Formulaire de Statistiques

L1 de Psychologie – année 2020/2021

Au cours du semestre, les feuilles de TD et résumés des cours sont mis en ligne sur

`https://plubel-prod.u-bourgogne.fr/course/view.php?id=889`.

C'est aussi cette page qui est utilisée pour communiquer avec vos chargés de TD en cas d'hybridation ou de passage en distanciel.

Mode d'évaluation et connaissances exigibles

Pour les examens de statistiques, et en particulier le contrôle terminal d'une durée de deux heures, les étudiants amènent leur formulaire **vierge de toute annotation** et leur calculette scientifique, dont le "*mode examen*" devra être utilisé pendant toute la durée de l'épreuve. Si la calculatrice n'a pas de "*mode examen*" (anciens modèles), elle devra être réinitialisée avant l'épreuve.
Le contrôle continu (CC) en cours de semestre comptera un contrôle commun, comptant pour la moitié de la note de CC. L'autre moitié de la note de CC sera attribuée au sein de chaque groupe de TD, en prenant à la fois en compte l'implication des étudiants dans le déroulement du semestre (en particulier, passage au tableau), et les connaissances exigibles (ci-dessous). La note donnée s'appuiera principalement sur un ou des contrôles écrits en temps limité. Elle pourra aussi prendre en compte le passage au tableau des étudiants, un ou plusieurs devoir(s) maison, etc.
Le contrôle continu et l'examen terminal (CT) compteront chacun pour la moitié de la note de l'UE.

Lors des contrôle écrits et de l'examen terminal, l'étudiant sera évalué sur sa capacité à
Statistiques descriptives à une variable

1. Connaître et savoir identifier les différents types de variables statistiques
2. Réorganiser les données fournies, si leur format n'est pas adapté aux calculs ou à l'analyse qu'il souhaite en faire.
3. En détaillant les calculs si l'énoncé le demande, déterminer la moyenne, l'écart type, les fréquences, les fréquences cumulées, la médiane et (pour les données regroupées en classes) les quartiles.
4. Lire des représentations graphiques et en déduire la valeur de proportions.
5. Calculer des proportions expérimentales à partir de données.

Statistiques descriptives à deux variables

6. Tracer ou exploiter un nuage de points.
7. Déterminer la covariance, le coefficient de corrélation linéaire, et le coefficient de corrélation des rangs (de Spearman) de deux variables statistiques ; détailler les calculs si l'énoncé le demande.
8. Déterminer la droite de régression $D_{Y|X}$ (ou $D_{X|Y}$ selon le contexte).

Probabilités, combinatoire

9. Calculer $n!$ et $\binom{n}{k}$. Manipuler le symbole $\sum$.
10. Reconnaître les situations où la loi est uniforme, binomiale, ou normale. Déterminer, le cas échéant, ses paramètres.
11. Connaître les propriétés des lois binomiale et normale (moyenne et variance).
12. Déterminer la probabilité de n'importe quel intervalle pour toute loi uniforme, binomiale, ou normale.
    Détailler les calculs, en utilisant (pour la loi normale) la table du formulaire.
    En déduire des « effectifs théoriques ».
13. Déterminer l'intervalle ayant une probabilité fixée (sous certaines conditions) – *exemple : trouver le plus petit a tel que* $\mathbb{P}[X \leqslant a] \geqslant 10\%$.
    Cas particulier : quartiles.
14. Utiliser la loi normale pour faire des calculs approchés pour une loi binomiale, après avoir vérifié que les conditions de l'approximation sont satisfaites. Savoir faire la correction de continuité pour n'importe quel intervalle fermé.

Estimation

15. Estimer par intervalle de confiance une proportion, une moyenne ou une variance.
    Détailler les calculs et vérifier que les conditions sont réunies pour procéder à l'estimation.
16. Déterminer la taille d'échantillon nécessaire pour que l'estimation atteigne une certaine précision.

17. Effectuer les calculs sur calculette, avoir conscience de la précision (ou l'imprécision) des résultats.
18. Interpréter les résultats obtenus, indiquer leur signification.

