ spin, et $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Périodicité : On identifie $\sigma_{L+1} = \sigma_1$.

Spin Quantique

Spin : objet quantique pointant dans une direction

“Directions” : éléments de $\mathcal{S}_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 / \sim$

- On note $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

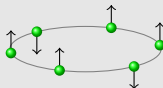
Spin arbitraire : $|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$

Chaîne de spins : succession de L sites avec chacun un spin

Espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$.

Exemple : si $L = 3$, c'est

$\text{Vect}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$.



Chaîne de spins “XXX” : Hamiltonien $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}^{\vec{r}}$
 où $\vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}^{\vec{r}} \equiv \sum_{k=1}^3 \sigma_i^{(k)} \sigma_{i+1}^{(k)}$; $\sigma_i^{(k)}$ est $\sigma^{(k)}$ agissant sur le $i^{\text{ème}}$ spin, et $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Périodicité : On identifie $\sigma_{L+1} = \sigma_1$.

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{ikp} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2ipL} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-j-k}$
- $$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i k p} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2i p L} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i k p} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2i p L} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

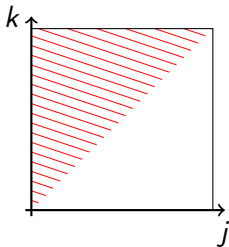
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i k p} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2i p L} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_2}}{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

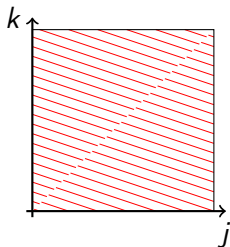
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i k p} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2i p L} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_2}}{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

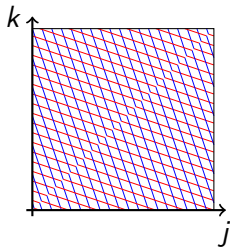
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i k p} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2i p L} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_2}}{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

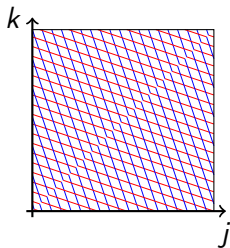
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i k p} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2i p L} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_2}}{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

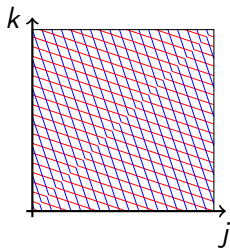
Liste des états propres de $H = -\sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1}$

- “vide” : $|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$
- états à une “excitation” : combinaisons de $|\{k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{k-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-k}$

$$|\psi\rangle \propto \sum_k e^{i k p} |\{k\}\rangle \quad \text{où } e^{2i p L} = 1$$

- combinaisons de $|\{j, k\}\rangle = \underbrace{|\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle}_{j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{k-j-1} \uparrow \underbrace{|\downarrow\cdots\downarrow\rangle}_{L-j-k}$

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \Psi(j, k) |\{j, k\}\rangle$$



$$|\psi\rangle \propto \sum_{j < k} (e^{i(p_1 j + p_2 k)} + S e^{i(p_1 k + p_2 j)}) |\{j, k\}\rangle$$

avec $e^{i L p_2} = S = e^{-i L p_1}$

$$\text{et } S = -\frac{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_2}}{1 + e^{i(p_1 + p_2)} - 2e^{i p_1}}$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

États à n "excitations"

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} \underbrace{|\downarrow \dots \downarrow\rangle}_{j_1-1} \underbrace{|\uparrow \downarrow \dots \downarrow\rangle}_{j_2-j_1-1} |\uparrow \downarrow \dots\rangle$$

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j < k} \left(1 + e^{i(p_{\sigma(j)} + p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}} \right)$
- $\forall j, e^{iLp_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$ where $S(p, p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip}}{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip'}}$

Valeur propre :

$$E = E_0 + \sum_k 4 - 4 \cos p_k$$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

États à n "excitations"

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} \underbrace{|\downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle}_{j_1-1} \underbrace{|\uparrow \downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle}_{j_2-j_1-1} |\uparrow \downarrow \dots\rangle$$

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j < k} \left(1 + e^{i(p_{\sigma(j)} + p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}} \right)$
- $\forall j, e^{iLp_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$ where $S(p, p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip}}{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip'}}$

