

Intégrabilité classique de systèmes quantiques : de chaînes de spins à la dualité AdS/CFT.

Sébastien Leurent

Imperial College

[arXiv :1112.3310] A. Alexandrov, V. Kazakov, SL,
Z.Tsuboi, A. Zabrodin

[arXiv :1110.0562] N.Gromov, V. Kazakov, SL, D. Volin

[arXiv :1302.1135] SL, D. Volin

Institut de Mathématiques de Bourgogne, 14 Mars, 2013

Systèmes quantiques

en dimension finie

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

- Etat du système : *fonction d'onde*

vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Éspace de Hilbert
de dimension n

- Évolution temporelle : $\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = -i \underbrace{H}_{\text{Hamiltonien}} |\psi\rangle$

Hamiltonien

H : *Hamiltonien* (matrice hermitienne de taille $n \times n$)

- Diagonalisation de H :

- vecteurs propres de H : *États propres*
- valeurs propres de H : *Énergie des différents états*

- Charges conservées :

Opérateurs (i.e. matrices) commutant avec le Hamiltonien

$$[\mathcal{O}, H] = 0$$

Systèmes quantiques

en dimension finie

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

- Etat du système : *fonction d'onde*

vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Éspace de Hilbert
de dimension n

- Évolution temporelle : $\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = -i \underbrace{H}_{\text{Hamiltonien}} |\psi\rangle$

Hamiltonien

H : *Hamiltonien* (matrice hermitienne de taille $n \times n$)

- Diagonalisation de H :

- vecteurs propres de H : *États propres*

- valeurs propres de H : *Énergie des différents états*

- Charges conservées :

Opérateurs (i.e. matrices) commutant avec le Hamiltonien

$$[\mathcal{O}, H] = 0$$

Systèmes quantiques

en dimension finie

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

- Etat du système : *fonction d'onde*

vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Éspace de Hilbert
de dimension n

- Évolution temporelle : $\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = -i \underbrace{H}_{\text{Hamiltonien}} |\psi\rangle$

Hamiltonien

H : *Hamiltonien* (matrice hermitienne de taille $n \times n$)

- Diagonalisation de H :
 - vecteurs propres de H : *États propres*
 - valeurs propres de H : *Énergie* des différents états
- Charges conservées :

Opérateurs (i.e. matrices) commutant avec le Hamiltonien

$$[O, H] = 0$$

Systèmes quantiques

en dimension finie

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

- Etat du système : *fonction d'onde*

vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Éspace de Hilbert
de dimension n

- Évolution temporelle : $\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = -i \underbrace{H}_{\text{Hamiltonien}} |\psi\rangle$

Hamiltonien

H : *Hamiltonien* (matrice hermitienne de taille $n \times n$)

- Diagonalisation de H :
 - vecteurs propres de H : *États propres*
 - valeurs propres de H : *Énergie* des différents états
- Charges conservées :

Opérateurs (i.e. matrices) commutant avec le Hamiltonien

$$[\mathcal{O}, H] = 0$$

Systèmes quantiques

en dimension finie

Motivation

Chaînes de
spinsÉquation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classiqueTaille finie en
théorie des
champsSystème Y
Analyticity of
Q-functionsAdS/CFT à
couplage
faible

- Etat du système : *fonction d'onde*

vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ Espace de Hilbert
de dimension n

- Évolution temporelle : $\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = -i \underbrace{H}_{\text{Hamiltonien}} |\psi\rangle$

 H : *Hamiltonien* (matrice hermitienne de taille $n \times n$)

- Diagonalisation de H :
 - vecteurs propres de H : *États propres*
 - valeurs propres de H : *Énergie* des différents états
- **Famille de** charges conservées :

Famille d'opérateurs (i.e. matrices) commutant avec le
Hamiltonien et entre eux

$$[\mathcal{O}_i, H] = 0$$

$$[\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j] = 0$$

Théorie quantique des champs

Développements perturbatifs

Théories quantiques des champs : des particules interagissent par l'échange de « bosons de jauge »

exemple : répulsion électromagnétique entre deux électrons



La probabilité que les électrons soient déviés dans une direction donnée s'obtient à partir de la somme des contributions (d'un nombre infini) de processus différents.

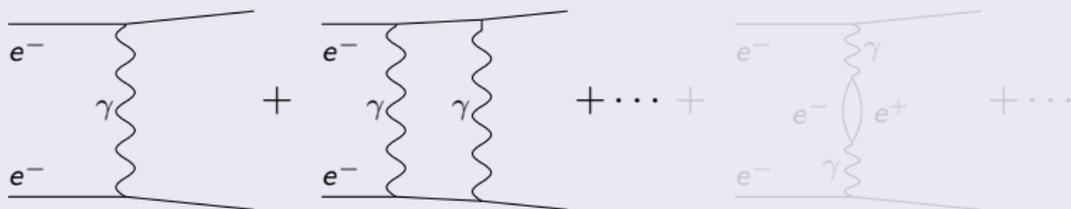
- De nombreux systèmes de particules en interaction sont décrits ainsi : par exemple le *modèle standard* décrit les interactions *électromagnétiques*, *faibles* and *fortes*.
- Ce *modèle standard* ne décrit pas la gravité.

Théorie quantique des champs

Développements perturbatifs

Théories quantiques des champs : des particules interagissent par l'échange de « bosons de jauge »

exemple : répulsion électromagnétique entre deux électrons



La probabilité que les électrons soient déviés dans une direction donnée s'obtient à partir de la somme des contributions (d'un nombre infini) de processus différents.

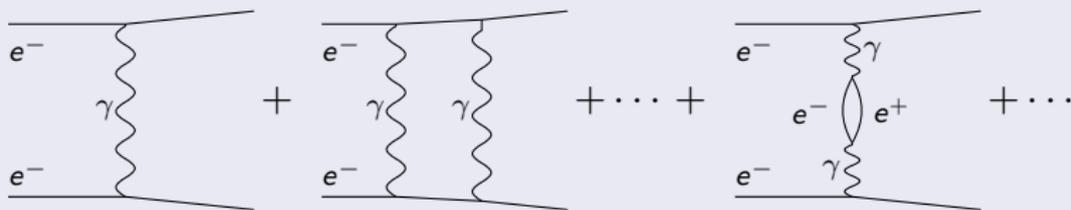
- De nombreux systèmes de particules en interaction sont décrits ainsi : par exemple le *modèle standard* décrit les interactions *électromagnétiques, faibles* and *fortes*.
- Ce *modèle standard* ne décrit pas la gravité.

Théorie quantique des champs

Développements perturbatifs

Théories quantiques des champs : des particules interagissent par l'échange de « bosons de jauge »

exemple : répulsion électromagnétique entre deux électrons



La probabilité que les électrons soient déviés dans une direction donnée s'obtient à partir de la somme des contributions (d'un nombre infini) de processus différents.

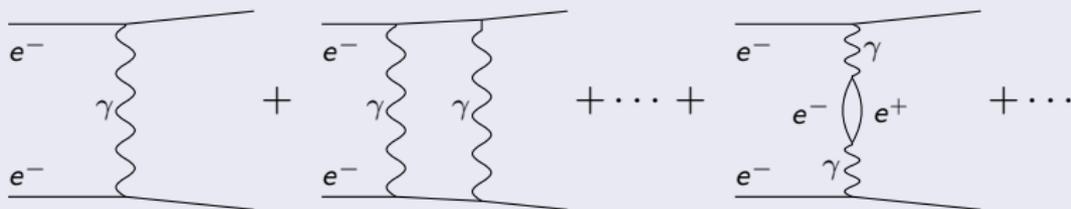
- De nombreux systèmes de particules en interaction sont décrits ainsi : par exemple le *modèle standard* décrit les interactions *électromagnétiques, faibles* and *fortes*.
- Ce *modèle standard* ne décrit pas la gravité.

Théorie quantique des champs

Développements perturbatifs

Théories quantiques des champs : des particules interagissent par l'échange de « bosons de jauge »

exemple : répulsion électromagnétique entre deux électrons



La probabilité que les électrons soient déviés dans une direction donnée s'obtient à partir de la somme des contributions (d'un nombre infini) de processus différents.

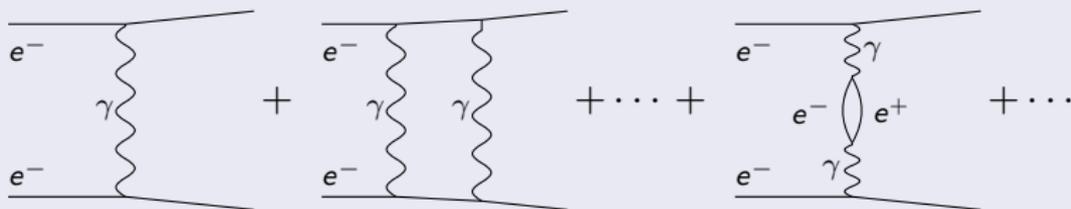
- De nombreux systèmes de particules en interaction sont décrits ainsi : par exemple le *modèle standard* décrit les interactions *électromagnétiques*, *faibles* and *fortes*.
 - Ce *modèle standard* ne décrit pas la gravité.

Théorie quantique des champs

Développements perturbatifs

Théories quantiques des champs : des particules interagissent par l'échange de « bosons de jauge »

exemple : répulsion électromagnétique entre deux électrons



La probabilité que les électrons soient déviés dans une direction donnée s'obtient à partir de la somme des contributions (d'un nombre infini) de processus différents.

→ De nombreux systèmes de particules en interaction sont décrits ainsi : par exemple le *modèle standard* décrit les interactions *électromagnétiques*, *faibles* and *fortes*.

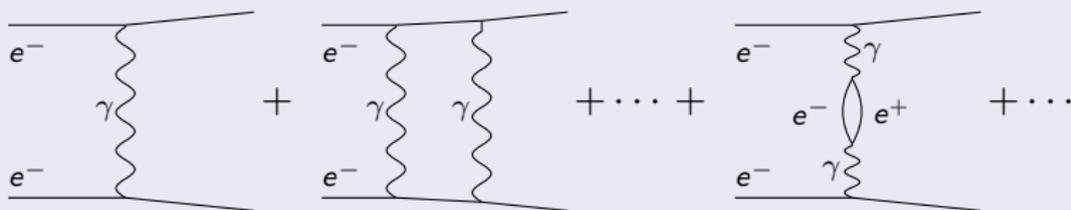
• Ce *modèle standard* ne décrit pas la gravité.

Théorie quantique des champs

Développements perturbatifs

Théories quantiques des champs : des particules interagissent par l'échange de « bosons de jauge »

exemple : répulsion électromagnétique entre deux électrons



La probabilité que les électrons soient déviés dans une direction donnée s'obtient à partir de la somme des contributions (d'un nombre infini) de processus différents.

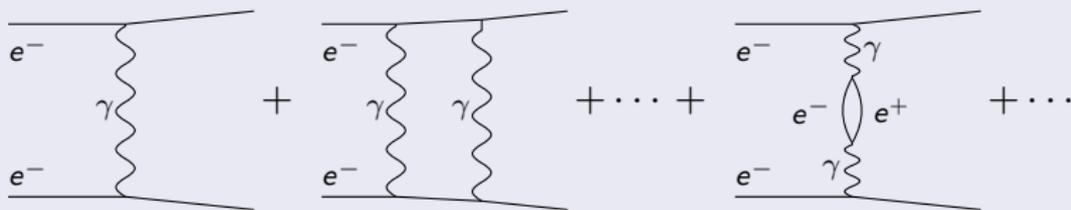
- De nombreux systèmes de particules en interaction sont décrits ainsi : par exemple le *modèle standard* décrit les interactions *électromagnétiques*, *faibles* and *fortes*.
- *Ce modèle standard ne décrit pas la gravité.*

Théorie quantique des champs

Développements perturbatifs

Théories quantiques des champs : des particules interagissent par l'échange de « bosons de jauge »

exemple : répulsion électromagnétique entre deux électrons



Description perturbative

Cette somme (tronquée) ne fournit une bonne approximation que dans un domaine d'énergie très spécifique
(le domaine perturbatif ou régime de couplage faible)

décrits ainsi : par exemple le *modèle standard* décrit les interactions *électromagnétiques*, *faibles* and *fortes*.

- *Ce modèle standard ne décrit pas la gravité.*

Dualité AdS/CFT (conjecture)

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota
Opérateurs Q
Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

AdS

théorie des cordes de
"Type IIB" sur $AdS_5 \times S^5$
(« *gravité quantique* »)

régime de couplage fort

régime de couplage faible

énergie des excitations
des cordes

CFT

théorie conforme en 3+1
dimensions
"ℳ = 4 super Yang-Mills"

régime de couplage fort

régime de couplage faible

dimensions conformes des
opérateurs

Intégrabilité

Dans la *limite plane*, de nombreuses propriétés intégrables de cette dualité ont été mises en évidence, en particulier en ce qui concerne le **spectre**.

Dualité AdS/CFT (conjecture)

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

AdS

théorie des cordes de
"Type IIB" sur $AdS_5 \times S^5$
(« *gravité quantique* »)

régime de couplage fort

régime de couplage faible

énergie des excitations
des cordes

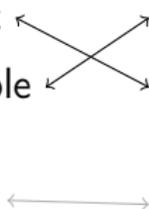
CFT

théorie conforme en 3+1
dimensions
"ℳ = 4 super Yang-Mills"

régime de couplage fort

régime de couplage faible

dimensions conformes des
opérateurs



Intégrabilité

Dans la *limite plane*, de nombreuses propriétés intégrables de cette dualité ont été mises en évidence, en particulier en ce qui concerne le **spectre**.

Dualité AdS/CFT (conjecture)

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota
Opérateurs Q
Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

AdS

théorie des cordes de
"Type IIB" sur $AdS_5 \times S^5$
(« *gravité quantique* »)

régime de couplage fort

régime de couplage faible

énergie des excitations
des cordes

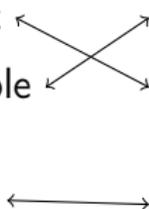
CFT

théorie conforme en 3+1
dimensions
"ℳ = 4 super Yang-Mills"

régime de couplage fort

régime de couplage faible

dimensions conformes des
opérateurs



Intégrabilité

Dans la *limite plane*, de nombreuses propriétés intégrables de cette dualité ont été mises en évidence, en particulier en ce qui concerne le **spectre**.

Dualité AdS/CFT (conjecture)

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota
Opérateurs Q
Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

AdS

théorie des cordes de
"Type IIB" sur $AdS_5 \times S^5$
(« *gravité quantique* »)

régime de couplage fort

régime de couplage faible

énergie des excitations
des cordes

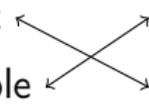
CFT

théorie conforme en 3+1
dimensions
"ℳ = 4 super Yang-Mills"

régime de couplage fort

régime de couplage faible

dimensions conformes des
opérateurs



Intégrabilité

Dans la *limite plane*, de nombreuses propriétés intégrables de cette dualité ont été mises en évidence, en particulier en ce qui concerne le **spectre**.

Intégrabilité quantique

Intégrabilité quantique : propriété de modèles très spécifiques (des chaînes de spins, des théories des champs, ...) qui ont souvent

- 1+1 dimensions
- des interactions locales
- de nombreuses charges conservées
- des conditions aux bords spécifiques (par exemple périodiques).



Ces modèles ont les propriétés suivantes :

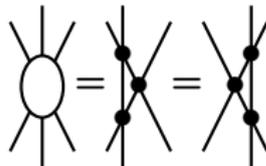
Propriétés des modèles intégrables

- Les interactions à n points se factorisent en interactions à 2 points.
- La diagonalisation exacte du Hamiltonien se ramène à la résolution des "équations de Bethe".