La lisibilité des copies et la présentation des calculs, raisonnements et résultats pourra aussi être prise en compte.

Statistiques descriptives à une variable

Moyenne et écart-type d'une variable statistique X sur un échantillon de taille n

	Données brutes (petits échantillons)	Effectifs par modalités (grands échantillons)	Données regroupées en classes
Notation	x_i : valeur de X pour l'individu i n : taille de l'échantillon	n_i : effectif de la modalité x_i r : nombre de modalités	n_i : effectif d'une classe dont le centre est noté c_i r : nombre de classes
Moyenne	$m(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$m(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i$	$m(X) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i c_i$
$m(X^2)$	$m(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2)$	$m(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i(x_i^2)$	$m(X^2) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i(c_i^2)$
Variance	$\mathrm{Var}(X) = m\Big((X-m(X))^2\Big) = m(X^2) - \Big(m(X)\Big)^2$		
Écart-type	$s(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$		
Écart-type corrigé	$\hat{s}(X) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\ s(X)$		

Médiane et quartiles

Données brutes : échantillons (généralement petits) de n individus.
On ordonne les valeurs prises par ordre croissant. La médiane est la $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{ième}}$ valeur. Si $\frac{n+1}{2}$ n'est pas entier, on prend le milieu entre la $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ième}}$ et la $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ième}}$.

Données regroupées en classes :
Dans ce cas, la médiane est la valeur Med telle que $P_r[X \leqslant \mathrm{Med}] = 0{,}5$.

- Notation : $F_X(a) = \mathbb{P}_r[X \leqslant a]$
- **Classe médiane**, notée ci-dessous $[a_i; a_{i+1}[$: première classe dont la fréquence cumulée est supérieure à 0,5.
- **Médiane** : $\mathrm{Med} \simeq a_i + \dfrac{a_{i+1}-a_i}{F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)}\big(0{,}5 - F_X(a_i)\big)$.
- Si F_X est exprimé en %, alors il faut remplacer `0,5` par `50` dans cette formule.

Quartiles : Pour le premier et le troisième quartiles, on utilise la même formule en remplaçant 0,5 par 0,25 pour le premier quartile (Q_1) et par 0,75 pour le troisième (Q_3).
Attention la classe $[a_i,a_{i+1}[$ à considérer change aussi.

Couple de variables statistiques

Corrélation et régression de deux variables X et Y

Covariance : $\quad \mathrm{Cov}(X;Y) = m\Big((X-m(X)) \times (Y-m(Y))\Big) = m(XY) - m(X)m(Y)$

Coefficient de corrélation linéaire : $r(X;Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X;Y)}{s(X)\cdot s(Y)}$

Coefficient de corrélation des rangs de Spearman :

En notant x'_i le rang de la valeur x_i, $\qquad r_s(X;Y) \approx 1 - 6\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x'_i - y'_i)^2}{n(n^2-1)}$

Droites de régression :

- Droite $D_{Y|X}$ (détermination de Y en fonction de X) :

$$D_{Y|X} : \quad Y = aX + b \quad \text{où} \quad a = \frac{\mathrm{Cov}(X;Y)}{\mathrm{Var}(X)} = r(X;Y) \times \frac{s(Y)}{s(X)}, \quad \text{et} \quad b = m(Y) - a\cdot m(X)$$

- Droite $D_{X|Y}$ (détermination de X en fonction de Y) :

$$D_{X_{|Y}} : \quad X = a'Y + b' \quad \text{où} \quad a' = \frac{\mathrm{Cov}(X;Y)}{\mathrm{Var}(Y)} = r(X;Y) \times \frac{s(X)}{s(Y)}, \quad \text{et} \quad b' = m(X) - a'\cdot m(Y)$$

Probabilité

Nombre de Permutations de n éléments **:**

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$

Nombre de Combinaisons de k éléments parmi n

- si $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- si $k < 0$ ou $k > n$, on considère que $\binom{n}{k} = 0$

Remarques

$\binom{n}{0} = 1$, $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k}$ est parfois noté C_n^k

Loi uniforme

On parle de "loi uniforme" lorsque chaque cas a la même probabilité.