Valeur propre : $E = E_0 + \sum_k 4 - 4 \cos p_k$

Vecteurs propres de H

pour la chaîne XXX

États à n "excitations"

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_\sigma e^{i \sum_k p_{\sigma(k)} j_k} \underbrace{|\downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle}_{j_1-1} \underbrace{|\uparrow \downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle}_{j_2-j_1-1} |\uparrow \downarrow \dots\rangle$$

C'est un vecteur propre si

- $\mathcal{A}_\sigma \propto (-1)^\sigma \prod_{j < k} \left(1 + e^{i(p_{\sigma(j)} + p_{\sigma(k)})} - 2e^{ip_{\sigma(k)}} \right)$
- $\forall j, e^{iLp_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$ where $S(p, p') \equiv -\frac{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip}}{1+e^{i(p+p')} - 2e^{ip'}}$

Valeur propre :

$$E = E_0 + \sum_k 4 - 4 \cos p_k$$

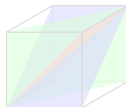
Modèles Intégrables

Modèles intégrables : Valeurs propres de H sont

$$E = E_0 + \sum_k e(p_k) \quad \text{où} \quad \forall j, e^{iLp_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$$

où les fonctions $e(p)$ et $S(p, p')$ dépendent du modèle.

Propriété emblématique : Équation de Yang-Baxter



Conditions (en général) :

- espace unidimensionnel, périodique
- interactions à faible portée (comparé à la taille de l'espace)
- "beaucoup" de symétries

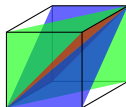
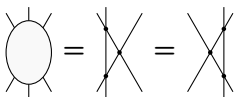
Modèles Intégrables

Modèles intégrables : Valeurs propres de H sont

$$E = E_0 + \sum_k e(p_k) \quad \text{où} \quad \forall j, e^{iLp_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$$

où les fonctions $e(p)$ et $S(p, p')$ dépendent du modèle.

Propriété emblématique : Équation de Yang-Baxter



Conditions (en général) :

- espace unidimensionnel, périodique
- interactions à faible portée (comparé à la taille de l'espace)
- "beaucoup" de symétries

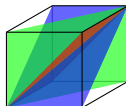
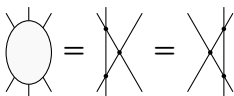
Modèles Intégrables

Modèles intégrables : Valeurs propres de H sont

$$E = E_0 + \sum_k e(p_k) \quad \text{où} \quad \forall j, e^{iLp_j} = \prod_{k \neq j} S(p_j, p_k)$$

où les fonctions $e(p)$ et $S(p, p')$ dépendent du modèle.

Propriété emblématique : Équation de Yang-Baxter



Conditions (en général) :

- espace unidimensionnel, périodique
- interactions à faible portée (comparé à la taille de l'espace)
- “beaucoup” de symétries

Équation de Hirota

Cas de la chaîne XXX [Kazakov, Leurent, Tsuboi 12]

Existence d'opérateurs $T_{a,s}(u)$
où $u \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$:

- $T_{a,s}(u)$ est un polynôme en u
- $T_{a,s}(u)$ commute avec $T_{b,t}(v)$
- $H = L - 2 \frac{\partial}{\partial u} \log T_{1,1} \Big|_{u=0}$
- $T_{0,s}(u) = u^L$

$$T_{a,s}(u+1)T_{a,s}(u) = T_{a+1,s}(u+1)T_{a-1,s}(u) + T_{a,s-1}(u+1)T_{a,s+1}(u)$$

Existence d'opérateurs $Q_i(u)$
pour $u \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$:

- $Q_j(u)$ commute avec $Q_k(v)$
- $T_{a,s}(u) = \det_{1 \leq j, k \leq N} (Q_j(u - 2k + 2s \Theta(a - k)))$
(où $\Theta = \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}$)
- $Q_j(u)$ est un polynôme en u
- $T_{0,s}(u) = u^L$ donne une equation sur les racines de ces polynômes
- Dans le cas présent, $N = 2$

Réécriture des Équations de Bethe

Équations de Bethe \Leftrightarrow existence et polynomialité de certains opérateurs

Équation de Hirota

Cas de la chaîne XXX [Kazakov, Leurent, Tsuboi 12]

Existence d'opérateurs $T_{a,s}(u)$
où $u \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$:

- $T_{a,s}(u)$ est un polynôme en u
- $T_{a,s}(u)$ commute avec $T_{b,t}(v)$
- $H = L - 2 \frac{\partial}{\partial u} \log T_{1,1} \Big|_{u=0}$
- $T_{0,s}(u) = u^L$

$$T_{a,s}(u+1)T_{a,s}(u) = T_{a+1,s}(u+1)T_{a-1,s}(u) + T_{a,s-1}(u+1)T_{a,s+1}(u)$$

Existence d'opérateurs $Q_i(u)$
pour $u \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$:

- $Q_j(u)$ commute avec $Q_k(v)$
- $T_{a,s}(u) = \det_{1 \leq j, k \leq N} (Q_j(u - 2k + 2s \Theta(a - k)))$
(où $\Theta = \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}$)
- $Q_j(u)$ est un polynôme en u
- $T_{0,s}(u) = u^L$ donne une équation sur les racines de ces polynômes
- Dans le cas présent, $N = 2$

Réécriture des Équations de Bethe

Équations de Bethe \Leftrightarrow existence et polynomialité de certains opérateurs

Équation de Hirota

Cas de la chaîne XXX [Kazakov, Leurent, Tsuboi 12]

Existence d'opérateurs $T_{a,s}(u)$
où $u \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$:

- $T_{a,s}(u)$ est un polynôme en u
- $T_{a,s}(u)$ commute avec $T_{b,t}(v)$
- $H = L - 2 \frac{\partial}{\partial u} \log T_{1,1} \Big|_{u=0}$
- $T_{0,s}(u) = u^L$

$$T_{a,s}(u+1)T_{a,s}(u) = T_{a+1,s}(u+1)T_{a-1,s}(u) + T_{a,s-1}(u+1)T_{a,s+1}(u)$$

Existence d'opérateurs $Q_i(u)$
pour $u \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$:

- $Q_j(u)$ commute avec $Q_k(v)$
- $T_{a,s}(u) = \det_{1 \leq j, k \leq N} (Q_j(u - 2k + 2s \Theta(a - k)))$
(où $\Theta = \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}$)
- $Q_j(u)$ est un polynôme en u
- $T_{0,s}(u) = u^L$ donne une equation sur les racines de ces polynômes
- Dans le cas présent, $N = 2$

Réécriture des Équations de Bethe

Équations de Bethe \Leftrightarrow existence et polynomialité de certains opérateurs

Équation de Hirota

Cas de la chaîne XXX [Kazakov, Leurent, Tsuboi 12]

Existence d'opérateurs $T_{a,s}(u)$
où $u \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$:

- $T_{a,s}(u)$ est un polynôme en u
- $T_{a,s}(u)$ commute avec $T_{b,t}(v)$
- $H = L - 2 \frac{\partial}{\partial u} \log T_{1,1} \Big|_{u=0}$
- $T_{0,s}(u) = u^L$

$$T_{a,s}(u+1)T_{a,s}(u) = T_{a+1,s}(u+1)T_{a-1,s}(u) + T_{a,s-1}(u+1)T_{a,s+1}(u)$$

Existence d'opérateurs $Q_i(u)$
pour $u \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$:

- $Q_j(u)$ commute avec $Q_k(v)$
- $T_{a,s}(u) = \det_{1 \leq j, k \leq N} (Q_j(u - 2k + 2s \Theta(a - k)))$
(où $\Theta = \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}$)
- $Q_j(u)$ est un polynôme en u
- $T_{0,s}(u) = u^L$ donne une equation sur les racines de ces polynômes
- Dans le cas présent, $N = 2$

Réécriture des Équations de Bethe

Équations de Bethe \Leftrightarrow existence et polynomialité de certains opérateurs

Plan

- 1 Systèmes quantiques
 - Ondes ↔ particules
 - Équation de Schrödinger
 - Champs quantiques
- 2 Intégrabilité
 - Chaîne de spins “XXX”
 - Ansatz de Bethe
 - Équation de Hirota
- 3 Cas de super-Yang-Mills
 - Effets de taille finie pour les théories des champs intégrables
 - Dualité AdS/CFT
 - Système “P- μ ”

Théories des champs intégrables \rightsquigarrow effets de taille fine

Condition pour l'ansatz de Bethe

Ansatz de Bethe : combinaison linéaire d'ondes planes.