Intégrabilité quantique

Intégrabilité quantique : propriété de modèles très spécifiques (des chaînes de spins, des théories des champs, ...) qui ont souvent

- 1+1 dimensions
- des interactions locales
- de nombreuses charges conservées
- des conditions aux bords spécifiques (par exemple périodiques).



Ces modèles ont les propriétés suivantes :

Propriétés des modèles intégrables

- Les interactions à n points se factorisent en interactions à 2 points.
- La diagonalisation exacte du Hamiltonien se ramène à la résolution des “équations de Bethe”.

Théories des champs intégrables à 1+1 dimensions

Ansatz de Bethe : fonction d'onde en grand volume

- ondes planes quand les particules sont loin les unes des autres
 - une *matrice* S décrit l'interaction entre deux particules
- ⇒ équations de Bethe

Cet Ansatz fonctionne si l'espace est périodique et sa période est grande

Enjeu dans ce séminaire

La dernière partie de ce séminaire traitera du spectre de ces théories en *taille finie*, quand l'Ansatz ci-dessus ne peut être utilisé.

Théories des champs intégrables à 1+1 dimensions

Ansatz de Bethe : fonction d'onde en grand volume

- ondes planes quand les particules sont loin les unes des autres
 - une *matrice* S décrit l'interaction entre deux particules
- ⇒ équations de Bethe

Cet Ansatz fonctionne si l'espace est périodique et sa période est grande

Enjeu dans ce séminaire

La dernière partie de ce séminaire traitera du spectre de ces théories en *taille finie*, quand l'Ansatz ci-dessus ne peut être utilisé.

Théories des champs intégrables à 1+1 dimensions

Ansatz de Bethe : fonction d'onde en grand volume

- ondes planes quand les particules sont loin les unes des autres
 - une *matrice* S décrit l'interaction entre deux particules
- ⇒ équations de Bethe

Cet Ansatz fonctionne si l'espace est périodique et sa période est grande

Enjeu dans ce séminaire

La dernière partie de ce séminaire traitera du spectre de ces théories en *taille finie*, quand l'Ansatz ci-dessus ne peut être utilisé.

- 0 Motivation
- 1 Chaînes de spins de (super-)symétrie $GL(K|M)$
 - Opérateurs T et équation de Hirota
 - Résolution de l'équation de Hirota \iff opérateurs Q
 - Intégrabilité classique du système quantique.
- 2 Effets de taille finie en théorie des champs intégrable
 - Système $Y \rightsquigarrow$ spectre
 - Propriétés analytiques des fonctions Q
- 3 Développement perturbatif à couplage faible pour AdS/CFT

Chaîne de spins "XXX" de Heisenberg

Construction des opérateurs T (matrices de transfert)

Motivation

Chaînes de spins

Équation de Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité classique

Taille finie en théorie des champs

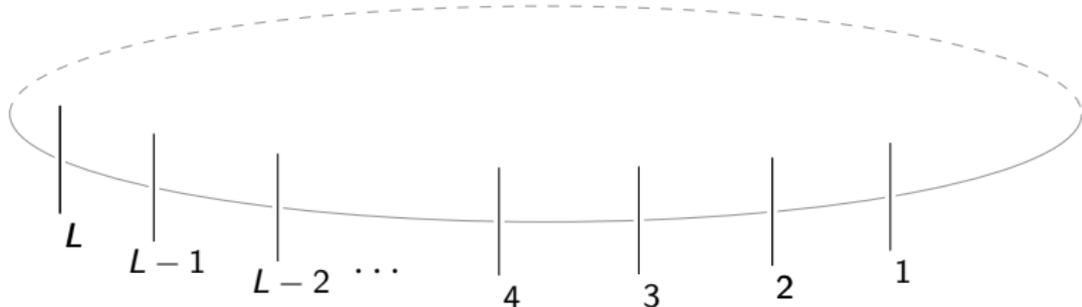
Système Y
Analyticity of Q -functions

AdS/CFT à couplage faible

$$H = - \sum_i \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1} = L - 2 \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a \left((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \right)$$

opérateur sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$



$|\psi_0\rangle = |\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\rangle$, $|\tilde{\psi}_0\rangle = |\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$, et leur combinaisons
 $\alpha |\psi_0\rangle + \beta |\tilde{\psi}_0\rangle$ sont les états de plus faible énergie :

$$H |\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle = -L |\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$$

Chaîne de spins "XXX" de Heisenberg

Construction des opérateurs T (matrices de transfert)

Motivation

Chaînes de spins

Équation de Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité classique

Taille finie en théorie des champs

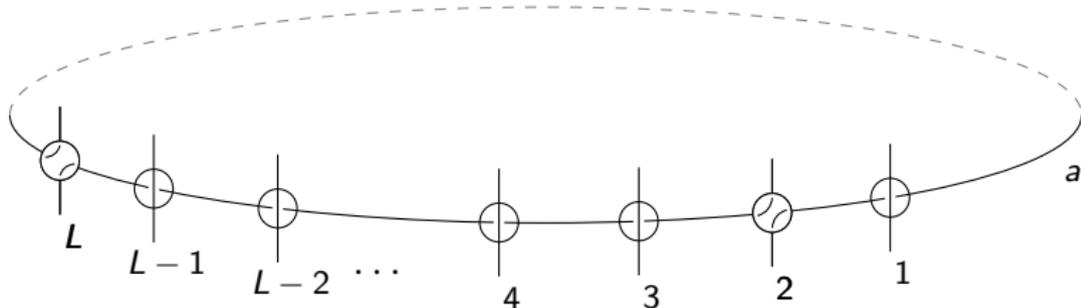
Système Y
Analyticity of Q-functions

AdS/CFT à couplage faible

$$H = - \sum_i \vec{\sigma}_i \cdot \sigma_{i+1} = L - 2 \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a \left((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$



$$\begin{aligned} \text{opérateur de permutation : } \mathcal{P}_{1,2} | \downarrow\downarrow \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \cdots \rangle &= | \downarrow\downarrow \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \cdots \rangle \\ \mathcal{P}_{1,2} | \uparrow\downarrow \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \cdots \rangle &= | \uparrow\downarrow \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \cdots \rangle \end{aligned}$$

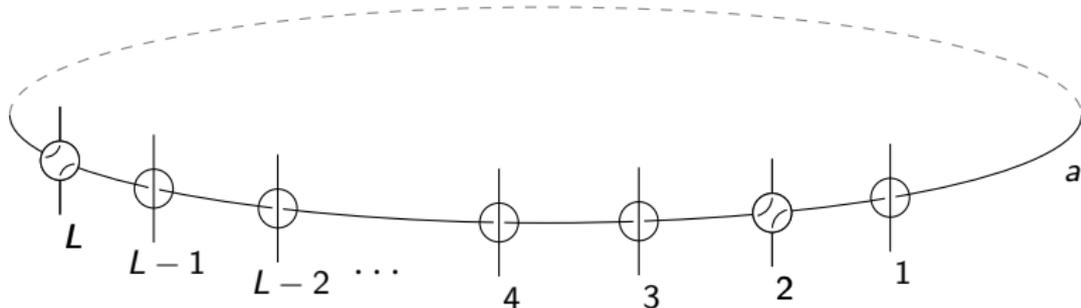
- $[T(u), T(v)] = 0$

(s'obtient à partir de relations comme $\mathcal{P}_{i,j} \mathcal{P}_{j,k} = \mathcal{P}_{j,k} \mathcal{P}_{i,k}$)

Chaîne de spins de symétrie $GL(K)$ Construction des opérateurs T (matrices de transfert)

$$H = -\sum_i \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_{i+1} = \frac{2}{K} L - 2 \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a \left((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^K)^{\otimes L}$ 

$$\text{opérateur de permutation : } \mathcal{P}_{1,2} |bbacdbc \dots\rangle = |bbacdbc \dots\rangle$$

$$\mathcal{P}_{1,2} |cbacdbc \dots\rangle = |bcacdbc \dots\rangle$$

- $[T(u), T(v)] = 0$

(s'obtient à partir de relations comme $\mathcal{P}_{i,j} \mathcal{P}_{j,k} = \mathcal{P}_{j,k} \mathcal{P}_{i,k}$)

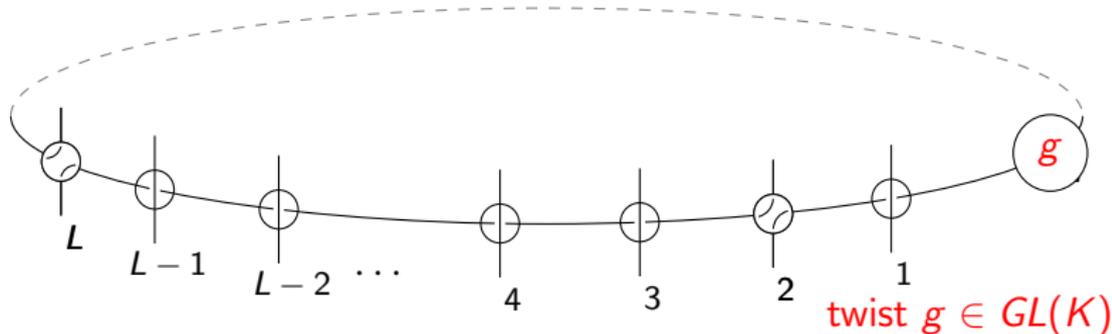
Chaîne de spins de symétrie $GL(K)$

Construction des opérateurs T (matrices de transfert)

$$H = \ll - \sum_i \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_{i+1} \gg = \frac{2}{K} L - 2 \frac{d}{du} \log T(u) \Big|_{u=0}$$

$$T(u) = \text{tr}_a \left((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot g \right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^K)^{\otimes L}$



opérateur de permutation : $\mathcal{P}_{1,2} |bbacdbc \dots\rangle = |bbacdbc \dots\rangle$
 $\mathcal{P}_{1,2} |cbacdbc \dots\rangle = |bcacdbc \dots\rangle$

- $[T(u), T(v)] = 0$
 (s'obtient à partir de relations comme $\mathcal{P}_{i,j} \mathcal{P}_{j,k} = \mathcal{P}_{j,k} \mathcal{P}_{i,k}$)

Chaîne de spins de symétrie $GL(K)$

Construction des opérateurs T (matrices de transfert)

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota
Opérateurs Q
Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

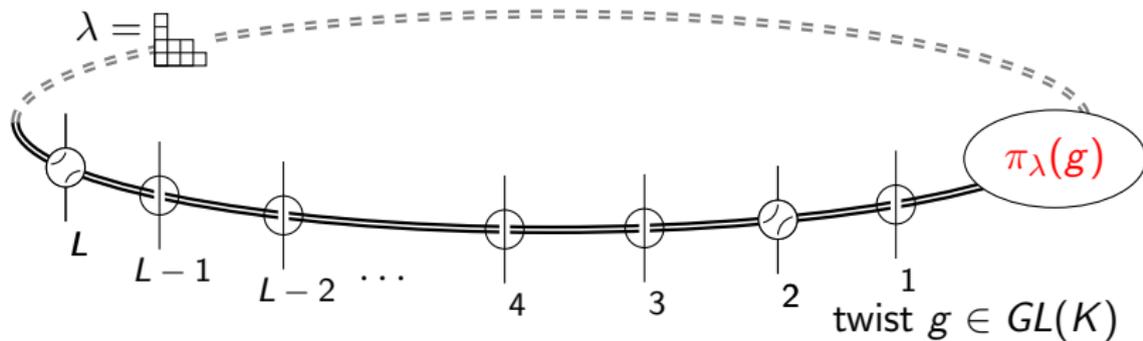
Système Y
Analyticity of
 Q -functions

AdS/CFT à
couplage
faible

$$H = \ll - \sum_i \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_{i+1} \gg = \frac{2}{K} L - 2 \frac{d}{du} \log T^{\square}(u) \Big|_{u=0}$$

$$T^{\lambda}(u) = \text{tr}_a \left((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_{\lambda}(g) \right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^K)^{\otimes L}$



opérateur de permutation généralisé :

$$\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}^{(i)} \otimes \pi_{\lambda}(e_{\beta,\alpha}^{(j)})$$

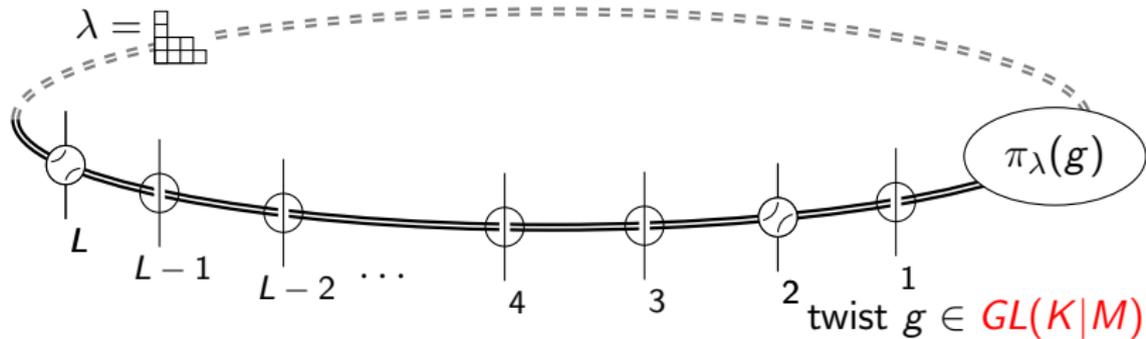
- $[T^{\lambda}(u), T^{\mu}(v)] = 0$

Chaîne de spins de symétrie $GL(K|M)$ Construction des opérateurs T (matrices de transfert)

$$H = \ll - \sum_i \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_{i+1} \gg = \frac{2}{K} L - 2 \frac{d}{du} \log T^\square(u) \Big|_{u=0}$$

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_a \left((u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdot (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L-1,a}) \cdots (u \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^{K|M})^{\otimes L}$



opérateur de permutation généralisé :

$$\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}^{(i)} \otimes \pi_\lambda(e_{\beta,\alpha}^{(j)})$$

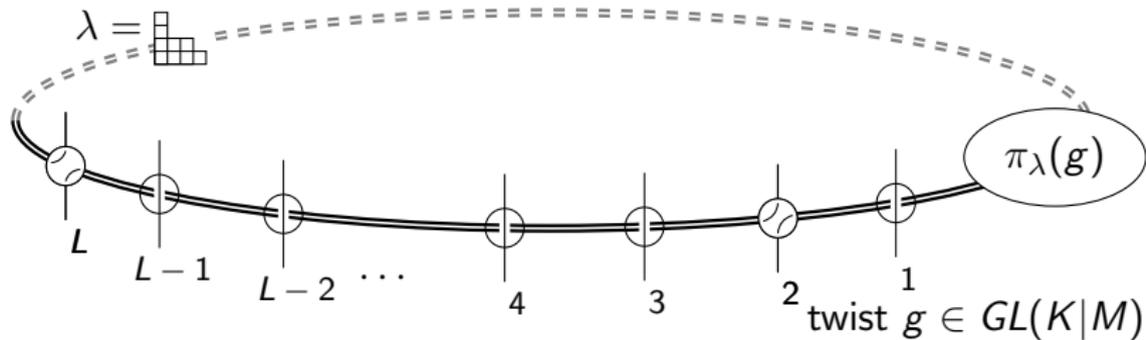
- $[T^\lambda(u), T^\mu(v)] = 0$

Chaîne de spins de symétrie $GL(K|M)$ Construction des opérateurs T (matrices de transfert)

$$H = \ll - \sum_i \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_{i+1} \gg = \frac{2}{K} L - 2 \frac{d}{du} \log T^\square(u) \Big|_{u=0}$$

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_a \left(((u - \theta_L) \mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \theta_1) \mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \right)$$

opérateurs sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^{K|M})^{\otimes L}$



opérateur de permutation généralisé :

$$\mathcal{P}_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}^{(i)} \otimes \pi_\lambda(e_{\beta,\alpha}^{(j)})$$

