Chapitre 3 : Probabilités

3.1 Vocabulaire

Évènements
: Différents résultats possibles d'une expérience aléatoire.

  Remarque : Un événement peut être constitué de plusieurs évènements élémentaires.

  Exemple : L'évènement « la some de deux dés fait 3 » est constitué de deux « évènements élémentaires » :

  - « le premier dé fait 1 et le deuxième fait 2 »
  - « le premier dé fait 2 et le deuxième fait 1 »

Variable aléatoire
: Quantité qui varie d'un évènement à l'autre.

  Exemple : la somme des dés

Loi de probabilité
: Règle de calcul donnant la probabilité des différents évènements

Loi Uniforme
: Cas où tous les « évènements élémentaires » ont la même probabilité

Exemple du lancer de deux dés

les évènements élémentaires sont « le premier dé fait . . . et le deuxième fait . . . », ils ont tous le même probabilité, c'est une loi uniforme

Calcul de probabilité si la loi est uniforme, la probabilité d'un évènement est la fraction :

$$\frac{\text{nb d'évènement élémentaires dont est constitué l'évènement}}{\text{nb total d'évènement élémentaires}}$$

Exemple de loi

On note X la somme de deux dés à quatre face.

On obtient :

Évènement	X=2	X=3	X=4	X=5	X=6	X=7	X=8
Probabilité	$\frac{1}{16} \simeq 0{,}062$	$\frac{2}{16} = 0{,}125$	$\frac{3}{16} \simeq 0{,}188$	$\frac{4}{16} = 0{,}25$	$\frac{3}{16} \simeq 0{,}188$	$\frac{2}{16} = 0{,}125$	$\frac{1}{16} \simeq 0{,}062$

Ces probabilités forment « la loi de X »

Remarque : on peut alors calculer la moyenne de X, son écart type, etc.

Remarque : Quand on considère la variable X, les évènements élémentaires sont « $X = 2$ », « $X = 3$ », etc.

Ils n'ont pas la même probabilité, donc *la loi de X n'est pas une loi uniforme*.

3.2 Énumération des cas

factorielle : Le nombre

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

s'appelle « la factorielle de n »

Exemple : $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$.

Conventions : $0! = 1$ et $1! = 1$.

Propriété : $n!$ est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments (c'est à dire le nombre d'ordres différents dans lesquels écrire les n éléments).

Exemple d'utilisation de la factorielle :

Pour un enfant qui a trois frères et soeurs, on considère l'ordre dans lequel il dessine les 6 membres de sa famille.

Question : S'il dessine dans un ordre « complètement aléatoire », quelle probabilité que les trois premiers dessinés soient l'enfant lui-même et ses parents ?

- Nombre total de cas :
  $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.
- Liste des cas où les trois premiers sont l'enfant lui-même et ses parents :

	ABC	ACB	BAC	…
PME	PMEABC	PMEACB	PMEBAC	…
PEM	PEMABC	PEMACB	PEMBAC	…
MPE	MPEABC	MPEACB	MPEBAC	…
…	…	…	…	

frères/soe

$3! = 6$ faç

les ordonn

parents+l'enfant :

- donc cette probabilité est $\frac{36}{720} = 0{,}05$.

Coefficients binomiaux (ou « nombre de combinaisons »)

La notation $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de sous ensembles de k éléments choisis parmi un ensemble de n éléments.

Exemple : $\binom{4}{2} = 6$, car avec 4 lettres (par exemple M, P, E et F) on écrit 6 combinaisons de deux lettres : EF, EM, EP, FM, FP et MP.

Formule : $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (\text{si } 0 \leqslant k \leqslant n)$$

Exemple :

$$\begin{aligned}\binom{4}{2} &= \frac{4!}{2!\times 2!} = \frac{4\times 3\times 2}{(2\times 1)\times(2\times 1)} = (4\times 3)\times\frac{1}{2\times 1}\\ &= \frac{2\times 2\times 3}{2} = 2\times 3 = 6\end{aligned}$$

Remarques :

- $\binom{n}{k}$ se prononce « k parmi n »
- Il arrive de noter C_n^k au lieu de $\binom{n}{k}$.

Exemple d'utilisation des coefficients binomiaux :

On considère un groupe de 25 personnes dont 6 fumeurs et 19 non-fumeurs.
On choisit trois personnes au hasard dans ce groupe de personnes.
Question : Quelle est la probabilité de choisir un fumeur et deux non-fumeurs ?

- Nombre total de cas : $\binom{25}{3} = 2300$.
- Liste des cas avec un fumeur et deux non-fumeurs :

	A	B	C	...
GH	GHA	GHB	GHC	...
GI	GIA	GIB	GIC	...
HI	HIA	HIB	HIC	...
...	...	...	...	

un fumeur :
possibilités tota

deux non-fumeurs : $\binom{19}{2} = 17$

- donc cette probabilité est $\frac{1\,026}{2\,300} \simeq 0{,}446$.

3.2 Loi binomiale

On répète n fois une expérience qui a à chaque fois la même probabilité de succès p.

On note X le nombre de « succès » obtenus.

On a alors $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

Notation La notation « $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ » signifie que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Loi binomiale On dit qu'une variable X suit la loi binomiale de paramètres n et p si ses probabilités son données par

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Propriétés : Si $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, alors

- la moyenne de X est $m(X) = n\,p$.
- sa variance est $\mathrm{Var}(X) = n\,p\,(1 - p)$.
- son écart type est $s(X) = \sqrt{n\,p\,(1 - p)}$.

Échantillonage :

Soit p la proportion d'individus qui ont un certain caractère au sein d'une population de N individus. On choisit n individus aux hasard, et on désigne par X le nombre d'individus qui ont ce caractère au sein de l'échantillon.

- Si n est beaucoup plus petit que N (en pratique dès que $N \geqslant 10n$)
  On approxime $X \approx \mathcal{B}(n; p)$
- Si le tirage est « avec remise », alors $X \approx \mathcal{B}(n; p)$.