dans un espace périodique unidimensionnel

\Rightarrow période spatiale $L \gg l$,

où l est la portée des interactions

Pour L fini, \ll ansatz de Bethe

thermodynamique \gg

Conjecture

Taille finie \leftrightarrow température

chaque état est caractérisé par un ensemble de fonctions T , satisfaisant :

- propriétés analytiques (selon le modèle et l'état considéré)
- $T_{a,s}(u + \frac{i}{2}) T_{a,s}(u - \frac{i}{2}) = T_{a+1,s}(u) T_{a-1,s}(u) + T_{a,s+1}(u) T_{a,s-1}(u)$
(Équation de Hirota, très universelle)

\rightsquigarrow Énergie des différents états



Théories des champs intégrables \rightsquigarrow effets de taille fine

Condition pour l'ansatz de Bethe

Ansatz de Bethe : combinaison linéaire d'ondes planes.

dans un espace périodique unidimensionnel

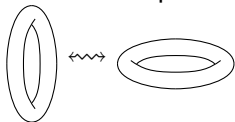
 \Rightarrow période spatiale $L \gg l$,où l est la portée des interactionsPour L fini, « ansatz de Bethe

thermodynamique »

Conjecture

Taille finie \leftrightarrow températurechaque état est caractérisé par un ensemble de fonctions T , satisfaisant :

- propriétés analytiques (selon le modèle et l'état considéré)
- $T_{a,s}(u + \frac{i}{2}) T_{a,s}(u - \frac{i}{2}) = T_{a+1,s}(u) T_{a-1,s}(u) + T_{a,s+1}(u) T_{a,s-1}(u)$
(Équation de Hirota, très universelle)

 \rightsquigarrow Énergie des différents états

Théories des champs intégrables \rightsquigarrow effets de taille fine

Condition pour l'ansatz de Bethe

Ansatz de Bethe : combinaison linéaire d'ondes planes.

dans un espace périodique unidimensionnel

\Rightarrow période spatiale $L \gg l$,

où l est la portée des interactions

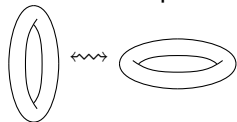
Pour L fini, « *ansatz de Bethe*

thermodynamique »

Conjecture

Taille fine \leftrightarrow température

chaque état est caractérisé par un ensemble de fonctions T , satisfaisant :



- **propriétés analytiques** (selon le modèle et l'état considéré)
- $T_{a,s}(u + \frac{i}{2}) T_{a,s}(u - \frac{i}{2}) = T_{a+1,s}(u) T_{a-1,s}(u) + T_{a,s+1}(u) T_{a,s-1}(u)$
(*Équation de Hirota*, très universelle)

\rightsquigarrow Énergie des différents états

Théories des champs intégrables \rightsquigarrow effets de taille fine

Condition pour l'ansatz de Bethe

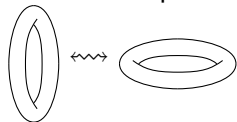
Ansatz de Bethe : combinaison linéaire d'ondes planes.

dans un espace périodique unidimensionnel

 \Rightarrow période spatiale $L \gg l$,où l est la portée des interactionsPour L fini, « ansatz de Bethe

thermodynamique »

Conjecture

Taille finie \leftrightarrow températurechaque état est caractérisé par un ensemble de fonctions T , satisfaisant :

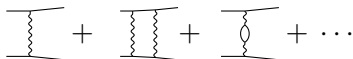
- propriétés analytiques (selon le modèle et l'état considéré)
- $T_{a,s}(u + \frac{i}{2}) T_{a,s}(u - \frac{i}{2}) = T_{a+1,s}(u) T_{a-1,s}(u) + T_{a,s+1}(u) T_{a,s-1}(u)$
(Équation de Hirota, très universelle)

 \rightsquigarrow Énergie des différents états

Dualité AdS/CFT

Théorie quantique des champs

infinité de particules quantiques ponctuelles en interaction



- calculs perturbatifs
- ~~gravité~~

Théorie de cordes

particules remplacées par des *cordes* unidimensionnelles



- description de la gravité
- compréhension partielle

Dualité AdS/CFT

(conjecture)