- $[T^\lambda(u), T^\mu(v)] = 0$

Opérateurs $T \leftrightarrow$ caractères

+ formule de Cherednik-Bazhanov-Reshetikhin (CBR)

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_a \left(((u - \theta_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \theta_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \right)$$

- Si $L = 0$, $T^\lambda(u) = \chi^\lambda(g) \equiv \text{tr} \pi_\lambda(g)$

- En général $u_i \equiv u - \theta_i$

$$T^\lambda(u) = (u_1 + \hat{D}) \otimes (u_2 + \hat{D}) \otimes \cdots \otimes (u_L + \hat{D}) \chi^\lambda(g)$$

Représentations rectangulaires : $a, s \leftrightarrow \lambda = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}}_s \} a$

Formule de CBR

[Cherednik 86] [Bazhanov-Reshetikhin 90] [Kazakov Vieira 08]

$$\chi^\lambda(g) = \det \left(\chi^{1, \lambda_i + j - i}(g) \right)_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}$$

$$\rightsquigarrow T^\lambda(u) = \frac{\det \left(T^{1, \lambda_i + j - i}(u + 1 - j) \right)_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}}{\prod_{k=1}^{|\lambda|} T^{0,0}(u - k)}$$

Opérateurs $T \leftrightarrow$ caractères

+ formule de Cherednik-Bazhanov-Reshetikhin (CBR)

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_a \left(((u - \theta_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \theta_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \right)$$

- Si $L = 0$, $T^\lambda(u) = \chi^\lambda(g) \equiv \text{tr} \pi_\lambda(g)$

- En général

$$T^\lambda(u) = \left(u_1 + \hat{D} \right) \otimes \left(u_2 + \hat{D} \right) \otimes \cdots \otimes \left(u_L + \hat{D} \right) \chi^\lambda(g)$$

$u_i \equiv u - \theta_i$

Représentations rectangulaires : $a, s \leftrightarrow \lambda = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}}_s \} a$

Formule de CBR

[Cherednik 86] [Bazhanov-Reshetikhin 90] [Kazakov Vieira 08]

$$\chi^\lambda(g) = \det \left(\chi^{1, \lambda_i + j - i}(g) \right)_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}$$

$$\rightsquigarrow T^\lambda(u) = \frac{\det \left(T^{1, \lambda_i + j - i}(u + 1 - j) \right)_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}}{\prod_{k=1}^{|\lambda|-1} T^{0,0}(u-k)}$$

Opérateurs $T \leftrightarrow$ caractères

+ formule de Cherednik-Bazhanov-Reshetikhin (CBR)

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_a \left(((u - \theta_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \theta_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \right)$$

- Si $L = 0$, $T^\lambda(u) = \chi^\lambda(g) \equiv \text{tr} \pi_\lambda(g)$

- En général

$$T^\lambda(u) = \left(u_1 + \hat{D} \right) \otimes \left(u_2 + \hat{D} \right) \otimes \cdots \otimes \left(u_L + \hat{D} \right) \chi^\lambda(g)$$

$u_i \equiv u - \theta_i$

Représentations rectangulaires : $a, s \leftrightarrow \lambda = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}}_s \} a$

Formule de CBR

[Cherednik 86] [Bazhanov-Reshetikhin 90] [Kazakov Vieira 08]

$$\chi^\lambda(g) = \det \left(\chi^{1, \lambda_i + j - i}(g) \right)_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}$$

$$\rightsquigarrow T^\lambda(u) = \frac{\det \left(T^{1, \lambda_i + j - i}(u + 1 - j) \right)_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}}{\prod_{k=1}^{|\lambda|-1} T^{0,0}(u-k)}$$

Opérateurs $T \leftrightarrow$ caractères

+ formule de Cherednik-Bazhanov-Reshetikhin (CBR)

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_a \left(((u - \theta_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \theta_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \right)$$

- En général $u_i \equiv u - \theta_i$

$$T^\lambda(u) = \left(u_1 + \hat{D} \right) \otimes \left(u_2 + \hat{D} \right) \otimes \cdots \otimes \left(u_L + \hat{D} \right) \chi^\lambda(g)$$

Représentations rectangulaires : $a, s \leftrightarrow \lambda = \left. \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \right\} a$

Formule de CBR

[Cherednik 86] [Bazhanov-Reshetikhin 90] [Kazakov Vieira 08]

$$\chi^\lambda(g) = \det \left(\chi^{1, \lambda_i + j - i}(g) \right)_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}$$

$$\rightsquigarrow T^\lambda(u) = \frac{\det \left(T^{1, \lambda_i + j - i}(u + 1 - j) \right)_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}}{\prod_{k=1}^{|\lambda|-1} T^{0,0}(u-k)}$$

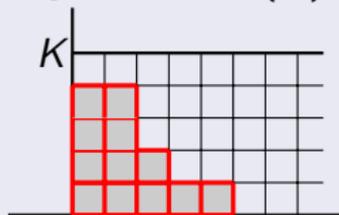
- “Équivalente” à l'équation de Hirota :

$$T^{a,s}(u+1) \cdot T^{a,s}(u) = T^{a+1,s}(u+1) \cdot T^{a-1,s}(u) + T^{a,s-1}(u+1) \cdot T^{a,s+1}(u)$$

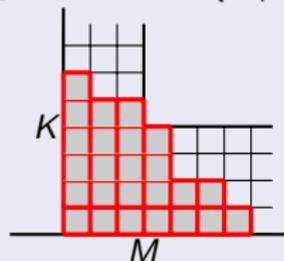
“Fat hooks” et “flot de Bäcklund”

Diagrammes de Young possibles

Symétrie GL(K)



Symétrie GL(K|M)



Résolution de l'équation de Hirota : diminution progressive de la
taille du “fat hook”

[Krichever, Lipan, Wiegmann & Zabrodin 97]

[Kazakov Sorin Zabrodin 08]

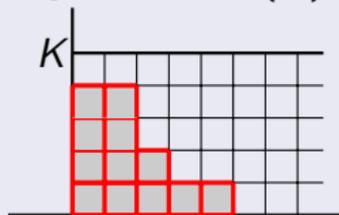


$$\underbrace{\chi\lambda \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}}_{\in GL(2|1)} \rightsquigarrow \underbrace{\chi\lambda \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}}_{\in GL(1|1)} \rightsquigarrow \underbrace{\chi\lambda \begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix}}_{\in GL(1)} \rightsquigarrow \underbrace{\chi\lambda \begin{pmatrix} \end{pmatrix}}_{\in \{1\}}$$

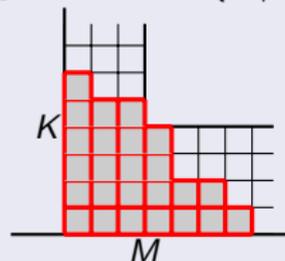
“Fat hooks” et “flot de Bäcklund”

Diagrammes de Young possibles

Symétrie $GL(K)$

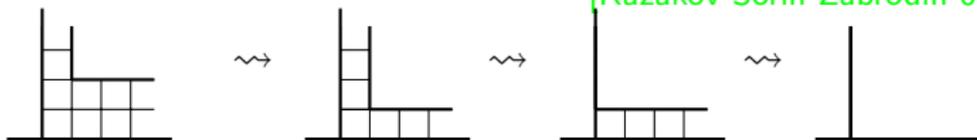


Symétrie $GL(K|M)$



Résolution de l'équation de Hirota : diminution progressive de la
taille du “fat hook” [Krichever, Lipan, Wiegmann & Zabrodin 97]

[Kazakov Sorin Zabrodin 08]



$$\chi_\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}}_{\in GL(2|1)} \rightsquigarrow \chi_\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}}_{\in GL(1|1)} \rightsquigarrow \chi_\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix}}_{\in GL(1)} \rightsquigarrow \chi_\lambda \underbrace{\left(\right)}_{\in \{1\}}$$

Transformations de Bäcklund

système linéaire

Motivation

Chaînes de
spinsÉquation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classiqueTaille finie en
théorie des
champsSystème Y
Analyticity of
Q-functionsAdS/CFT à
couplage
faible

Transformations de Bäcklund

Si $T^{a,s}(u)$ satisfait l'équation de Hirota, et si $F^{a,s}(u)$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{a+1,s}(u)F^{a,s}(u) - T^{a,s}(u)F^{a+1,s}(u) \\ \qquad \qquad \qquad = \underbrace{x_j}_{\text{valeur propre de } g} T^{a+1,s-1}(u+1)F^{a,s+1}(u-1), \\ T^{a,s+1}(u)F^{a,s}(u) - T^{a,s}(u)F^{a,s+1}(u) \\ \qquad \qquad \qquad = x_j T^{a+1,s}(u+1)F^{a-1,s+1}(u-1). \end{array} \right.$$

Alors $F^{a,s}(u)$ satisfait aussi l'équation de Hirota.De plus si $T^{a,s}(u) = 0$ en dehors d'un "fat hook" de taille $(K|M)$, on peut choisir $F^{a,s}(u) = 0$ en dehors du "fat hook" de taille $(K-1|M)$.

Transformations de Bäcklund

système linéaire

Motivation

Chaînes de
spinsÉquation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classiqueTaille finie en
théorie des
champsSystème Y
Analyticity of
Q-functionsAdS/CFT à
couplage
faible

Transformations de Bäcklund

Si $T^{a,s}(u)$ satisfait l'équation de Hirota, et si $F^{a,s}(u)$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{a+1,s}(u)F^{a,s}(u) - T^{a,s}(u)F^{a+1,s}(u) \\ \qquad \qquad \qquad = \underbrace{x_j}_{\text{valeur propre de } g} T^{a+1,s-1}(u+1)F^{a,s+1}(u-1), \\ \\ T^{a,s+1}(u)F^{a,s}(u) - T^{a,s}(u)F^{a,s+1}(u) \\ \qquad \qquad \qquad = x_j T^{a+1,s}(u+1)F^{a-1,s+1}(u-1). \end{array} \right.$$

Alors $F^{a,s}(u)$ satisfait aussi l'équation de Hirota.De plus si $T^{a,s}(u) = 0$ en dehors d'un "fat hook" de taille $(K|M)$, on peut choisir $F^{a,s}(u) = 0$ en dehors du "fat hook" de taille $(K-1|M)$.

Transformations de Bäcklund

système linéaire

Motivation

Chaînes de
spinsÉquation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classiqueTaille finie en
théorie des
champsSystème Y
Analyticity of
Q-functionsAdS/CFT à
couplage
faible

Transformations de Bäcklund

Si $T^{a,s}(u)$ satisfait l'équation de Hirota, et si $F^{a,s}(u)$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{a+1,s}(u)F^{a,s}(u) - T^{a,s}(u)F^{a+1,s}(u) \\ \qquad \qquad \qquad = \underbrace{x_j}_{\text{valeur propre de } g, \text{ choisie de manière arbitraire}} T^{a+1,s-1}(u+1)F^{a,s+1}(u-1), \\ T^{a,s+1}(u)F^{a,s}(u) - T^{a,s}(u)F^{a,s+1}(u) \\ \qquad \qquad \qquad = x_j T^{a+1,s}(u+1)F^{a-1,s+1}(u-1). \end{array} \right.$$

Alors $F^{a,s}(u)$ satisfait aussi l'équation de Hirota.De plus si $T^{a,s}(u) = 0$ en dehors d'un "fat hook" de taille $(K|M)$, on peut choisir $F^{a,s}(u) = 0$ en dehors du "fat hook" de taille $(K-1|M)$.

Diagramme de Hasse

exemple de flot de Bäcklund en symétrie $GL(4)$

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

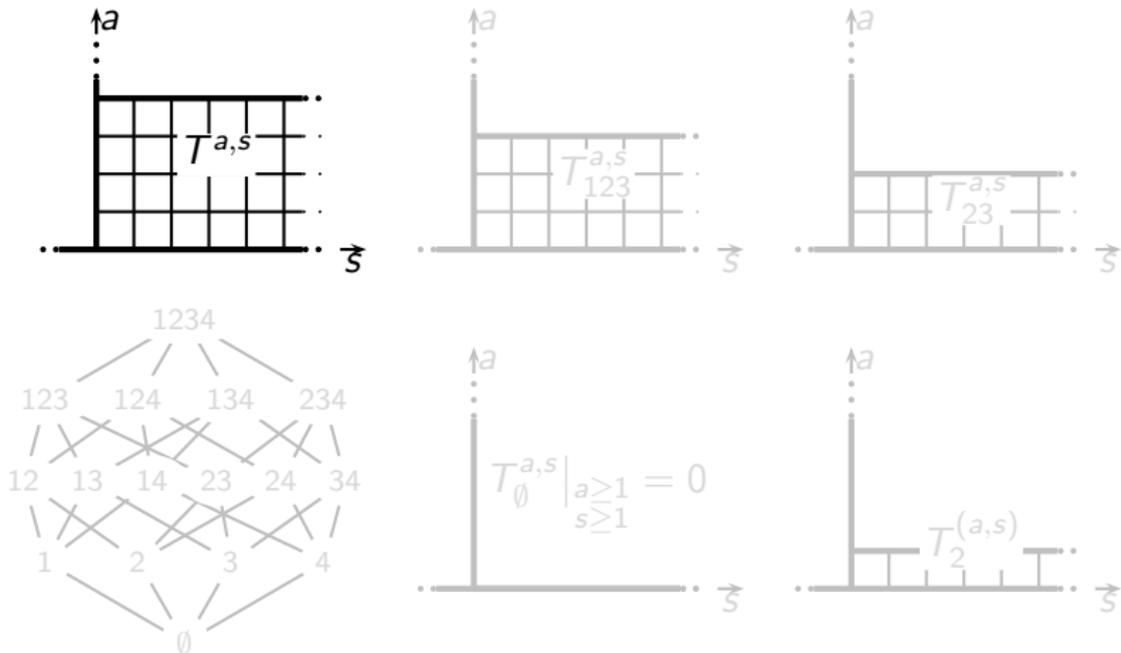
Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible



\rightsquigarrow Cela définit 2^4 opérateurs Q, correspondant aux noeuds du diagramme de Hasse

Diagramme de Hasse

exemple de flot de Bäcklund en symétrie $GL(4)$

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

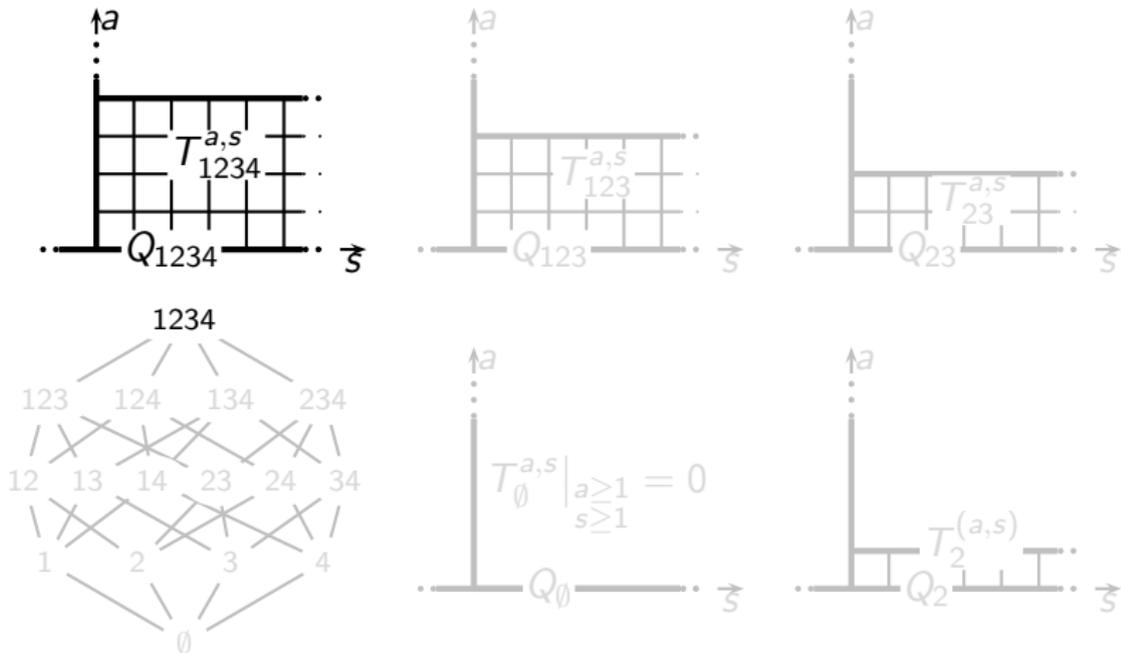
Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible



\rightsquigarrow Cela définit 2^4 opérateurs Q , correspondant aux noeuds du diagramme de Hasse

Diagramme de Hasse

exemple de flot de Bäcklund en symétrie $GL(4)$

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

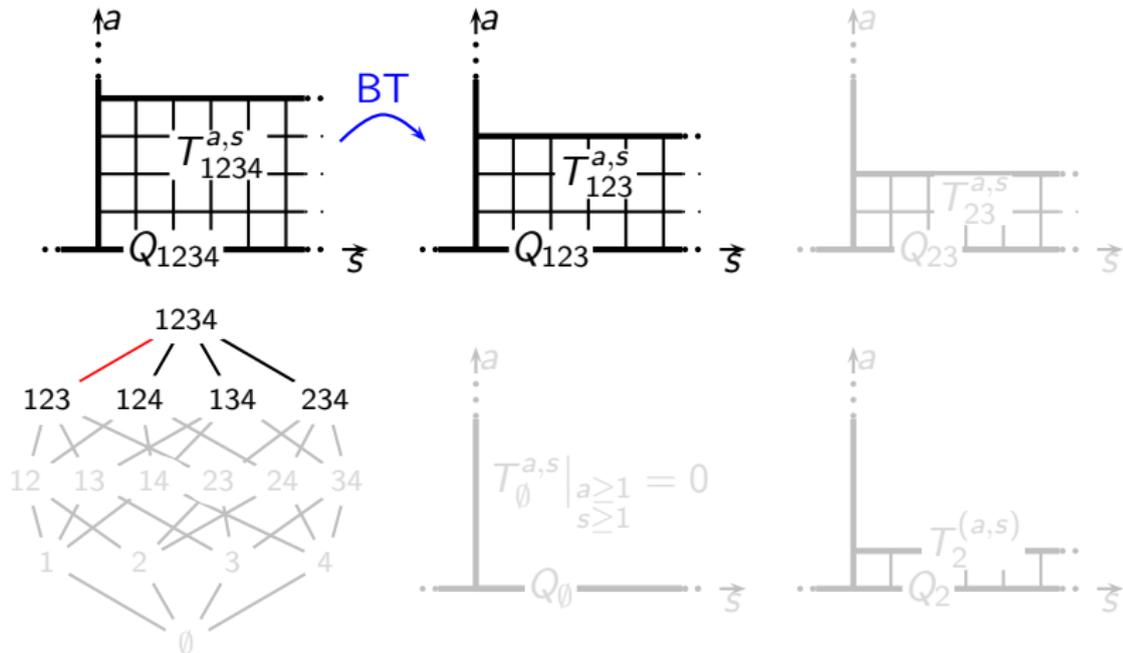
Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible



\rightsquigarrow Cela définit 2^4 opérateurs Q , correspondant aux noeuds du diagramme de Hasse

Diagramme de Hasse

exemple de flot de Bäcklund en symétrie $GL(4)$

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

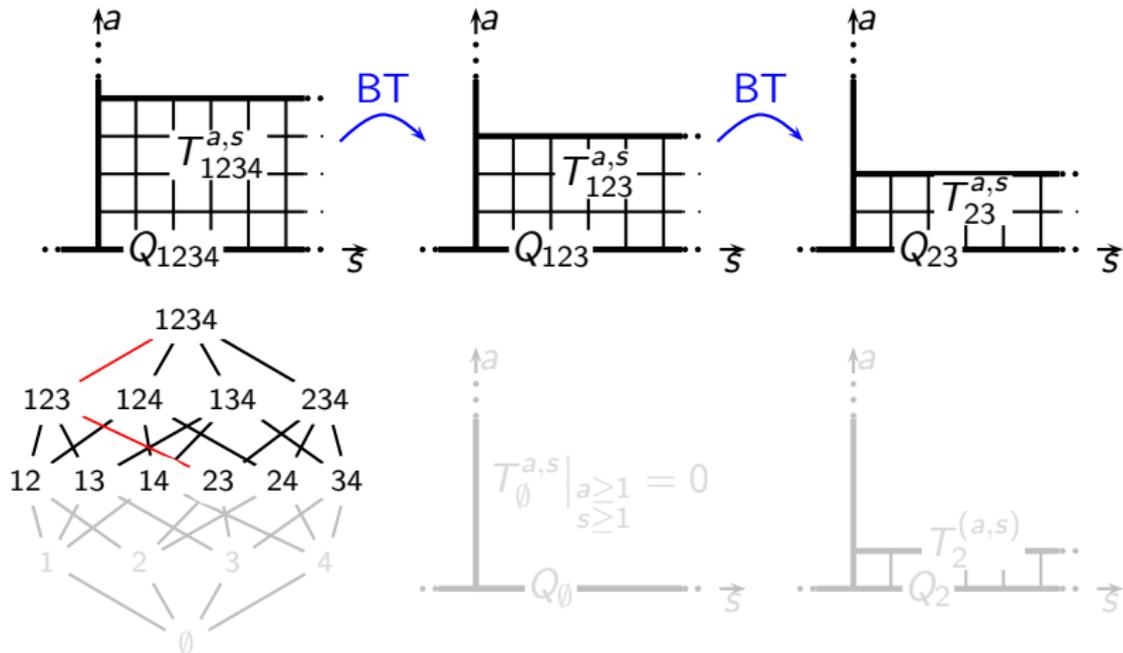
Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible



\rightsquigarrow Cela définit 2^4 opérateurs Q , correspondant aux noeuds du diagramme de Hasse

Diagramme de Hasse

exemple de flot de Bäcklund en symétrie $GL(4)$

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

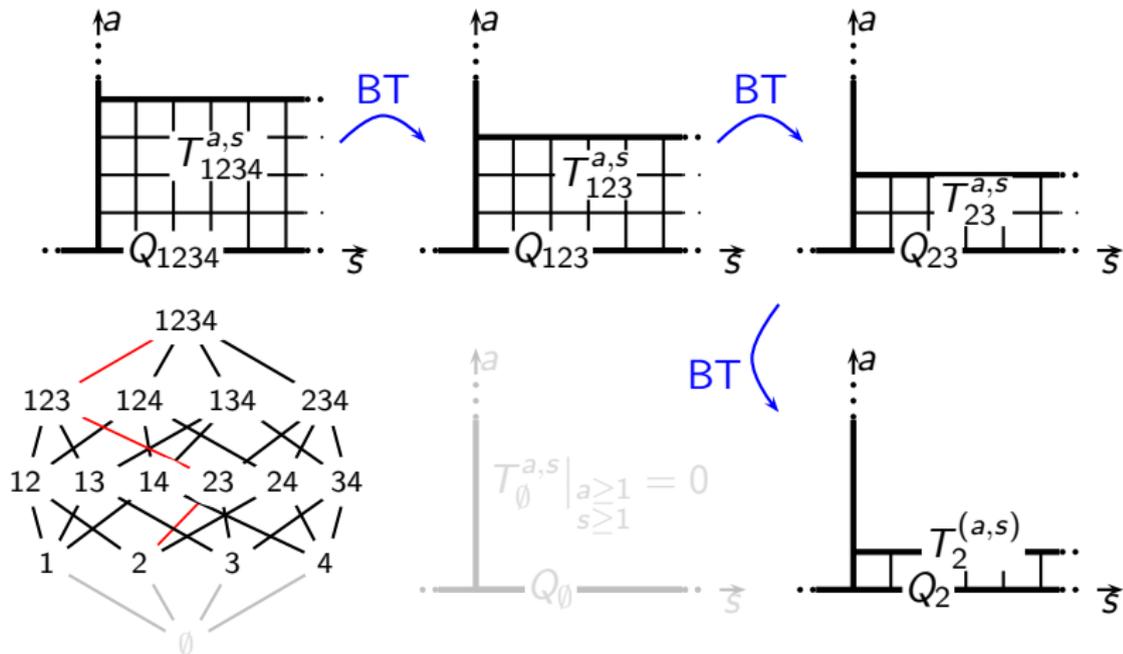
Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible



\rightsquigarrow Cela définit 2^4 opérateurs Q , correspondant aux noeuds du diagramme de Hasse

Diagramme de Hasse

exemple de flot de Bäcklund en symétrie $GL(4)$

Motivation

Chaînes de spins

Équation de Hirota

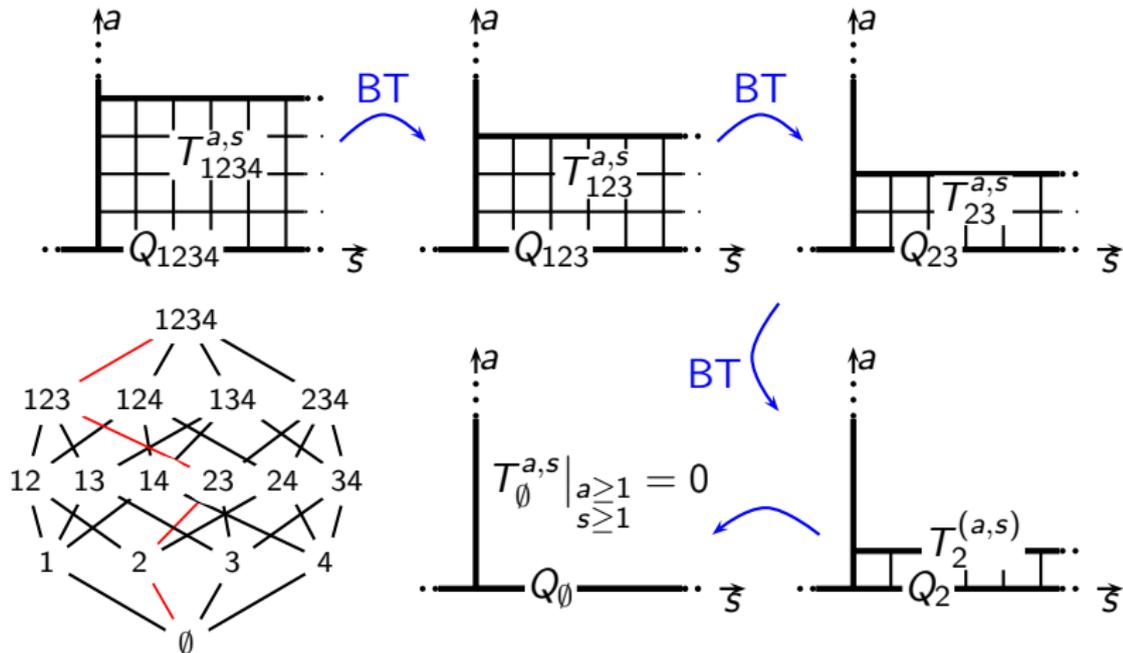
Opérateurs Q

Intégrabilité classique

Taille finie en théorie des champs

Système Y
Analyticity of Q-functions

AdS/CFT à couplage faible



↪ Cela définit 2^4 opérateurs Q , correspondant aux noeuds du diagramme de Hasse

Diagramme de Hasse

exemple de flot de Bäcklund en symétrie $GL(4)$

Motivation

Chaînes de spins

Équation de Hirota

Opérateurs Q

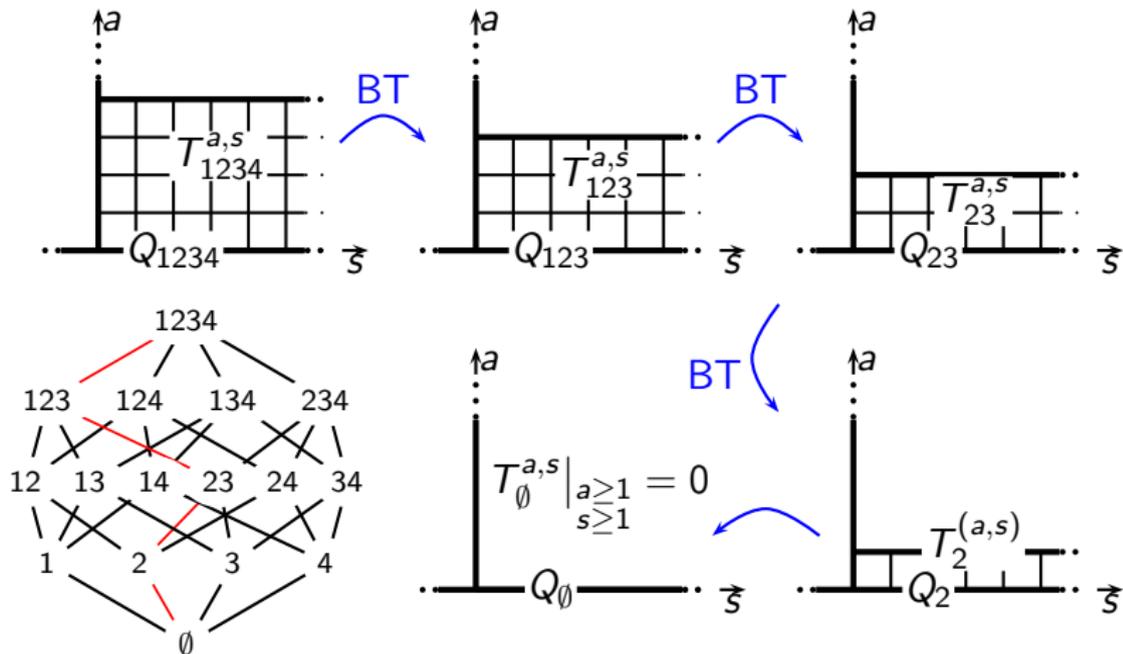
Intégrabilité classique

Taille finie en théorie des champs

Système Y

Analyticity of Q-functions

AdS/CFT à couplage faible



↪ Cela définit 2^4 opérateurs Q , correspondant aux noeuds du diagramme de Hasse

Diagramme de Hasse

exemple de flot de Bäcklund en symétrie $GL(4)$

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

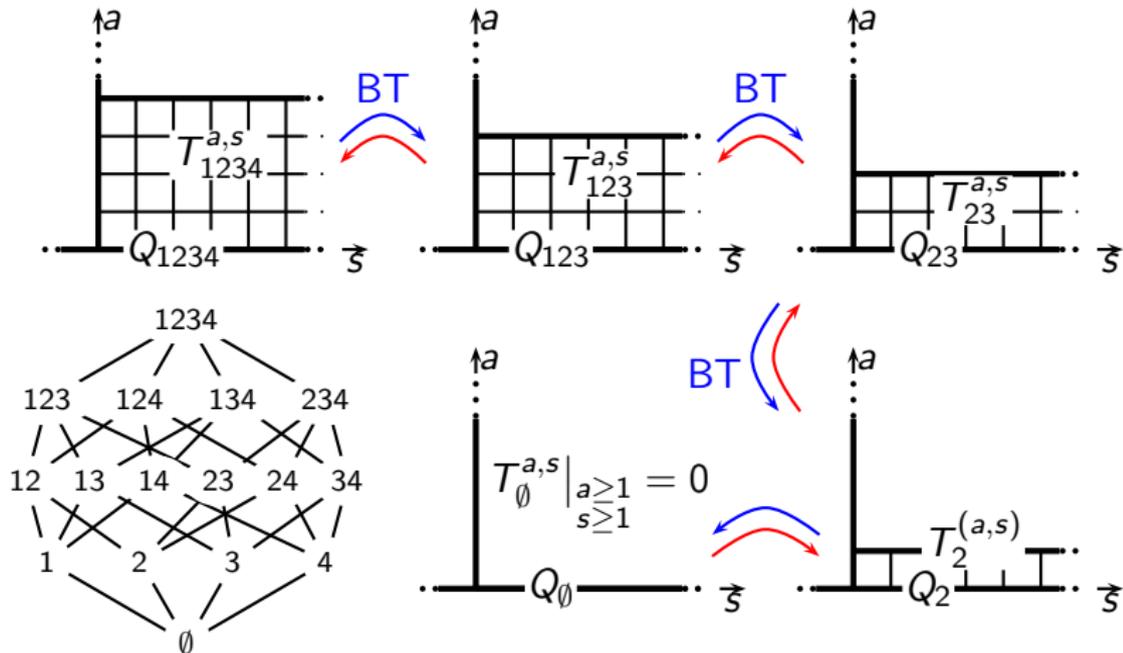
Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible



↪ Cela définit 2^4 opérateurs Q , correspondant aux noeuds du diagramme de Hasse

Diagramme de Hasse

exemple de flot de Bäcklund en symétrie $GL(4)$

Motivation

Chaînes de spins

Équation de Hirota

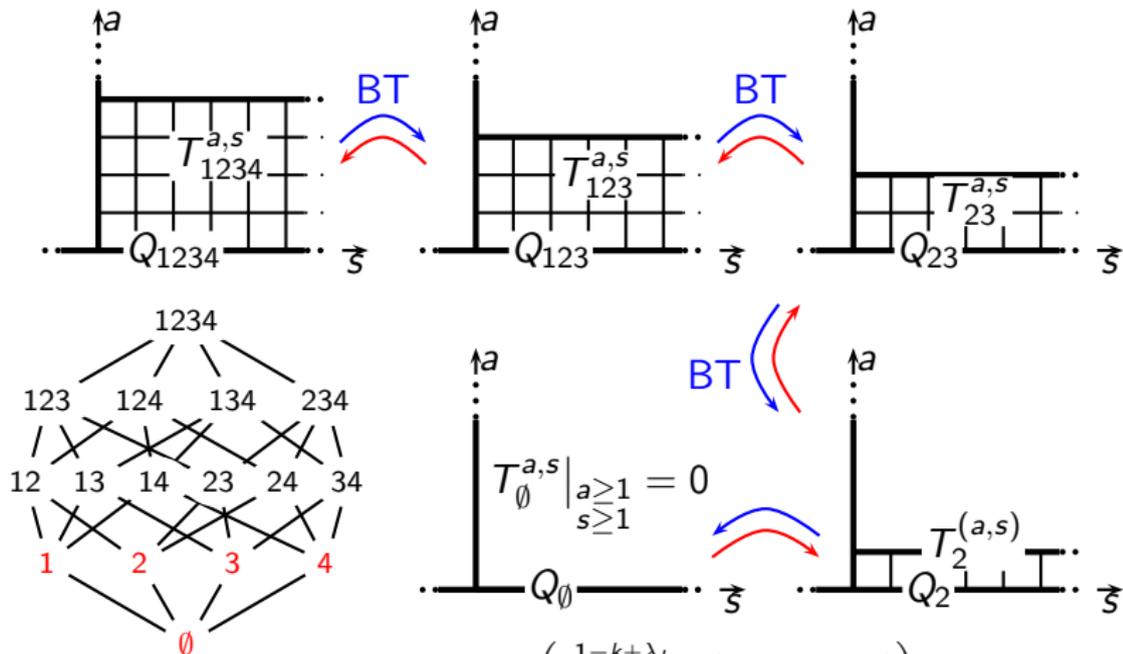
Opérateurs Q

Intégrabilité classique

Taille finie en théorie des champs

Système Y
Analyticity of Q-functions

AdS/CFT à couplage faible



$$\rightsquigarrow T^\lambda(u) = Q_\emptyset(u - K) \cdot \frac{\det(x_j^{1-k+\lambda_k} Q_j(u-k+1+\lambda_k))_{1 \leq j, k \leq K}}{\Delta(x_1, \dots, x_K) \prod_{k=1}^K Q_\emptyset(u-k+\lambda_k)}$$

$$\text{où } \Delta(x_1, \dots, x_K) = \det(x_j^{1-k})_{1 \leq j, k \leq K}$$

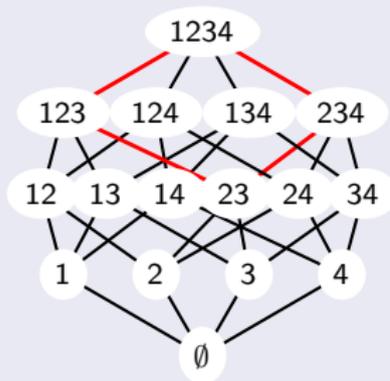
Relations QQ et équations de Bethe

Cette construction est cohérente sous réserve de la relation

$$(x_i - x_j) Q_I(u-1) Q_{I,i,j}(u) = x_i Q_{I,j}(u-1) Q_{I,i}(u) - x_j Q_{I,j}(u) Q_{I,i}(u-1)$$

exemple : $I = \{23\}, i = 1, j = 4$

$$(x_1 - x_4) Q_{23}(u-2) Q_{1234}(u) = x_1 Q_{234}(u-1) Q_{123}(u) - x_4 Q_{234}(u) Q_{123}(u-1)$$



Cette équation lie les opérateurs Q qui se situent sur la même face du diagramme de Hasse

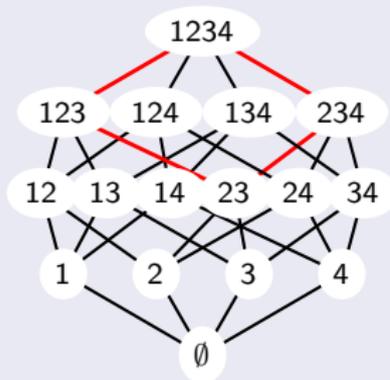
Flot de Bäcklund pour cette chaîne de spins

Relations QQ et équations de Bethe

Cette construction est cohérente sous réserve de la relation

$$(x_i - x_j) Q_I(u - 1) Q_{I,i,j}(u) = x_i Q_{I,j}(u - 1) Q_{I,i}(u) - x_j Q_{I,j}(u) Q_{I,i}(u - 1)$$

Conséquence : diagonalisation des opérateurs Q



- Les opérateurs Q sont polynomiaux
⇒ paramétrés par leurs racines
- Les racines du membre de gauche doivent être des racines du membre de droite
↪ équations de Bethe

Flot de Bäcklund pour cette chaîne de spins

[Krichever, Lipan, Wiegmann, Zabrodin 97] [Kazakov Sorin Zabrodin 08]

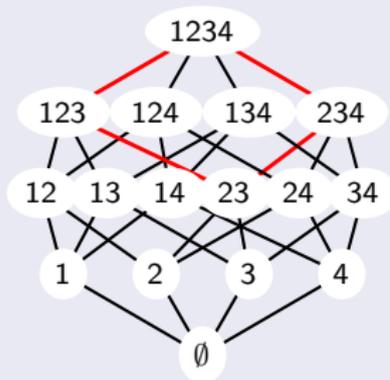
Expressions combinatoires explicites [Kazakov S.L. Tsuboi 10]

Relations QQ et équations de Bethe

Cette construction est cohérente sous réserve de la relation

$$(x_i - x_j) Q_I(u - 1) Q_{I,i,j}(u) = x_i Q_{I,j}(u - 1) Q_{I,i}(u) - x_j Q_{I,j}(u) Q_{I,i}(u - 1)$$

Conséquence : diagonalisation des opérateurs Q



- Les opérateurs Q sont polynomiaux
⇒ paramétrés par leurs racines
- Les racines du membre de gauche doivent être des racines du membre de droite
↔ équations de Bethe

Flot de Bäcklund pour cette chaîne de spins

[Krichever, Lipan, Wiegmann, Zabrodin 97] [Kazakov Sorin Zabrodin 08]

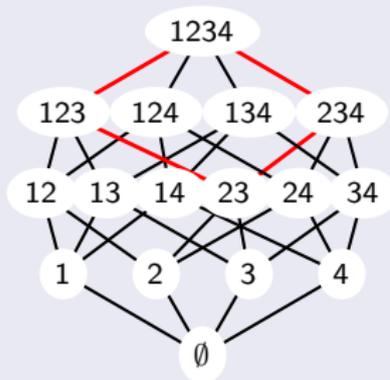
Expressions combinatoires explicites [Kazakov S.L. Tsuboi 10]

Relations QQ et équations de Bethe

Cette construction est cohérente sous réserve de la relation

$$(x_i - x_j) Q_I(u - 1) Q_{I,i,j}(u) = x_i Q_{I,j}(u - 1) Q_{I,i}(u) - x_j Q_{I,j}(u) Q_{I,i}(u - 1)$$

Conséquence : diagonalisation des opérateurs Q



- Les opérateurs Q sont polynomiaux
 \Rightarrow paramétrés par leurs racines
- Les racines du membre de gauche doivent être des racines du membre de droite
 \rightsquigarrow équations de Bethe

Flot de Bäcklund pour cette chaîne de spins

[Krichever, Lipan, Wiegmann, Zabrodin 97] [Kazakov Sorin Zabrodin 08]

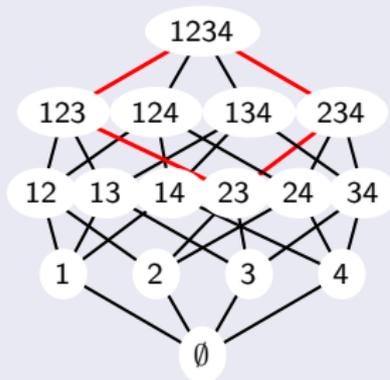
Expressions combinatoires explicites [Kazakov S.L. Tsuboi 10]

Relations QQ et équations de Bethe

Cette construction est cohérente sous réserve de la relation

$$(x_i - x_j) Q_I(u - 1) Q_{I,i,j}(u) = x_i Q_{I,j}(u - 1) Q_{I,i}(u) - x_j Q_{I,j}(u) Q_{I,i}(u - 1)$$

Conséquence : diagonalisation des opérateurs Q



- Les opérateurs Q sont polynomiaux
⇒ paramétrés par leurs racines
- Les racines du membre de gauche doivent être des racines du membre de droite
↔ équations de Bethe

Flot de Bäcklund pour cette chaîne de spins

[Krichever, Lipan, Wiegmann, Zabrodin 97] [Kazakov Sorin Zabrodin 08]

Expressions combinatoires explicites [Kazakov S.L. Tsuboi 10]

Plan

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

**Intégrabilité
classique**

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
 Q -functions

AdS/CFT à
couplage
faible

0 Motivation

1 Chaînes de spins de (super-)symétrie $GL(K|M)$

- Opérateurs T et équation de Hirota
- Résolution de l'équation de Hirota \iff opérateurs Q
- Intégrabilité classique du système quantique.

2 Effets de taille finie en théorie des champs intégrable

- Système $Y \rightsquigarrow$ spectre
- Propriétés analytiques des fonctions Q

3 Développement perturbatif à couplage faible pour AdS/CFT

Fonctions τ de la hiérarchie mKP

- Une fonction τ de la *hiérarchie mKP* est une fonction d'une variable n et d'un nombre infini de « temps » $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$, telle que $\forall n \geq n', \forall \mathbf{t}, \mathbf{t}'$

Définition des fonctions τ

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)} z^{n-n'} \tau_n(\mathbf{t} - [z^{-1}]) \tau_{n'}(\mathbf{t}' + [z^{-1}]) dz = 0$$

où $\mathbf{t} \pm [z^{-1}] = (t_1 \pm z^{-1}, t_2 \pm \frac{z^{-2}}{2}, t_3 \pm \frac{z^{-3}}{3}, \dots)$,
 $\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k \geq 1} t_k z^k$, et \mathcal{C} entoure les singularités de $\tau_n(\mathbf{t} - [z^{-1}]) \tau_{n'}(\mathbf{t}' + [z^{-1}])$ (typiquement finies), mais pas les singularités de $e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)} z^{n-n'}$ (typiquement à l'infini).

- Apparaissent dans l'étude d'équations différentielles

$$3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-4 \frac{\partial f}{\partial z} + 6f \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) = 0$$

Fonctions τ de la hiérarchie mKP

- Une fonction τ de la *hiérarchie mKP* est une fonction d'une variable n et d'un nombre infini de « temps » $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$, telle que $\forall n \geq n', \forall \mathbf{t}, \mathbf{t}'$

Définition des fonctions τ

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)} z^{n-n'} \tau_n(\mathbf{t} - [z^{-1}]) \tau_{n'}(\mathbf{t}' + [z^{-1}]) dz = 0$$

où $\mathbf{t} \pm [z^{-1}] = (t_1 \pm z^{-1}, t_2 \pm \frac{z^{-2}}{2}, t_3 \pm \frac{z^{-3}}{3}, \dots)$,
 $\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k \geq 1} t_k z^k$, et \mathcal{C} entoure les singularités de $\tau_n(\mathbf{t} - [z^{-1}]) \tau_{n'}(\mathbf{t}' + [z^{-1}])$ (typiquement finies), mais pas les singularités de $e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)} z^{n-n'}$ (typiquement à l'infini).

- Apparaissent dans l'étude d'équations différentielles

$$3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-4 \frac{\partial f}{\partial z} + 6f \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) = 0$$

Fonctions τ de la hiérarchie mKP

- fonction τ de la hiérarchie mKP : fonction de n et de $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$, telle que $\forall n \geq n', \forall \mathbf{t}, \mathbf{t}'$

Définition des fonctions τ

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)} z^{n-n'} \tau_n(\mathbf{t} - [z^{-1}]) \tau_{n'}(\mathbf{t}' + [z^{-1}]) dz = 0$$

où $\mathbf{t} \pm [z^{-1}] = \left(t_1 \pm z^{-1}, t_2 \pm \frac{z^{-2}}{2}, t_3 \pm \frac{z^{-3}}{3}, \dots \right)$, et $\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k \geq 1} t_k z^k$.

- Un exemple de telle fonction τ est l'espérance

$$\tau_n(\mathbf{t}) = \langle n | e^{J_+(\mathbf{t})} G | n \rangle$$

pour un nombre infini d'oscillateurs fermioniques

($\{\psi_i, \psi_j^\dagger\} = \delta_{ij}$), où $G = \exp\left(\sum_{i,k \in \mathbb{Z}} A_{ik} \psi_i^\dagger \psi_k\right)$ et

$J_+ = \sum_{k \geq 1} t_k J_k$, où $J_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_{j+k}^\dagger$.

(et $\psi_n |n\rangle = |n+1\rangle$)

Fonctions τ de la hiérarchie mKP

- fonction τ de la hiérarchie mKP : fonction de n et de $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$, telle que $\forall n \geq n', \forall \mathbf{t}, \mathbf{t}'$

Définition des fonctions τ

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)} z^{n-n'} \tau_n(\mathbf{t} - [z^{-1}]) \tau_{n'}(\mathbf{t}' + [z^{-1}]) dz = 0$$

où $\mathbf{t} \pm [z^{-1}] = \left(t_1 \pm z^{-1}, t_2 \pm \frac{z^{-2}}{2}, t_3 \pm \frac{z^{-3}}{3}, \dots \right)$, et $\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k \geq 1} t_k z^k$.