Probabilité d'un événement : $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$.

Loi binomiale

On répète n fois de manière indépendante une expérience qui a une probabilité de succès p. On note X le nombre de succès obtenus.

Alors $X \sim \mathcal{B}(n;p)$, c'est à dire $\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Moyenne : $m(X) = np$, **Variance** : $Var(X) = np(1-p)$, **Écart-type** : $s(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Si $n \geqslant 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$, alors $\mathcal{B}(n;p) \approx \mathcal{N}\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$

Remarque : Pour améliorer l'approximation, on peut faire une *correction de continuité.*

Exemple : Si $S \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$ et $X \sim \mathcal{N}\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$,

on approxime $\mathbb{P}[8 \leqslant S \leqslant 12] \approx \mathbb{P}[7.5 \leqslant X \leqslant 12.5]$.

Loi normale

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$, alors $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$
- Si $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$, alors $\mathbf{P}[a \leqslant Z \leqslant b] = F(b) - F(a)$, où F est la fonction tabulée en page 10.
  - pour $z < 0$, $F(z) = 1 - F(|z|)$.
  - $F(\infty) = 1$ et dès que $z \geqslant 3{,}9$, $F(z) \simeq 1{,}0000$.

Estimation

Cas d'une proportion

Dans une population $\mathcal{P}$, on désigne par p la proportion des individus qui satisfont un caractère "C" donné. On prélève ensuite dans $\mathcal{P}$ un échantillon $\mathcal{E}$ de taille n. On note p_e la proportion expérimentale dans l'échantillon $\mathcal{E}$.
On se donne une confiance c (ou un risque d'erreur $\alpha = 1 - c$). **Si $\mathbf{n \geqslant 30}$, $\mathbf{np_e \geqslant 5}$ et $\mathbf{n(1 - p_e) \geqslant 5}$,** alors on peut déterminer un intervalle de confiance pour p selon la procédure suivante :

1. Dans la table de la loi normale, on cherche la valeur z_α telle que $F(z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{c+1}{2}$.

confiance: c	0,9	0,95	0,96	0,98	0,99	0,995
risque d'erreur: α	0,1	0,05	0,04	0,02	0,01	0,005
z_α	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	2,807

2. On calcule $a_\alpha = z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_e(1-p_e)}{n}}$
3. Avec la confiance $c = 1 - \alpha$, on peut affirmer que p se trouve dans l'intervalle :

$$I_\alpha(p) = [p_e - a_\alpha, p_e + a_\alpha]$$

Taille de l'échantillon

Taille de l'échantillon pour avoir une précision h avec une confiance $c = 1 - \alpha$:

- si on a un échantillon de référence on utilise sa valeur p_e on prend $n > z_\alpha^2 \dfrac{p_e(1 - p_e)}{h^2}$
- si on n'a pas d'échantillon de référence alors on prend $n > z_\alpha^2 \dfrac{1}{4h^2}$.

Cas d'une moyenne

Dans une population $\mathcal{P}$, on désigne par X une variable statistique de moyenne μ et d'écart-type σ. On prélève ensuite dans $\mathcal{P}$ un échantillon $\mathcal{E}$ de taille n. On note m_e, s_e et $\hat{s}_e$ respectivement la moyenne, l'écart-type et l'écart type corrigé de l'échantillon.
Étant donnée une confiance c (ou un risque d'erreur $\alpha = 1 - c$), on peut déterminer un intervalle de confiance pour μ selon la procédure suivante :

- Cas $n \geqslant 30$.
  1. Dans la table de la loi normale, on cherche la valeur z_α telle que $F(z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{c+1}{2}$.

confiance: c	0,9	0,95	0,96	0,98	0,99	0,995
risque d'erreur: α	0,1	0,05	0,04	0,02	0,01	0,005
z_α	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	2,807