Théorie conforme (CFT)
de *Super Yang-Mills*

régime de couplage fort

régime perturbatif

Dimension d'opérateurs

Cordes

en géométrie $AdS_5 \times S^5$

régime de couplage fort

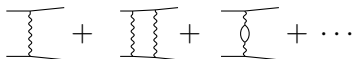
régime perturbatif

Énergie de cordes

Dualité AdS/CFT

Théorie quantique des champs

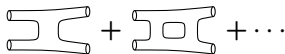
infinité de particules quantiques ponctuelles en interaction



- calculs perturbatifs
- ~~gravité~~

Théorie de cordes

particules remplacées par des *cordes* unidimensionnelles



- description de la gravité
- compréhension partielle

Dualité AdS/CFT

(conjecture)

Théorie conforme (CFT)
de *Super Yang-Mills*

régime de couplage fort

régime perturbatif

Dimension d'opérateurs

Cordes

en géométrie $AdS_5 \times S^5$

régime de couplage fort

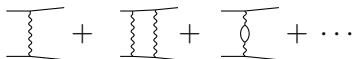
régime perturbatif

Énergie de cordes

Dualité AdS/CFT

Théorie quantique des champs

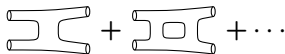
infinité de particules quantiques ponctuelles en interaction



- calculs perturbatifs
- ~~gravité~~

Théorie de cordes

particules remplacées par des *cordes* unidimensionnelles



- description de la gravité
- compréhension partielle

Dualité AdS/CFT

(conjecture)

Théorie conforme (CFT)
de *Super Yang-Mills*

régime de couplage fort

régime perturbatif

Dimension d'opérateurs

Cordes

en géométrie $AdS_5 \times S^5$

régime de couplage fort

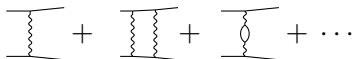
régime perturbatif

Énergie de cordes

Dualité AdS/CFT

Théorie quantique des champs

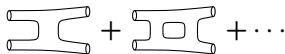
infinité de particules quantiques ponctuelles en interaction



- calculs perturbatifs
- ~~gravité~~

Théorie de cordes

particules remplacées par des *cordes* unidimensionnelles



- description de la gravité
- compréhension partielle

Dualité AdS/CFT

(conjecture)

Théorie conforme (CFT)
de *Super Yang-Mills*

régime de couplage fort

régime perturbatif

intégrabilité

Cordes

en géométrie $AdS_5 \times S^5$

régime de couplage fort

régime perturbatif

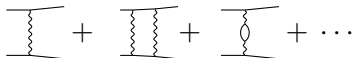
Dimension d'opérateurs

Énergie de cordes

Dualité AdS/CFT

Théorie quantique des champs

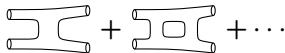
infinité de particules quantiques ponctuelles en interaction



- calculs perturbatifs
- ~~gravité~~

Théorie de cordes

particules remplacées par des *cordes* unidimensionnelles



- description de la gravité
- compréhension partielle

Dualité AdS/CFT

(conjecture)

Théorie conforme (CFT)
de *Super Yang-Mills*

régime de couplage fort

régime perturbatif

intégrabilité

Cordes

en géométrie $AdS_5 \times S^5$

régime de couplage fort

régime perturbatif

Dimension d'opérateurs

Énergie de cordes

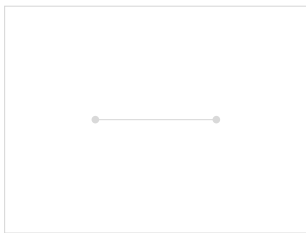
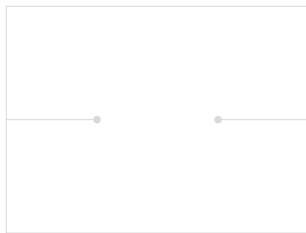
Système "P- μ "

[Gromov, Kazakov, Leurent, Volin 13&14]

Conjecture : La dimension des opérateurs de la théorie de super-Yang-Mills est donnée par un "Ansatz de Bethe Thermodynamique".

- Pas d'Équation de Bethe, mais des fonctions T satisfaisant l'équation de Hirota

↪ Des fonctions Q avec certaines propriétés analytiques.