Propriété caractéristique

$$\begin{aligned} z_2 \tau_{n+1}(\mathbf{t} - [z_2^{-1}]) \tau_n(\mathbf{t} - [z_1^{-1}]) \\ - z_1 \tau_{n+1}(\mathbf{t} - [z_1^{-1}]) \tau_n(\mathbf{t} - [z_2^{-1}]) \\ + (z_1 - z_2) \tau_{n+1}(\mathbf{t}) \tau_n(\mathbf{t} - [z_1^{-1}] - [z_2^{-1}]) = 0. \end{aligned}$$

(s'obtient en choisissant $n' = n - 1$ et $\mathbf{t}' = \mathbf{t} - [z_1^{-1}] - [z_1^{-1}]$)

Chaînes de spins \iff hiérarchie mKP

Les opérateurs T forment une fonction τ

- “temps” $\mathbf{t} \iff$ représentations λ :

$$\tau(u, \mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \underbrace{s_{\lambda}(\mathbf{t})}_{\text{Polynôme de Schur}} \tau(u, \lambda) \quad s_{\lambda}(\mathbf{t}) = \det (h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{t}))_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}$$

$$\text{où } e^{\xi(\mathbf{t}, z)} = \sum_{k \geq 0} h_k(\mathbf{t}) z^k, \quad \xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k \geq 1} t_k z^k.$$

Pour $\tau(u, \lambda) = T^{\lambda}(u) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) \chi^{\lambda}(g)$, on obtient

$$\tau(u, \mathbf{t}) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) e^{\sum_{k \geq 1} t_k \text{tr}(g^k)}$$

- Alors $\tau(u, \mathbf{t} + [z^{-1}]) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) w(1/z) e^{\sum_{k \geq 1} t_k \text{tr}(g^k)}$
où $w(1/z) \equiv \sum_{s \geq 0} \chi^{1, s} z^{-s} = \det \frac{1}{1-g/z}$

Chaînes de spins \iff hiérarchie mKP

Les opérateurs T forment une fonction τ

- “temps” $\mathbf{t} \iff$ représentations λ :

$$\tau(u, \mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \underbrace{s_{\lambda}(\mathbf{t})}_{\text{Polynôme de Schur}} \tau(u, \lambda) \quad s_{\lambda}(\mathbf{t}) = \det (h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{t}))_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}$$

$$\text{où } e^{\xi(\mathbf{t}, z)} = \sum_{k \geq 0} h_k(\mathbf{t}) z^k, \quad \xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k \geq 1} t_k z^k.$$

Pour $\tau(u, \lambda) = T^{\lambda}(u) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) \chi^{\lambda}(g)$, on obtient

$$\tau(u, \mathbf{t}) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) e^{\sum_{k \geq 1} t_k \text{tr}(g^k)}$$

- Alors $\tau(u, \mathbf{t} + [z^{-1}]) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) w(1/z) e^{\sum_{k \geq 1} t_k \text{tr}(g^k)}$
où $w(1/z) \equiv \sum_{s \geq 0} \chi^{1, s} z^{-s} = \det \frac{1}{1-g/z}$

Chaînes de spins \iff hiérarchie mKP

Les opérateurs T forment une fonction τ

- “temps” \mathbf{t} \iff représentations λ :

$$\tau(u, \mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \underbrace{s_{\lambda}(\mathbf{t})}_{\text{Polynôme de Schur}} \tau(u, \lambda) \quad s_{\lambda}(\mathbf{t}) = \det (h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{t}))_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}$$

$$\text{où } e^{\xi(\mathbf{t}, z)} = \sum_{k \geq 0} h_k(\mathbf{t}) z^k, \quad \xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k \geq 1} t_k z^k.$$

Pour $\tau(u, \lambda) = T^{\lambda}(u) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) \chi^{\lambda}(g)$, on obtient

$$\tau(u, \mathbf{t}) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) e^{\sum_{k \geq 1} t_k \text{tr}(g^k)}$$

- Alors $\tau(u, \mathbf{t} + [z^{-1}]) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) w(1/z) e^{\sum_{k \geq 1} t_k \text{tr}(g^k)}$
où $w(1/z) \equiv \sum_{s \geq 0} \chi^{1, s} z^{-s} = \det \frac{1}{1-g/z}$

Chaînes de spins \leftrightarrow hiérarchie mKP

Les opérateurs T forment une fonction τ

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

- La fonction

$$\tau(u, \mathbf{t}) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) e^{\sum_{k \geq 1} t_k \text{tr}(g^k)}$$

est une fonction τ de la hiérarchie KP.

- La transformation de Bäcklund est donnée par

$$\tau(u, \mathbf{t}) \rightsquigarrow \text{Res}_{z=x_i} \tau(u+1, \mathbf{t} + [z^{-1}]).$$

[Alexandrov, Kazakov, S.L., Tsuboi, Zabrodin 11]

Chaînes de spins \leftrightarrow hiérarchie mKP

Les opérateurs T forment une fonction τ

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

**Intégrabilité
classique**

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

- La fonction

$$\tau(u, \mathbf{t}) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) e^{\sum_{k \geq 1} t_k \text{tr}(g^k)}$$

est une fonction τ de la hiérarchie KP.

- La transformation de Bäcklund est donnée par

$$\tau(u, \mathbf{t}) \rightsquigarrow \text{Res}_{z=x_i} \tau(u+1, \mathbf{t} + [z^{-1}]).$$

[Alexandrov, Kazakov, S.L., Tsuboi, Zabrodin 11]

Chaînes de spins \leftrightarrow hiérarchie mKP

Les opérateurs T forment une fonction τ

- La fonction $\tau(u, \mathbf{t}) = \bigotimes_{i=1}^L (u_i + \hat{D}) e^{\sum_{k \geq 1} t_k \text{tr}(g^k)}$ est une fonction τ de la hiérarchie KP.
- La transformation de Bäcklund est donnée par $\tau(u, \mathbf{t}) \rightsquigarrow \text{Res}_{z=x_i} \tau(u+1, \mathbf{t} + [z^{-1}])$.
- Réalisation fermionique de cette fonction τ :

$$\tau(n, \mathbf{t}) = \langle n | e^{J_+(\mathbf{t})} \Psi_1 \dots \Psi_K | n - K \rangle ,$$

$$\text{où } \Psi_i = \sum_{m \geq 0} a_{im} \partial_z^m \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k z^k \Big|_{z=x_i}$$

[Alexandrov, Kazakov, S.L., Tsuboi, Zabrodin 11]

Plan

- 0 Motivation
- 1 Chaînes de spins de (super-)symétrie $GL(K|M)$
 - Opérateurs T et équation de Hirota
 - Résolution de l'équation de Hirota \iff opérateurs Q
 - Intégrabilité classique du système quantique.
- 2 Effets de taille finie en théorie des champs intégrable
 - Système $Y \rightsquigarrow$ spectre
 - Propriétés analytiques des fonctions Q
- 3 Développement perturbatif à couplage faible pour AdS/CFT

Théories des champs intégrables à 1+1 dimensions

Ansatz de Bethe : fonction d'onde en grand volume

ondes planes quand les particules sont loin les unes des autres

- une *matrice* S décrit l'interaction entre deux particules
- ⇒ équations de Bethe

- “Ansatz de Bethe thermodynamique” (TBA) pour les effets de taille finie : “double rotation de Wick”

taille finie \leftrightarrow température non nulle



- En température finie, les équations de Bethe donnent lieu à différents types d'états liés
↔ pour chaque type d'excitation, une densité
(fonction de la rapidité u).

Théories des champs intégrables à 1+1 dimensions

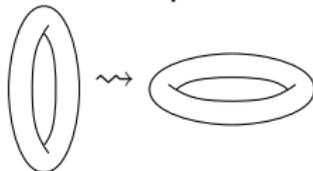
Ansatz de Bethe : fonction d'onde en grand volume

ondes planes quand les particules sont loin les unes des autres

- une *matrice S* décrit l'interaction entre deux particules
- ⇒ équations de Bethe

- “Ansatz de Bethe thermodynamique” (TBA) pour les effets de taille finie : “double rotation de Wick”

taille finie \leftrightarrow température non nulle



- En température finie, les équations de Bethe donnent lieu à différents types d'états liés
↪ pour chaque type d'excitation, une densité
(fonction de la rapidité u).

Théories des champs intégrables à 1+1 dimensions

Ansatz de Bethe : fonction d'onde en grand volume

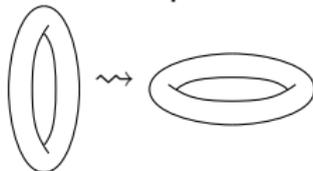
ondes planes quand les particules sont loin les unes des autres

- une *matrice* S décrit l'interaction entre deux particules

⇒ équations de Bethe

- “Ansatz de Bethe thermodynamique” (TBA) pour les effets de taille finie : “double rotation de Wick”

taille finie \leftrightarrow température non nulle



- En température finie, les équations de Bethe donnent lieu à différents types d'états liés

↪ pour chaque type d'excitation, une densité

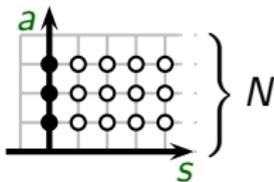
(fonction de la rapidité u).

Systèmes Y et T

Cas du champ de "Gross Neveu" $SU(N)$, en 1+1 dimensions

TBA : 

états liés caractérisés par
 $a \in \{1, \dots, N-1\}$ et $s \in \mathbb{N}$



leurs densités satisfont

$$\begin{cases} \frac{Y_{a,s}^+ Y_{a,s}^-}{Y_{a+1,s} Y_{a-1,s}} = \frac{1+Y_{a,s+1}}{1+Y_{a+1,s}} \frac{1+Y_{a,s-1}}{1+Y_{a-1,s}} \\ \text{propriétés d'analyticité} \end{cases}$$

où $Y_{a,s}^\pm \equiv Y_{a,s}(u \pm i/2)$

Régularisation sur réseau
(limite d'un système de
dimension finie)

Représentations caractérisées
par a et s

Équation de Hirota

$$\Leftrightarrow T_{a,s}^+ T_{a,s}^- = T_{a+1,s} T_{a-1,s} + T_{a,s+1} T_{a,s-1}$$

if $Y_{a,s} = \frac{T_{a,s+1} T_{a,s-1}}{T_{a+1,s} T_{a-1,s}}$

[Gromov Kazakov Vieira 09] [Bombardelli Fioravanti Tateo 09]

[Abyunov Frolov 09]

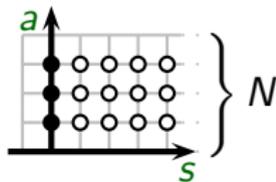
Systèmes Y et T

Cas du champ de "Gross Neveu" $SU(N)$, en 1+1 dimensions

TBA : 

états liés caractérisés par

$a \in \{1, \dots, N-1\}$ et $s \in \mathbb{N}$



leurs densités satisfont

$$\begin{cases} \frac{Y_{a,s}^+ Y_{a,s}^-}{Y_{a+1,s} Y_{a-1,s}} = \frac{1+Y_{a,s+1}}{1+Y_{a+1,s}} \frac{1+Y_{a,s-1}}{1+Y_{a-1,s}} \\ \text{propriétés d'analyticité} \end{cases}$$

où $Y_{a,s}^\pm \equiv Y_{a,s}(u \pm i/2)$

Régularisation sur réseau
(limite d'un système de
dimension finie)

Représentations caractérisées
par a et s

Équation de Hirota

$$\Leftrightarrow T_{a,s}^+ T_{a,s}^- = T_{a+1,s} T_{a-1,s} + T_{a,s+1} T_{a,s-1}$$

if $Y_{a,s} = \frac{T_{a,s+1} T_{a,s-1}}{T_{a+1,s} T_{a-1,s}}$

[Gromov Kazakov Vieira 09] [Bombardelli Fioravanti Tateo 09]

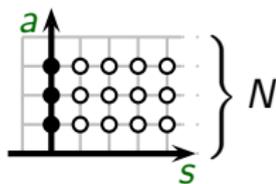
[Autyunov Frolov 09]

Systèmes Y et T

Cas du champ de "Gross Neveu" $SU(N)$, en 1+1 dimensions

TBA : 

états liés caractérisés par
 $a \in \{1, \dots, N-1\}$ et $s \in \mathbb{N}$



leurs densités satisfont

$$\begin{cases} \frac{Y_{a,s}^+ Y_{a,s}^-}{Y_{a+1,s} Y_{a+1,s}} = \frac{1+Y_{a,s+1}}{1+Y_{a+1,s}} \frac{1+Y_{a,s-1}}{1+Y_{a-1,s}} \\ \text{propriétés d'analyticité} \end{cases}$$

où $Y_{a,s}^\pm \equiv Y_{a,s}(u \pm i/2)$

Régularisation sur réseau
(limite d'un système de
dimension finie)

Représentations caractérisées
par a et s

Équation de Hirota

$$\Leftrightarrow T_{a,s}^+ T_{a,s}^- = T_{a+1,s} T_{a-1,s} + T_{a,s+1} T_{a,s-1}$$

if $Y_{a,s} = \frac{T_{a,s+1} T_{a,s-1}}{T_{a+1,s} T_{a-1,s}}$.

[Gromov Kazakov Vieira 09] [Bombardelli Fioravanti Tateo 09]

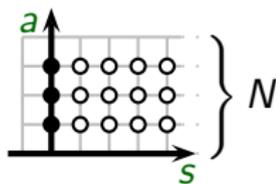
[Autyunov Frolov 09]

Systèmes Y et T

Cas du champ de "Gross Neveu" $SU(N)$, en 1+1 dimensions

TBA : 

états liés caractérisés par
 $a \in \{1, \dots, N-1\}$ et $s \in \mathbb{N}$



leurs densités satisfont

$$\begin{cases} \frac{Y_{a,s}^+ Y_{a,s}^-}{Y_{a+1,s} Y_{a+1,s}} = \frac{1+Y_{a,s+1}}{1+Y_{a+1,s}} \frac{1+Y_{a,s-1}}{1+Y_{a-1,s}} \\ \text{propriétés d'analyticité} \end{cases}$$

où $Y_{a,s}^\pm \equiv Y_{a,s}(u \pm i/2)$

Régularisation sur réseau
(limite d'un système de
dimension finie)

Représentations caractérisées
par a et s

Équation de Hirota

$$\Leftrightarrow T_{a,s}^+ T_{a,s}^- = T_{a+1,s} T_{a-1,s} + T_{a,s+1} T_{a,s-1}$$

if $Y_{a,s} = \frac{T_{a,s+1} T_{a,s-1}}{T_{a+1,s} T_{a-1,s}}$.

[Gromov Kazakov Vieira 09] [Bombardelli Fioravanti Tateo 09]

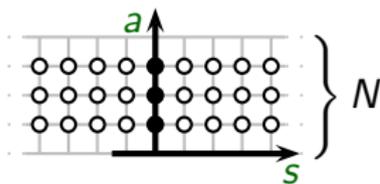
[Autyunov Frolov 09]

Systèmes Y et T

Cas du **champ chiral principal** $SU(N) \times SU(N)$

TBA : 

états liés caractérisés par
 $a \in \{1, \dots, N-1\}$ et $s \in \mathbb{Z}$



leurs densités satisfont

$$\begin{cases} \frac{Y_{a,s}^+ Y_{a,s}^-}{Y_{a+1,s} Y_{a-1,s}} = \frac{1+Y_{a,s+1}}{1+Y_{a+1,s}} \frac{1+Y_{a,s-1}}{1+Y_{a-1,s}} \\ \text{propriétés d'analyticité} \end{cases}$$

où $Y_{a,s}^\pm \equiv Y_{a,s}(u \pm i/2)$

Régularisation sur réseau
(limite d'un système de
dimension finie)

Représentations caractérisées
par a et s

Équation de Hirota

$$\Leftrightarrow T_{a,s}^+ T_{a,s}^- = T_{a+1,s} T_{a-1,s} + T_{a,s+1} T_{a,s-1}$$

if $Y_{a,s} = \frac{T_{a,s+1} T_{a,s-1}}{T_{a+1,s} T_{a-1,s}}$.