  2. Avec la confiance $c = 1 - \alpha$, on peut affirmer que μ se trouve dans l'intervalle :

$$I_\alpha(\mu) = [m_e - a_\alpha ; m_e + a_\alpha] \qquad \text{où} \qquad a_\alpha = z_\alpha \frac{s_e}{\sqrt{n-1}} = z_\alpha \frac{\hat{s}_e}{\sqrt{n}}$$

- Cas $n < 30$. On doit avoir l'hypothèse "X *suit une loi normale.*"
  1. Dans la table de la loi de Student, on cherche t_α telle que $\mathbb{P}[-t_\alpha \leqslant T_n \leqslant t_\alpha] = c$.
     Cela revient à lire sur la table de Student la valeur t_α avec $p = \frac{\alpha}{2}$ pour $n - 1$ degrés de liberté (d.d.l).

confiance: c	0,9	0,95	0,96	0,98	0,99	0,995
risque d'erreur: α	0,1	0,05	0,04	0,02	0,01	0,005
lire sur la table pour $p =$	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0025

  2. Avec la confiance $c = 1 - \alpha$, on peut affirmer que μ se trouve dans l'intervalle :

$$I_\alpha(\mu) = [m_e - a_\alpha ; m_e + a_\alpha] \qquad \text{où} \qquad a_\alpha = t_\alpha \frac{s_e}{\sqrt{n-1}} = t_\alpha \frac{\hat{s}_e}{\sqrt{n}}$$

Taille de l'échantillon

Taille de l'échantillon pour avoir une précision h avec une confiance $c = 1 - \alpha$:

$$n > z_\alpha^2 \frac{(s_e)^2}{h^2}.$$

Cas d'un écart type (ou d'une variance)

Dans une population $\mathcal{P}$ de taille N, on désigne par X une variable statistique suivant une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. On prélève ensuite dans $\mathcal{P}$ un échantillon $\mathcal{E}$ de taille n. On note respectivement s_e et $\hat{s}_e$ l'écart type et l'écart type corrigé de l'échantillon.
Étant donnée une confiance c (ou un risque d'erreur $\alpha = 1 - c$), on peut déterminer un intervalle de confiance pour σ selon la procédure suivante :

1. On cherche dans la table de la loi du χ^2 à $n-1$ ddl les valeurs :

$$x_1 \quad \text{lu pour } q = \frac{\alpha}{2} = \frac{1-c}{2} \qquad\qquad x_2 \quad \text{lu pour } p = \frac{\alpha}{2} = \frac{1-c}{2}$$

Ce qui revient à lire sur la table du χ^2 de la façon suivante :

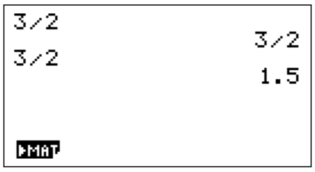
confiance: c	0,9	0,95	0,96	0,98	0,99	0,995
risque d'erreur: α	0,1	0,05	0,04	0,02	0,01	0,005
lire sur la table pour p ou $q =$	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0025

2. Avec la confiance $c = 1 - \alpha$, on peut affirmer que σ se trouve dans l'intervalle :

$$I_\alpha(\sigma) = \left[s_e\sqrt{\frac{n}{x_2}}; s_e\sqrt{\frac{n}{x_1}}\right] = \left[\hat{s}_e\sqrt{\frac{n-1}{x_2}}; \hat{s}_e\sqrt{\frac{n-1}{x_1}}\right]$$

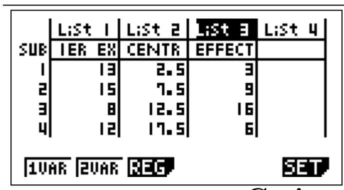
Utilisation des calculatrices

Remarques préliminaire

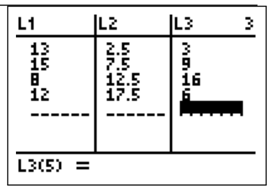


• Sur les calculatrices Casio, il est parfois nécessaire d'utiliser la touche F↔D pour obtenir un résultat décimal au lieu (par exemple) d'une fraction.
• Selon le modèle et la configuration (langue) de votre calculatrice, de légères différences dans les menus peuvent impacter les commandes indiquées dans ce formulaire. Le cas échéant, se reporter au manuel de la calculatrice.