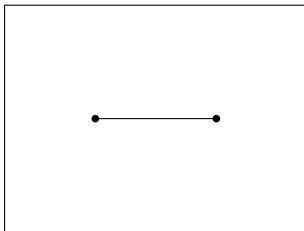
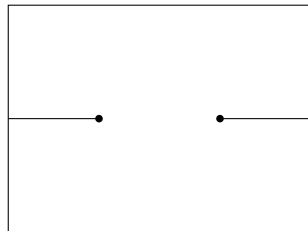
 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4  Q_5, Q_6, Q_7, Q_8

Système "P- μ "

[Gromov, Kazakov, Leurent, Volin 13&14]

Conjecture : La dimension des opérateurs de la théorie de super-Yang-Mills est donnée par un "Ansatz de Bethe Thermodynamique".

- Pas d'Équation de Bethe, mais des fonctions T satisfaisant l'équation de Hirota
- ↪ Des fonctions Q avec certaines propriétés analytiques.

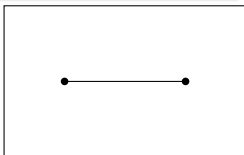
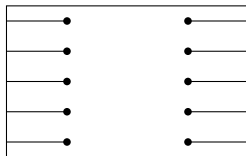
 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4  Q_5, Q_6, Q_7, Q_8

Système "P- μ "[Gromov, Kazakov, Leurent, Volin 13&14]
Relations de discontinuitéSystème "P- μ "

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = \mu_{ij} \mathbf{P}^j \quad \tilde{\mathbf{P}}^i = \mu^{ij} \mathbf{P}_j$$

$$\tilde{\mu}_{ij} - \mu_{ij} = \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{P}}_j - \mathbf{P}_j \tilde{\mathbf{P}}_i$$

$$\tilde{\mu}^{ij} - \mu^{ij} = \mathbf{P}^j \tilde{\mathbf{P}}^i - \mathbf{P}^i \tilde{\mathbf{P}}^j$$

 $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}^i$  μ_{jk} est i -périodique

- $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$
- $\mu_{ji} = -\mu_{ij}$
- $\mu_{12} \mu_{34} - \mu_{13} \mu_{24} + \mu_{14} \mu_{23} = 1$
- \tilde{f} : continuation analytique de f autour du point de branchement

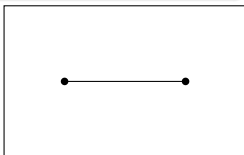
Dimension : $\Delta = L + \lim_{u \rightarrow \infty} u \frac{\partial}{\partial u} \log \mu_{1,2}(u)$

Système "P- μ "[Gromov, Kazakov, Leurent, Volin 13&14]
Relations de discontinuitéSystème "P- μ "

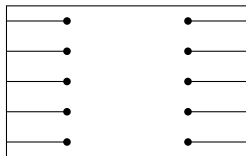
$$\tilde{P}_i = \mu_{ij} P^j \quad \tilde{P}^i = \mu^{ij} P_j$$

$$\tilde{\mu}_{ij} - \mu_{ij} = P_i \tilde{P}_j - P_j \tilde{P}_i$$

$$\tilde{\mu}^{ij} - \mu^{ij} = P^j \tilde{P}^i - P^i \tilde{P}^j$$

 P_i, P^i

- $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$
- $\mu_{ji} = -\mu_{ij}$
- $\mu_{12} \mu_{34} - \mu_{13} \mu_{24} + \mu_{14} \mu_{23} = 1$
- \tilde{f} : continuation analytique de f autour du point de branchement

 μ_{jk} est i -périodique

$$\text{Dimension} : \Delta = L + \lim_{u \rightarrow \infty} u \frac{\partial}{\partial u} \log \mu_{1,2}(u)$$

Application : Développement perturbatif de la dimension de l'opérateur de Konishi

$$\Delta_{\text{Konishi}} = 4 + 12g^2 - 48g^4 + 336g^6 + 96g^8(-26 + 6\zeta_3 - 15\zeta_5) \\ - 96g^{10}(-158 - 72\zeta_3 + 54\zeta_3^2 + 90\zeta_5 - 315\zeta_7) + \mathcal{O}(g^{12})$$

[Bajnok Egedüs Janik Łukowski 09]

[Eden Heslop Korchemsky Smirnov Sokatchev 12]

Application : Développement perturbatif de la dimension de l'opérateur de Konishi