[Gromov Kazakov Vieira 09] [Bombardelli Fioravanti Tateo 09]

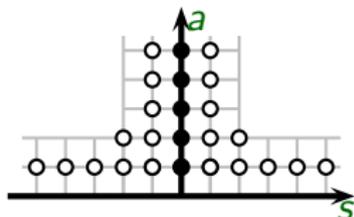
[Autunov Frolov 09]

Systèmes Y et T

Cas de la limite planaire de la dualité AdS/CFT

TBA : 

états liés caractérisés par
des entiers a et s



leurs densités satisfont

$$\begin{cases} \frac{Y_{a,s}^+ Y_{a,s}^-}{Y_{a+1,s} Y_{a-1,s}} = \frac{1+Y_{a,s+1}}{1+Y_{a+1,s}} \frac{1+Y_{a,s-1}}{1+Y_{a-1,s}} \\ \text{propriétés d'analyticité} \end{cases}$$

où $Y_{a,s}^\pm \equiv Y_{a,s}(u \pm i/2)$

Régularisation sur réseau
(limite d'un système de
dimension finie)

Représentations caractérisées
par a et s

Équation de Hirota

$$\Leftrightarrow T_{a,s}^+ T_{a,s}^- = T_{a+1,s} T_{a-1,s} + T_{a,s+1} T_{a,s-1}$$

if $Y_{a,s} = \frac{T_{a,s+1} T_{a,s-1}}{T_{a+1,s} T_{a-1,s}}$.

[Gromov Kazakov Vieira 09] [Bombardelli Fioravanti Tateo 09]

[Autyunov Frolov 09]

Propriétés analytiques des fonctions Q

↪ équations simples (FiNLIE)

- Solution typique de l'équation de Hirota :

$T_{a,s} = \det_{k,l} \left(Q_k(u + f(a, s, l)) \right)$, où T et Q sont les valeurs propres des opérateurs T et Q .

- Des fonctions Q sont holomorphes sur le demi-plan supérieur $\text{Im}(u) > 0$ (d'autres sur le demi-plan inférieur).
- ⇒ Chaque fonction Q se ramène à une fonction réelle sur l'axe réel.
- ↪ Des conditions analytiques supplémentaires (typiquement quand $u \rightarrow \infty$) donnent un système fini d'équations non-linéaires intégrales (FiNLIE)

Résultat

Conditions d'analyticité sur les fonctions Q

+ preuve qu'elles sont équivalentes à l'Ansatz de Bethe thermodynamique (conjecturé précédemment).

Propriétés analytiques des fonctions Q

↪ équations simples (FiNLIE)

- Solution typique de l'équation de Hirota :

$T_{a,s} = \det_{k,l} \left(Q_k(u + f(a, s, l)) \right)$, où T et Q sont les valeurs propres des opérateurs T et Q .

- Des fonctions Q sont holomorphes sur le demi-plan supérieur $\text{Im}(u) > 0$ (d'autres sur le demi-plan inférieur).

⇒ Chaque fonction Q se ramène à une fonction réelle sur l'axe réel.

- ↪ Des conditions analytiques supplémentaires (typiquement quand $u \rightarrow \infty$) donnent un système fini d'équations non-linéaires intégrales (FiNLIE)

Résultat

Conditions d'analyticité sur les fonctions Q

+ preuve qu'elles sont équivalentes à l'Ansatz de Bethe thermodynamique (conjecturé précédemment).

Propriétés analytiques des fonctions Q \rightsquigarrow équations simples (FiNLIE)

- Solution typique de l'équation de Hirota :

$T_{a,s} = \det_{k,l} \left(Q_k(u + f(a, s, l)) \right)$, où T et Q sont les valeurs propres des opérateurs T et Q .

- Des fonctions Q sont holomorphes sur le demi-plan supérieur $\text{Im}(u) > 0$ (d'autres sur le demi-plan inférieur).

\Rightarrow Chaque fonction Q se ramène à une fonction réelle sur l'axe réel.

- \rightsquigarrow Des conditions analytiques supplémentaires (typiquement quand $u \rightarrow \infty$) donnent un système fini d'équations non-linéaires intégrales (FiNLIE)

Résultat

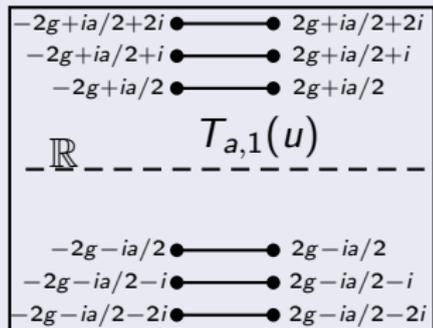
Conditions d'analyticité sur les fonctions Q

+ preuve qu'elles sont équivalentes à l'Ansatz de Bethe thermodynamique (conjecturé précédemment).

Propriétés analytiques pour AdS/CFT

Points de branchement

Les fonctions Y, T et Q ont des points de branchement de type racine carrée, aux positions $\pm 2g + ni$ or $\pm 2g + (n + \frac{1}{2})i$, où $n \in \mathbb{Z}$.



- Nouvelles symétries, qui s'expriment très simplement en termes de fonctions Q :

Par exemple, il existe une fonction Q_1

telle que $Q_1 = -\bar{Q}_1$.



Propriétés analytiques pour AdS/CFT

[Gromov Kazakov S.L. Volin 11]

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q
Intégrabilité
classique

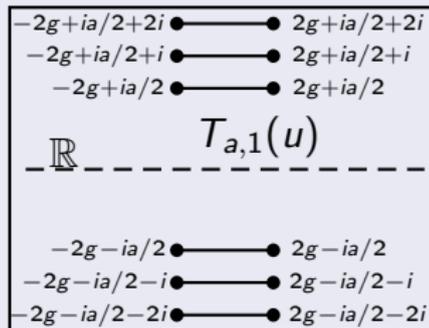
Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

Points de branchement

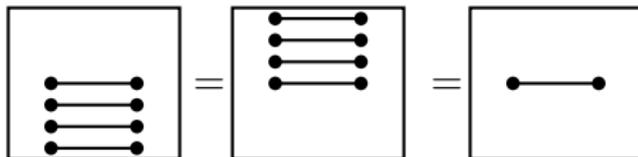
Les fonctions Y, T et Q ont des points de branchement de type racine carrée, aux positions $\pm 2g + ni$ or $\pm 2g + (n + \frac{1}{2})i$, où $n \in \mathbb{Z}$.



- Nouvelles symétries, qui s'expriment très simplement en termes de fonctions Q :

Par exemple, il existe une fonction Q_1

telle que $Q_1 = -\bar{Q}_1$.



Développement perturbatif à
couplage faible pour AdS/CFT

[S.L. Volin Serban 12]

Motivation

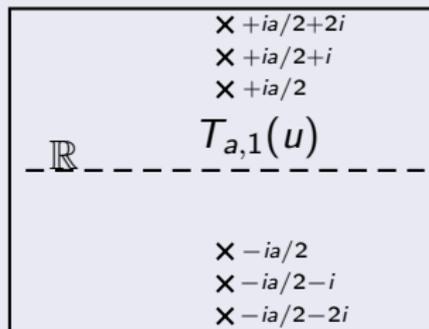
Chaînes de
spinsÉquation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classiqueTaille finie en
théorie des
champsSystème Y
Analyticity of
Q-functionsAdS/CFT à
couplage
faible

Propriétés analytiques à couplage faible

Quand $g \ll 1$, les points de
branchement dégènèrent pour
donner lieu à une suite de pôles.



Les fonctions Q sont des combinaisons de sommes du type

$$\sum_{0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k < \infty} \frac{1}{(u + i n_1)^{m_1} (u + i n_2)^{m_2} \dots (u + i n_k)^{m_k}} .$$

Dimension conforme de l'opérateur de Konishi

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

$$\Delta_{\text{Konishi}} = 4 + 12g^2 - 48g^4 + 336g^6 + 96g^8(-26 + 6\zeta_3 - 15\zeta_5) \\ - 96g^{10}(-158 - 72\zeta_3 + 54\zeta_3^2 + 90\zeta_5 - 315\zeta_7)$$

[Bajnok Egedüs Janik Łukowski 09]

[Eden Heslop Korchemsky Smirnov Sokatchev 12]

Dimension conforme de l'opérateur de Konishi

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota

Opérateurs Q

Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{Konishi}} = & 4 + 12 g^2 - 48 g^4 + 336 g^6 + 96 g^8 (-26 + 6 \zeta_3 - 15 \zeta_5) \\ & - 96 g^{10} (-158 - 72 \zeta_3 + 54 \zeta_3^2 + 90 \zeta_5 - 315 \zeta_7) \\ & - 48 g^{12} (160 + 5472 \zeta_3 - 3240 \zeta_3 \zeta_5 + 432 \zeta_3^2 \\ & - 2340 \zeta_5 - 1575 \zeta_7 + 10206 \zeta_9)\end{aligned}$$

[SL Volin Serban 12]

Dimension conforme de l'opérateur de Konishi

Motivation

Chaînes de
spins

Équation de
Hirota
Opérateurs Q
Intégrabilité
classique

Taille finie en
théorie des
champs

Système Y
Analyticity of
Q-functions

AdS/CFT à
couplage
faible

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{Konishi}} = & 4 + 12g^2 - 48g^4 + 336g^6 + 96g^8(-26 + 6\zeta_3 - 15\zeta_5) \\ & - 96g^{10}(-158 - 72\zeta_3 + 54\zeta_3^2 + 90\zeta_5 - 315\zeta_7) \\ & - 48g^{12}(160 + 5472\zeta_3 - 3240\zeta_3\zeta_5 + 432\zeta_3^2 \\ & \quad - 2340\zeta_5 - 1575\zeta_7 + 10206\zeta_9) \\ & \quad \text{[SL Volin Serban 12]} \\ & + 48g^{14}(-44480 + 108960\zeta_3 + 8568\zeta_3\zeta_5 \\ & \quad - 40320\zeta_3\zeta_7 - 8784\zeta_3^2 + 2592\zeta_3^3 - 4776\zeta_5 \\ & \quad - 20700\zeta_5^2 - 26145\zeta_7 - 17406\zeta_9 + 152460\zeta_{11}) \\ & \quad \text{[Bajnok Janik 12]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{Konishi}} = & 4 + 12 g^2 - 48 g^4 + 336 g^6 + 96 g^8 (-26 + 6 \zeta_3 - 15 \zeta_5) \\ & - 96 g^{10} (-158 - 72 \zeta_3 + 54 \zeta_3^2 + 90 \zeta_5 - 315 \zeta_7) \\ & - 48 g^{12} (160 + 5472 \zeta_3 - 3240 \zeta_3 \zeta_5 + 432 \zeta_3^2 \\ & \quad - 2340 \zeta_5 - 1575 \zeta_7 + 10206 \zeta_9) \\ & + 48 g^{14} (-44480 + 108960 \zeta_3 + 8568 \zeta_3 \zeta_5 \\ & \quad - 40320 \zeta_3 \zeta_7 - 8784 \zeta_3^2 + 2592 \zeta_3^3 - 4776 \zeta_5 \\ & \quad - 20700 \zeta_5^2 - 26145 \zeta_7 - 17406 \zeta_9 + 152460 \zeta_{11}) \\ & + 48 g^{16} (1133504 + 263736 \zeta_2 \zeta_9 - 1739520 \zeta_3 \\ & \quad - 90720 \zeta_3 \zeta_5 - 129780 \zeta_3 \zeta_7 + 78408 \zeta_3 \zeta_8 \\ & \quad + 483840 \zeta_3 \zeta_9 + 165312 \zeta_3^2 - 82080 \zeta_3^2 \zeta_5 \\ & \quad + 41472 \zeta_3^3 + 178200 \zeta_4 \zeta_7 - 409968 \zeta_5 \\ & \quad + 121176 \zeta_5 \zeta_6 + 463680 \zeta_5 \zeta_7 + 49680 \zeta_5^2 \\ & \quad + 455598 \zeta_7 + 194328 \zeta_9 - 555291 \zeta_{11} \\ & \quad - 2208492 \zeta_{13} - 14256 \zeta_{1,2,8}) + \mathcal{O}(g^{18})\end{aligned}$$

Conclusion

- Chaînes de spins (bien comprises)
 - Flot de Bäcklund : simplifications successives du système
 - Équations de Bethe
 - Hamiltonien exprimé en termes des fonctions T ou Q
- Intégrabilité classique (fonctions τ)
 - ↪ nouvel éclairage sur cette construction
 - ↪ possibilité de généralisations à d'autres modèles.
- Donne une feuille de route pour les effets de taille finie en théorie des champs intégrables
 - Paramétrisation simple
 - Propriétés analytiques transparentes
 - Nouvelles symétries
 - ↪ Développement perturbatif

À quel point cette procédure est-elle générale ?
- Enjeu ouvert :
Peut-on prouver ces propriétés ?
 - Régularisation sur réseau

Conclusion

- Chaînes de spins (bien comprises)
 - Flot de Bäcklund : simplifications successives du système
 - Équations de Bethe
 - Hamiltonien exprimé en termes des fonctions T ou Q
 - Intégrabilité classique (fonctions τ)
 - ↪ nouvel éclairage sur cette construction
 - ↪ possibilité de généralisations à d'autres modèles.

 - Donne une feuille de route pour les effets de taille finie en théorie des champs intégrables
 - Paramétrisation simple
 - Propriétés analytiques transparentes
 - Nouvelles symétries
 - ↪ Développement perturbatif
 - Enjeu ouvert :
Peut-on prouver ces propriétés ?
 - Régularisation sur réseau
- À quel point cette procédure est-elle générale ?

Conclusion

- Chaînes de spins (bien comprises)
 - Flot de Bäcklund : simplifications successives du système
 - Équations de Bethe
 - Hamiltonien exprimé en termes des fonctions T ou Q
- Intégrabilité classique (fonctions τ)

↪ nouvel éclairage sur cette construction

↪ possibilité de généralisations à d'autres modèles.

- Donne une feuille de route pour les effets de taille finie en théorie des champs intégrables
 - Paramétrisation simple
 - Propriétés analytiques transparentes
 - Nouvelles symétries
 - ↪ Développement perturbatif

À quel point cette
procédure
est-elle générale ?

- Enjeu ouvert :
Peut-on prouver ces propriétés ?
 - Régularisation sur réseau

Conclusion

- Chaînes de spins (bien comprises)
 - Flot de Bäcklund : simplifications successives du système
 - Équations de Bethe
 - Hamiltonien exprimé en termes des fonctions T ou Q
- Intégrabilité classique (fonctions τ)

↪ nouvel éclairage sur cette construction

↪ possibilité de généralisations à d'autres modèles.

- Donne une feuille de route pour les effets de taille finie en théorie des champs intégrables
 - Paramétrisation simple
 - Propriétés analytiques transparentes
 - Nouvelles symétries
 - ↪ Développement perturbatif
- À quel point cette procédure est-elle générale ?
- Enjeu ouvert :
Peut-on prouver ces propriétés ?
 - Régularisation sur réseau

Conclusion

- Chaînes de spins (bien comprises)
 - Flot de Bäcklund : simplifications successives du système
 - Équations de Bethe
 - Hamiltonien exprimé en termes des fonctions T ou Q
- Intégrabilité classique (fonctions τ)
 - ↪ nouvel éclairage sur cette construction
 - ↪ possibilité de généralisations à d'autres modèles.
- Donne une feuille de route pour les effets de taille finie en théorie des champs intégrables
 - Paramétrisation simple
 - Propriétés analytiques transparentes
 - Nouvelles symétries
 - ↪ Développement perturbatif

À quel point cette procédure est-elle générale ?
- Enjeu ouvert :
Peut-on prouver ces propriétés ?
 - Régularisation sur réseau

Merci !