Editeur de listes



Les calculatrices disposent d'un éditeur de listes permettant d'entrer les données expérimentales afin de calculer des moyennes, écart-type, droites de régression, etc.



Casio

On accède à l'éditeur par MENU , en choisissant `STAT`. Si l'on souhaite supprimer des données antérieures, on peut utiliser DEL-A pour supprimer toute une colonne, ou DEL pour supprimer une seule case.

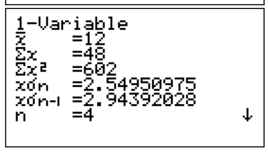
TI

On accède à l'éditeur en choisissant `Edit` dans le menu STAT . Si l'on souhaite supprimer des données antérieures, on peut utiliser DEL pour supprimer une seule case, ou `ClrList` (dans le menu STAT) suivi du nom ($\mathtt{L}_1$, ou $\mathtt{L}_2$ par exemple) de la colonne que l'on veut effacer. On peut entrer $\mathtt{L}_1$ avec 2nd 1 .

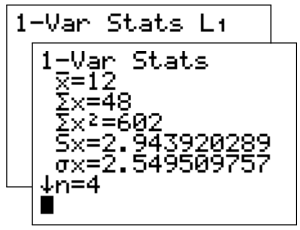
Statistiques univariées

Cas de données brutes (Petit échantillon)

On considère l'exemple d'un groupe de 4 étudiants qui, à un contrôle, ont eu pour notes respectives 13, 15, 8 et 12. Les instructions ci-dessous permettent de calculer la moyenne, l'écart-type et la médiane **après avoir préalablement entré ces notes dans** une colonne de **l'éditeur de liste** (par exemple la première colonne).



Casio : Depuis l'éditeur de listes, choisir `CALC` (touche `F2`) puis `SET` (touche `F6`). Dans le menu qui apparaît, entrer "`List 1`" dans la ligne "`1Var XList`", si les données ont été entrées dans la 1ère colonne de l'éditeur. Pour cela, utiliser `F1` `1` `EXE` . Dans la ligne "`1Var Freq`", entrer `1`.
Revenir ensuite dans l'éditeur de liste (avec `EXIT`) et choisir `1VAR` (touche `F1`). La moyenne s'affiche alors dans la ligne $\overline{\mathtt{x}}$, l'écart-type dans la ligne `x`σ`n`, la médiane dans la ligne `Med` ...



TI : On exécute la commande `1-Var Stats L`$_1$, où $\mathtt{L}_1$ indique qu'on a mis les données dans la première colonne de l'éditeur de liste. La fonction `1-Var Stats` se trouve dans la colonne `CALC` du menu `STAT` (on y accède donc par `STAT` suivi de `▷` et `ENTER`), et $\mathtt{L}_1$ s'obtient avec `2nd` `1` .
La moyenne s'affiche alors dans la ligne $\overline{\mathtt{x}}$, l'écart-type dans la ligne σ`x`, la médiane dans la ligne `Med` ...

Remarque : Les calculatrices donnent en générale deux écarts-type (notés par exemple `x`σ`n` et `x`σ`n–1` ou S`x` et σ`x` selon le modèle de calculatrice). Le plus grand des deux est "l'*écart type corrigé*" (noté $\hat{s}$ et très peu utilisé dans ce cours), alors que le plus petit est l'écart-type (noté s dans ce cours).