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{Konishi}} = & 4 + 12 g^2 - 48 g^4 + 336 g^6 + 96 g^8 (-26 + 6 \zeta_3 - 15 \zeta_5) \\ & - 96 g^{10} (-158 - 72 \zeta_3 + 54 \zeta_3^2 + 90 \zeta_5 - 315 \zeta_7) \\ & - 48 g^{12} (160 + 5472 \zeta_3 - 3240 \zeta_3 \zeta_5 + 432 \zeta_3^2 \\ & \quad - 2340 \zeta_5 - 1575 \zeta_7 + 10206 \zeta_9) + \mathcal{O}(g^{14})\end{aligned}$$

[SL Volin Serban 12]

Application : Développement perturbatif de la dimension de l'opérateur de Konishi

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{Konishi}} = & 4 + 12 g^2 - 48 g^4 + 336 g^6 + 96 g^8 (-26 + 6 \zeta_3 - 15 \zeta_5) \\ & - 96 g^{10} (-158 - 72 \zeta_3 + 54 \zeta_3^2 + 90 \zeta_5 - 315 \zeta_7) \\ & - 48 g^{12} (160 + 5472 \zeta_3 - 3240 \zeta_3 \zeta_5 + 432 \zeta_3^2 \\ & \quad - 2340 \zeta_5 - 1575 \zeta_7 + 10206 \zeta_9)\end{aligned}$$

[SL Volin Serban 12]

$$\begin{aligned}& + 48 g^{14} (-44480 + 108960 \zeta_3 + 8568 \zeta_3 \zeta_5 \\ & \quad - 40320 \zeta_3 \zeta_7 - 8784 \zeta_3^2 + 2592 \zeta_3^3 - 4776 \zeta_5 \\ & \quad - 20700 \zeta_5^2 - 26145 \zeta_7 - 17406 \zeta_9 + 152460 \zeta_{11}) \\ & + \mathcal{O}(g^{16})\end{aligned}$$

[Bajnok Janik 12]

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{Konishi}} = & 4 + 12g^2 - 48g^4 + 336g^6 + 96g^8(-26 + 6\zeta_3 - 15\zeta_5) \\
& - 96g^{10}(-158 - 72\zeta_3 + 54\zeta_3^2 + 90\zeta_5 - 315\zeta_7) \\
& - 48g^{12}(160 + 5472\zeta_3 - 3240\zeta_3\zeta_5 + 432\zeta_3^2 \\
& \quad - 2340\zeta_5 - 1575\zeta_7 + 10206\zeta_9) \\
& + 48g^{14}(-44480 + 108960\zeta_3 + 8568\zeta_3\zeta_5 \\
& \quad - 40320\zeta_3\zeta_7 - 8784\zeta_3^2 + 2592\zeta_3^3 - 4776\zeta_5 \\
& \quad - 20700\zeta_5^2 - 26145\zeta_7 - 17406\zeta_9 + 152460\zeta_{11}) \\
& + 48g^{16}(1133504 + 263736\zeta_2\zeta_9 - 1739520\zeta_3 \\
& \quad - 90720\zeta_3\zeta_5 - 129780\zeta_3\zeta_7 + 78408\zeta_3\zeta_8 \\
& \quad + 483840\zeta_3\zeta_9 + 165312\zeta_3^2 - 82080\zeta_3^2\zeta_5 \\
& \quad + 41472\zeta_3^3 + 178200\zeta_4\zeta_7 - 409968\zeta_5 \\
& \quad + 121176\zeta_5\zeta_6 + 463680\zeta_5\zeta_7 + 49680\zeta_5^2 \\
& \quad + 455598\zeta_7 + 194328\zeta_9 - 555291\zeta_{11} \\
& \quad - 2208492\zeta_{13} - 14256\zeta_{1,2,8}) + \mathcal{O}(g^{18})
\end{aligned}$$

[SL Volin 13]

