Chapitre 4 : Loi normale

4.1 Définitions

Loi Normale Si la loi d'une variable aléatoire Z est donnée par

$$\mathbb{P}[a \leqslant Z \leqslant b] = \int_a^b \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}x \,,$$

alors on dit que « Z suit la loi normale centrée réduite ».

Remarques :

- $\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$ est l'expression mathématique d'une « courbe en cloche »
- $\int_a^b$ désigne la surface sous la courbe entre les valeurs $x = a$ et $x = b$.

Fonction de répartition On désigne par $F(z)$ la probabilité $\mathbb{P}[Z \leqslant z]$, où Z suit la loi normale centrée réduite.

Propriétés :

- $\mathbb{P}[a \leqslant Z \leqslant b] = F(b) - F(a)$ (lorsque $a < b$).
- Si $z < 0$, alors $F(z) = 1 - F(|z|)$, où $|z|$ est la valeur absolue de z (c'est dire « z sans le signe ») par exemple $|-2{,}7| = 2{,}7$ (et $|2{,}7| = 2{,}7$) et $F(-2{,}7) = 1 - F(2{,}7)$.
- $\mathbb{P}[a \leqslant Z \leqslant b] = \mathbb{P}[a \leqslant Z < b] = \mathbb{P}[a < Z \leqslant b] = \mathbb{P}[a < Z < b]$

Lecture de la table page 10 du formulaire

Exemples :

- $F(1{,}73) \simeq 0{,}9582$ (ligne 1,7, colonne 3 de la table)
- $F(-2) = 1 - F(2)$ donc
  $F(-2) \simeq 1 - 0{,}9772 \simeq 0{,}0228$.
- si $z \geqslant 4$, $F(z) \simeq 1{,}0000$.

Loi normale Si X est une variable aléatoire et μ et σ sont deux nombres tels que la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suive la loi normale centrée réduite, on dit alors que « X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ », et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$.

Remarque En particulier la loi normale centrée réduite est notée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

4.2 Exemples de calculs

Exemple 1 : Soit $X \sim \mathcal{N}(20\ ;\ 5)$.
Trouvez x tel que $\mathbb{P}[X \geqslant x] = 95\%$.

- $\mathbb{P}[X \geqslant x] = 95\%$ revient à $\mathbb{P}\left[\underbrace{\frac{X-20}{5}}_{Z} \geqslant \frac{x-20}{5}\right] = 95\%$.

  $\frac{x-20}{5} \simeq -1{,}645$ (d'après l'exemple précédent).
- ça revient au même que $\underbrace{\frac{x-20}{5}\times 5}_{x-20} \simeq -1{,}645\times 5$.
- qui revient à $\underbrace{x - 20+20}_{x} \simeq \underbrace{-1{,}645 \times 5+20}_{11{,}78}$.

Remarque : Les calculettes graphiques récentes le calculent directement (voir p.8 ou p.9 du formulaire)

Exemple 2 : Trouvez z tel que $F(z) = 0{,}67$.

- on trouve 0,67 dans la ligne 0,4 et le colonne 4 de la table p.10 du formulaire, c'est à dire que $F(0{,}44) \simeq 0{,}67$.
- Donc la réponse est $z \simeq 0{,}44$.

Exemple 3 : Trouvez z tel que $F(z) = 0{,}05$.

- Pour avoir $F(z) = 0{,}05$ il faut avoir $z < 0$ (sinon $F(z)$ serait au moins 0,5).
- Dans ce cas, $F(z) = 1 - F(|z|)$. On veut donc $1 - F(|z|) = 0{,}05$, c'est à dire $F(|z|) = 0{,}95$.
- Table p.10 du formulaire

  $\rightsquigarrow$ $|z|$ est entre 1,64 et 1,65.

  Remarque « Table inverse » en bas de la page 10 $\rightsquigarrow$ $|z| \simeq 1{,}645$
- La réponse est donc : $z \simeq -1{,}645$.

Exemple 4 : Soit $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$.
Trouvez z tel que $\mathbb{P}[Z \geqslant z] = 95\%$.

- $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$, donc $\mathbb{P}[Z \geqslant z] = 1 - F(z)$.
  On veut donc $1 - F(z) = 0{,}95$, donc $F(z) = 0{,}05$.

  $\rightsquigarrow$ exemple précédent
- La réponse est donc : $z = -1{,}645$.

Exemple 5 : La réponse est donc: $x \simeq 11{,}78$.

- $18 \, \overline{75{=}0{,}24}$

$\rightsquigarrow$ $\sqrt{\frac{0{,}24\,(1-0{,}24)}{75}} \simeq 0{,}049$

- 0,24 -1,96×0,049 $\simeq$ 0,144
  0,24 + 1,96×0,049 $\simeq$ 0,336
- $18 \, \overline{75{=}0{,}24}$

4.3 « Effectifs théoriques »

Effectifs théoriques Si on considère une population de n individus, on appelle effectif théorique d'un évènement sa probabilité multipliée par n.

⚠ Pour que la somme des fréquences théoriques soit bien 100%, inclure aussi les valeurs trop petites dans la première classe et les valeurs trop grandes et dans la dernière.

4.4 Approximation de la loi binomiale

Si $n \geqslant 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$, alors
$\mathcal{B}(n; p) \approx \mathcal{N}\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$

⚠ Pour plus de précision, on peut faire une correction de continuité : par exemple remplacer $\mathbb{P}[8 \leqslant X \leqslant 12]$ par $\mathbb{P}[7{,}5 \leqslant X \leqslant 12{,}5]$.