Effectifs par modalité (Grand échantillon ou données regroupées par classes)

On considère par exemple les données suivantes :

Note	[0 ;5[	[5 ;10[	[10 ;15[	[15 ;20[
Effectif	3	9	16	6

Tout d'abord, on entre les données dans l'éditeur de liste : on met les centre des classes dans une colonne (par exemple la deuxième colonne pour les captures d'écran de la page précédente), et les effectifs dans une autre colonne (par exemple la troisième colonne).
TI : On procède comme précédemment, mais on exécute `1-Var Stats L`$_2$`, L`$_3$ pour indiquer que les notes sont dans la deuxième colonne et les effectifs dans la troisième colonne.
Casio : On procède comme précédemment, sauf que dans le menu qui apparaît avec `SET`, on choisit `List 2` dans la ligne `1Var XList` et `List 3` dans la ligne `1Var Freq`, avant de choisir `1VAR` pour afficher les resultats.

Statistiques bivariées

Casio

On entre de même les données dans l'éditeur puis on choisit `SET`. On indique la colonne où l'on a entré les valeurs de X dans la ligne `2Var XList` et celle où l'on a entré les valeurs de Y dans la ligne `2Var YList`. En présence d'effectifs, on indique la colonne correspondante dans la ligne `2Var Freq` (dans la cas contraire on met `1` dans cette ligne).
La fonction `2Var` calcule les moyennes et écarts-type de X et Y, tandis qu'en choisissant `REG`, puis `x` on obtient la droite de régression $D_{Y|X}$, et le coefficient de corrélation linéaire.

TI

On entre de même les données dans l'éditeur puis on exécute 2-Var Stats suivi du nom de la colonne ou on a entré les valeurs de X, puis celle où on a entré les valeurs de Y et le cas échéant celle où on en entré les effectifs (séparées à chaque fois par des virgules). On obtient ainsi les moyennes, écarts-type, etc.
La fonction `LinReg(ax+b)` (suivie elle aussi du nom des colonnes) donne pour sa part la droite $D_{Y|X}$.

Combinatoire et probabilités avec une calculatrice Casio

Coefficients binomiaux

(Exemple du calcul de $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{4}$ (qui sont égaux car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$))

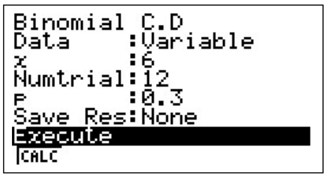
Pour $\binom{6}{2}$, taper `6` , puis entrer `nCr`, puis taper `2` .
Pour accéder à `nCr`, taper `OPTN` , puis choisissez `PROB` (faire défiler avec `F6` avant de sélectionner avec `F3`), puis `nCr` (avec `F3`).

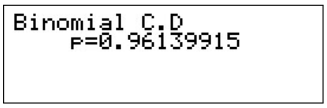
Remarques :

- La fonction factorielle `x!` se trouve dans le même menu.
- Certaines calculettes renvoient en message d'erreur quand on demande $\binom{n}{k}$ pour $k < 0$ ou $k > n$.

Loi Binomiale

(Exemple du calcul de $\mathbb{P}[X \leqslant 6]$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$)





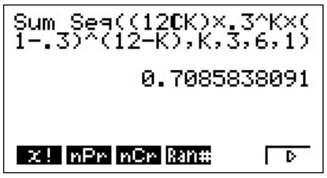
Dans `MENU` , choisir `STAT`, puis dans `DIST`, choisir `BINM` puis `Bcd`.
Dans le menu qui s'ouvre, entrer `Var` dans la ligne `Data`, puis renseigner les lignes suivantes :

- Comme on veut calculer $P[X \leqslant 6]$, on entre `6` `EXE` dans la ligne `x`.
- Pour $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$, on entre 12 dans la ligne `Numtrial` et 0.3 dans la ligne `p`.

Entrer `CALC` (dans la ligne `Execute`) pour calculer et afficher la probabilité.