S. Leurent and D. Volin, “Multiple zeta functions and double wrapping in planar $N=4$ SYM,” *arXiv* : 1302.1135.



S. Leurent, D. Serban, and D. Volin, “Six-loop Konishi anomalous dimension from the Y-system,” *Phys.Rev.Lett.* **109** (2012) 241601, *arXiv* : 1209.0749.



A. Alexandrov, V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi, and A. Zabrodin, “Classical tau-function for quantum spin chains,” *arXiv* : 1112.3310.



N. Gromov, V. Kazakov, S. Leurent, and D. Volin, “Solving the AdS/CFT Y-system,” *JHEP* **1207** (2012) 023, *arXiv* : 1110.0562.



V. Kazakov, S. Leurent, and Z. Tsuboi, “Baxter’s Q-operators and Operatorial Bäcklund Flow for Quantum (Super)-Spin Chains,” *Communications in Mathematical Physics* **311** (May, 2012) 787–814, *arXiv* : 1010.4022.



N. Gromov, V. Kazakov, S. Leurent, and Z. Tsuboi, “Wronskian Solution for AdS/CFT Y-system,” *JHEP* **1101** (2011) 155, *arXiv* : 1010.2720.

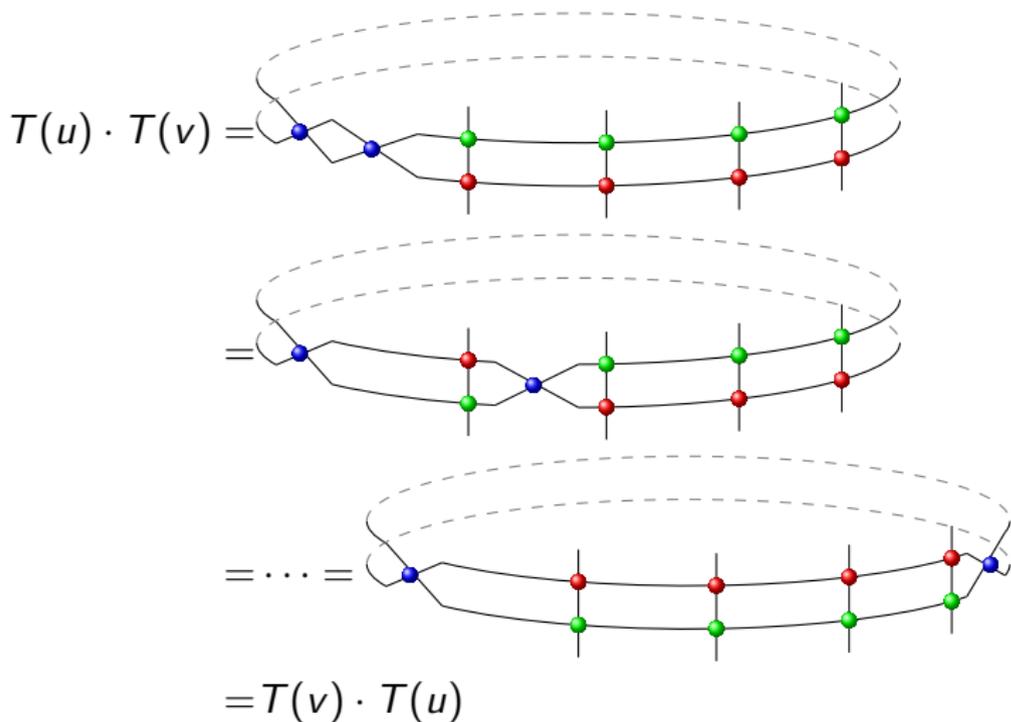


V. Kazakov and S. Leurent, “Finite Size Spectrum of $SU(N)$ Principal Chiral Field from Discrete Hirota Dynamics,” *arXiv* : 1007.1770.

Disclaimer : The following slides are additional material, not necessarily part of the presentation

- 5 Commutation des opérateurs T
- 6 Co-dérivées
- 7 Ansatz de Bethe Thermodynamique
- 8 Riemann-Hilbert

Commutation des opérateurs T



Expression de T en termes de co-dérivées

$$\bullet \hat{D} \otimes f(g) = \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \otimes f(e^\phi g) \right|_{\phi=0} \quad \phi \in GL(K)$$

• Si $f(g)$ est un opérateur sur \mathcal{H} , alors $\hat{D} \otimes f$ est un opérateur sur $\tilde{\mathcal{H}} = \mathbb{C}^K \otimes \mathcal{H}$

• $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}(1 \otimes g) +$ règle de Leibnitz :

$$\hat{D} \otimes (f \cdot \tilde{f}) = [\mathbb{I} \otimes f] \cdot [\hat{D} \otimes \tilde{f}] + [\hat{D} \otimes f] \cdot [\mathbb{I} \otimes \tilde{f}]$$

\rightsquigarrow expression de $\hat{D} \otimes f(g)$ pour f assez générale

$$\bullet \hat{D} \otimes \pi_\lambda(g) = \left[\sum_{\alpha, \beta} \underbrace{e_{\beta\alpha}}_{\text{générateur}} \otimes \underbrace{\pi_\lambda(e_{\alpha\beta})}_{\text{générateur}} \right] \cdot \mathbb{I} \otimes \pi_\lambda(e_{\alpha\beta})$$

d'où

$$\begin{aligned} & ((u - \theta_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \theta_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \\ & \qquad \qquad \qquad = \bigotimes_{i=1}^N (u - \theta_i + \hat{D}) \pi_\lambda(g) \end{aligned}$$

$$\text{et } T^{\{\lambda\}}(u) = \bigotimes_{i=1}^N \underbrace{(u - \theta_i + \hat{D})}_{u_i} \chi_\lambda(g)$$

Expression de T en termes de co-dérivées

$$\bullet \hat{D} \otimes f(g) = \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \otimes f(e^\phi g) \right|_{\phi=0} \quad \phi \in GL(K)$$

• Si $f(g)$ est un opérateur sur \mathcal{H} , alors $\hat{D} \otimes f$ est un opérateur sur $\tilde{\mathcal{H}} = \mathbb{C}^K \otimes \mathcal{H}$

• $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}(1 \otimes g) +$ règle de Leibnitz :

$$\hat{D} \otimes (f \cdot \tilde{f}) = [\mathbb{I} \otimes f] \cdot [\hat{D} \otimes \tilde{f}] + [\hat{D} \otimes f] \cdot [\mathbb{I} \otimes \tilde{f}]$$

\rightsquigarrow expression de $\hat{D} \otimes f(g)$ pour f assez générale

$$\bullet \hat{D} \otimes \pi_\lambda(g) = \left[\sum_{\alpha, \beta} \underbrace{e_{\beta\alpha}}_{\text{générateur}} \otimes \underbrace{\pi_\lambda(e_{\alpha\beta})}_{\text{générateur}} \right] \cdot \mathbb{I} \otimes \pi_\lambda(e_{\alpha\beta})$$

d'où

$$\begin{aligned} & ((u - \theta_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \theta_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \\ & \qquad \qquad \qquad = \bigotimes_{i=1}^N (u - \theta_i + \hat{D}) \pi_\lambda(g) \end{aligned}$$

$$\text{et } T^{\{\lambda\}}(u) = \bigotimes_{i=1}^N \underbrace{(u - \theta_i + \hat{D})}_{u_i} \chi_\lambda(g)$$

Expression de T en termes de co-dérivées

- $\hat{D} \otimes f(g) = \frac{\partial}{\partial \phi} \otimes f(e^\phi g) \Big|_{\phi=0} \quad \phi \in GL(K)$

- Si $f(g)$ est un opérateur sur \mathcal{H} , alors $\hat{D} \otimes f$ est un opérateur sur $\tilde{\mathcal{H}} = \mathbb{C}^K \otimes \mathcal{H}$

- $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}(1 \otimes g) +$ règle de Leibnitz :

$$\hat{D} \otimes (f \cdot \tilde{f}) = [\mathbb{I} \otimes f] \cdot [\hat{D} \otimes \tilde{f}] + [\hat{D} \otimes f] \cdot [\mathbb{I} \otimes \tilde{f}]$$

\rightsquigarrow expression de $\hat{D} \otimes f(g)$ pour f assez générale

- $\hat{D} \otimes \pi_\lambda(g) = \left[\sum_{\alpha, \beta} \underbrace{e_{\beta\alpha}}_{\text{générateur}} \otimes \underbrace{\pi_\lambda(e_{\alpha\beta})}_{\text{générateur}} \right] \cdot \mathbb{I} \otimes \pi_\lambda(e_{\alpha\beta})$

d'où

$$\begin{aligned} & ((u - \theta_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \theta_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \\ & \qquad \qquad \qquad = \bigotimes_{i=1}^N (u - \theta_i + \hat{D}) \pi_\lambda(g) \end{aligned}$$

et $T^{\{\lambda\}}(u) = \bigotimes_{i=1}^N \underbrace{(u - \theta_i + \hat{D})}_{u_i} \chi_\lambda(g)$

Expression de T en termes de co-dérivées

$$\bullet \hat{D} \otimes f(g) = \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \otimes f(e^\phi g) \right|_{\phi=0} \quad \phi \in GL(K)$$

• Si $f(g)$ est un opérateur sur \mathcal{H} , alors $\hat{D} \otimes f$ est un opérateur sur $\tilde{\mathcal{H}} = \mathbb{C}^K \otimes \mathcal{H}$

• $\hat{D} \otimes g = \mathcal{P}(1 \otimes g)$ + règle de Leibnitz :

$$\hat{D} \otimes (f \cdot \tilde{f}) = [\mathbb{I} \otimes f] \cdot [\hat{D} \otimes \tilde{f}] + [\hat{D} \otimes f] \cdot [\mathbb{I} \otimes \tilde{f}]$$

\rightsquigarrow expression de $\hat{D} \otimes f(g)$ pour f assez générale

$$\bullet \hat{D} \otimes \pi_\lambda(g) = \left[\sum_{\alpha, \beta} \underbrace{e_{\beta\alpha}}_{\text{générateur}} \otimes \underbrace{\pi_\lambda(e_{\alpha\beta})}_{\text{générateur}} \right] \cdot \mathbb{I} \otimes \pi_\lambda(e_{\alpha\beta})$$

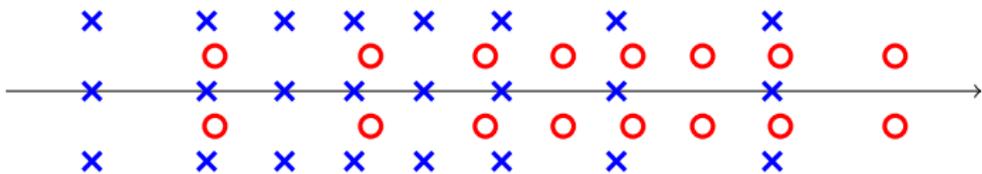
d'où

$$\begin{aligned} & ((u - \theta_L)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{L,a}) \cdots ((u - \theta_1)\mathbb{I} + \mathcal{P}_{1,a}) \cdot \pi_\lambda(g) \\ & \qquad \qquad \qquad = \bigotimes_{i=1}^N (u - \theta_i + \hat{D}) \pi_\lambda(g) \end{aligned}$$

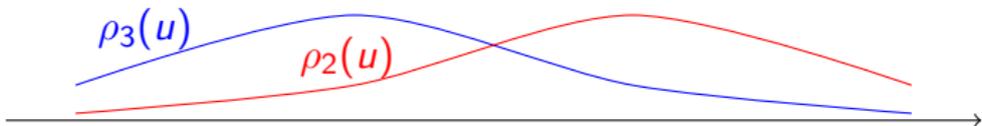
$$\text{et } T^{\{\lambda\}}(u) = \bigotimes_{i=1}^N \underbrace{(u - \theta_i + \hat{D})}_{u_i} \chi_\lambda(g)$$

États liés

Configuration simplifiée de racines de Bethe :



Introduction d'une densité pour chaque état lié :



Ansatz de Bethe Thermodynamique

↪ Équations de la forme

$$Y_{a,s}(u) = -L E_{a,s}(u) + \sum_{a',s'} K_{a,s}^{(a',s')} \star \log(1 + Y_{a',s'}(u)^{\pm 1})$$

+ (Termes de source)

- Energie du *vide*

$$E_0 = - \sum_{a,s} \int E_{a,s}(u) \log(1 + Y_{a,s}(u)) \, du$$

▶ retour

- Supposition supplémentaire : les états excités satisfont les même equation.

Chaque état correspond à une solution différente du système Y , caractérisée par ses zéros et ses pôles

- Cas de AdS/CFT : $E_{a,s}$ et $K_{a,s}^{(a',s')}$ ont tous deux de multiples coupures (de type racine carrée)

⇒ les équation du TBA contiennent des informations sur l'analyticité des fonctions
sous une forme difficile à décoder (sommés infinies)

Ansatz de Bethe Thermodynamique

↪ Équations de la forme

$$Y_{a,s}(u) = -L E_{a,s}(u) + \sum_{a',s'} K_{a,s}^{(a',s')} \star \log(1 + Y_{a',s'}(u)^{\pm 1})$$

+ (Termes de source)

- Energie du *vide*

$$E = - \sum_{a,s} \int E_{a,s}(u) \log(1 + Y_{a,s}(u)) du$$

- **Supposition supplémentaire** : les états excités satisfont les même equation.

Chaque état correspond à une solution différente du système Y , caractérisée par ses zéros et ses pôles

▶ retour

- Cas de AdS/CFT : $E_{a,s}$ et $K_{a,s}^{(a',s')}$ ont tous deux de multiples coupures (de type racine carrée)

⇒ les équation du TBA contiennent des informations sur l'analyticité des fonctions
sous une forme difficile à décoder (sommés infinies)

Ansatz de Bethe Thermodynamique

↪ Équations de la forme

$$Y_{a,s}(u) = -L E_{a,s}(u) + \sum_{a',s'} K_{a,s}^{(a',s')} \star \log(1 + Y_{a',s'}(u)^{\pm 1}) + \langle \text{Termes de source} \rangle$$

- Energie du *vide*

$$E = - \sum_{a,s} \int E_{a,s}(u) \log(1 + Y_{a,s}(u)) du$$

- Supposition supplémentaire : les états excités satisfont les même equation.

Chaque état correspond à une solution différente du système Y , caractérisée par ses zéros et ses pôles

- Cas de AdS/CFT : $E_{a,s}$ et $K_{a,s}^{(a',s')}$ ont tous deux de multiples coupures (de type racine carrée)

⇒ les équation du TBA contiennent des informations sur l'analyticité des fonctions

sous une forme difficile à décoder (sommés infinies)

Paramétrisation des fonctions Q

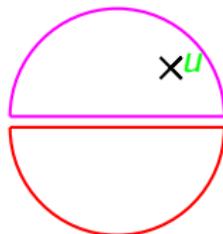
Problème de Riemann-Hilbert

Le théorème de Cauchy implique que

Si $Q(u)$ est holomorphe sur le demi-plan supérieur (lorsque $\text{Im}(u) > 0$), et $Q(u) \ll 1/u$ au voisinage de l'infini, alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(v) - \bar{Q}(v)}{v-u} dv = \begin{cases} Q(u) & \text{if } \text{Im}(u) > 0 \\ \bar{Q}(u) & \text{if } \text{Im}(u) < 0 \end{cases}$$

où $\bar{Q}(u)$ est le conjugué complexe de $Q(\bar{u})$.



En effet, si $\text{Im}(u) > 0$, alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\text{par en haut}} \frac{Q(v)}{v-u} dv = Q(u) \text{ et}$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\text{par en bas}} \frac{\bar{Q}(v)}{v-u} dv = 0$$