9^{ème} ordre obtenu à partir du système P- μ

$$\begin{aligned}
 \dots - 96 g^{18} & \left(10568224 - 11884608 \zeta_3 + 148896 \zeta_3 \zeta_5 - 177768 \zeta_3 \zeta_5^2 \right. \\
 & - 354384 \zeta_3 \zeta_7 - 1244484 \zeta_3 \zeta_9 + 2901096 \zeta_{11} \zeta_3 + 533952 \zeta_3^2 \\
 & + 284904 \zeta_3^2 \zeta_5 - 229824 \zeta_3^2 \zeta_7 + 209952 \zeta_3^3 - 5993280 \zeta_5 \\
 & + 963954 \zeta_5 \zeta_7 + 2553120 \zeta_5 \zeta_9 - 576000 \zeta_5^2 + 2324196 \zeta_7 \\
 & + 1184274 \zeta_7^2 + 2573892 \zeta_9 + 355266 \zeta_{11} + 2644434 \zeta_{13} \\
 & - 15810795 \zeta_{15} + 163296 \frac{\zeta_{11} - \zeta_3 \zeta_{3,5} + \zeta_{3,5,3}}{5} \\
 & \left. - 13608(\zeta_3 \zeta_{3,7} - \zeta_{3,7,3} + \zeta_3^2 \zeta_5 - \zeta_5 \zeta_{5,3} + \zeta_{5,3,5}) \right) \\
 & + \mathcal{O}(g^{20})
 \end{aligned}$$

[Volin 13]

Conclusion

- Chaînes de spins (bien définies et bien comprises)
 - Équations de Bethe \rightsquigarrow valeurs propres (et vecteurs propres) de H
 - Équations de Bethe \leftrightarrow polynomialité des opérateurs Q
 - H s'exprime en fonction des opérateurs Q
- Effets de tailles finis en théorie des champs intégrables (mal défini, essentiellement des conjectures)
 - Propriétés analytiques des fonctions Q
 - \rightsquigarrow système d'équations concis
 - Cette procédure se généralise-t-elle à de nombreux autres modèles ?
- Questions ouvertes et sens physique
 - Peut-on prouver plus rigoureusement ces propriétés sans passer par l'"Ansatz de Bethe Thermodynamique" ?
 - \rightsquigarrow Définition de ces théories de champs comme limites de chaînes de spins

Conclusion

- Chaînes de spins (bien définies et bien comprises)
 - Équations de Bethe \rightsquigarrow valeurs propres (et vecteurs propres) de H
 - Équations de Bethe \leftrightarrow polynomialité des opérateurs Q
 - H s'exprime en fonction des opérateurs Q
- Effets de tailles finis en théorie des champs intégrables (mal défini, essentiellement des conjectures)
 - Propriétés analytiques des fonctions Q
 - \rightsquigarrow système d'équations concis
 - Cette procédure se généralise-t-elle à de nombreux autres modèles ?
- Questions ouvertes et sens physique
 - Peut-on prouver plus rigoureusement ces propriétés sans passer par l'"Ansatz de Bethe Thermodynamique" ?
 - \rightsquigarrow Définition de ces théories de champs comme limites de chaînes de spins

Conclusion

- Chaînes de spins (bien définies et bien comprises)
 - Équations de Bethe \rightsquigarrow valeurs propres (et vecteurs propres) de H
 - Équations de Bethe \leftrightarrow polynomialité des opérateurs Q
 - H s'exprime en fonction des opérateurs Q
- Effets de tailles finis en théorie des champs intégrables (mal défini, essentiellement des conjectures)
 - Propriétés analytiques des fonctions Q
 - \rightsquigarrow système d'équations concis
 - Cette procédure se généralise-t-elle à de nombreux autres modèles ?
- Questions ouvertes et sens physique
 - Peut-on prouver plus rigoureusement ces propriétés sans passer par l'"Ansatz de Bethe Thermodynamique" ?
 - \rightsquigarrow Définition de ces théories de champs comme limites de chaînes de spins

Conclusion

- Chaînes de spins (bien définies et bien comprises)
 - Équations de Bethe \rightsquigarrow valeurs propres (et vecteurs propres) de H
 - Équations de Bethe \leftrightarrow polynomialité des opérateurs Q
 - H s'exprime en fonction des opérateurs Q
- Effets de tailles finis en théorie des champs intégrables (mal défini, essentiellement des conjectures)
 - Propriétés analytiques des fonctions Q
 - \rightsquigarrow système d'équations concis
 - Cette procédure se généralise-t-elle à de nombreux autres modèles ?
- Questions ouvertes et sens physique
 - Peut-on prouver plus rigoureusement ces propriétés sans passer par l'"Ansatz de Bethe Thermodynamique" ?
 - \rightsquigarrow Définition de ces théories de champs comme limites de chaînes de spins

Merci pour votre attention