Loi Binomiale Sur un modèle ancien qui ne dispose pas de la fonction Bcd

(Exemple du calcul de $\mathbb{P}[3 \leqslant X \leqslant 6]$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$)

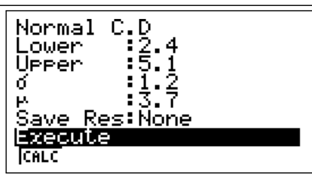


Si on cherche à calculer $\mathbb{P}[3 \leqslant X \leqslant 6]$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$, on note tout d'abord que
$\mathbb{P}[3 \leqslant X \leqslant 6] = \mathbb{P}[X=3] + \mathbb{P}[X=4] + \cdots + \mathbb{P}[X=6]$

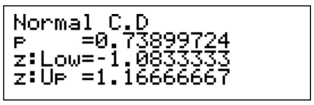
$$= \sum_{k=3}^{6} \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=3}^{6} \binom{12}{k} (0{,}3)^k (1-0{,}3)^{12-k}.$$

On utilise alors `Sum Seq`, qui permet de calculer une telle somme (capture d'écran ci-contre).
Les fonctions `Sum` et `Seq` s'obtiennent avec `OPTN` , puis `LIST`, puis en faisant défiler jusqu'à `Sum` et `Seq`. La lettre `K` s'obtient avec `ALPHA` puis `,` , et la virgule avec la touche `,` . Les derniers arguments "`K,3,6,1`", indiquent que les différents termes de la somme s'obtiennent en variant la valeur de k, en commençant par $k = 3$, en allant jusqu'à $k = 6$, et que pour obtenir le terme suivant on ajoute 1 à k.

Loi Normale



(Exemple du calcul de $\mathbb{P}[2{,}4 \leqslant X \leqslant 5{,}1]$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(3{,}7\,;\,1{,}2)$)
Dans `MENU` , choisir `STAT`, puis dans `DIST`, choisir `NORM` puis `Ncd`.
Dans le menu qui s'ouvre, entrer 2.4 dans la ligne `Lower` et 5.1 dans la ligne `Upper` (car on veut calculer $\mathbb{P}[2{,}4 \leqslant X \leqslant 5{,}1]$). Entrer enfin 1.2 dans la ligne σ et 3.7 dans la ligne μ (car on considère $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(3{,}7\,;\,1{,}2)$).
Entrer `CALC` (dans la ligne `Execute`) pour calculer et afficher la probabilité.



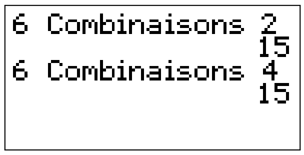
Remarque (lecture inverse) : On peut aussi résoudre des problèmes comme « *trouver a tel que* $\mathbb{P}[X \leqslant a] = 0{,}95$ » en choisissant `InvN` au lieu de `Ncd`. Pour cet exemple, on choisirait `Left` dans la ligne `Tail`, et 0.95 dans la ligne `Area` (et les paramètres de la loi normale dans les lignes σ et μ).

Combinatoire et probabilités avec une calculatrice TI

Coefficients binomiaux

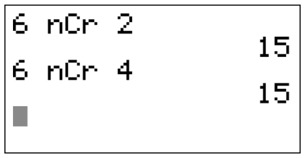
(Exemple du calcul de $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{4}$ (qui sont égaux car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$))

Pour $\binom{6}{2}$, taper 6 , puis entrer `Combinaison`, puis taper 2 .
Pour accéder à `Combinaison`, taper MATH , puis allez dans la colonne `PRB` (en appuyant 3 fois sur ▷), puis choisir `Combinaison` (en appuyant 2 fois sur ▽ puis sur ENTER).



Remarques :

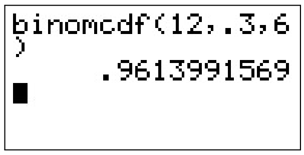
- La fonction factorielle « ! » se trouve dans le même menu.
- Certaines calculettes renvoient en message d'erreur quand on demande $\binom{n}{k}$ pour $k < 0$ ou $k > n$.
- Sur les TI anglophones (capture d'écran ci contre) la fonction `Combinaison` s'appelle `nCr`.



Loi Binomiale

(Exemple du calcul de $\mathbb{P}[X \leqslant 6]$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$)

On utilise la fonction `binomFRep` (ou `binomcdf` sur les calculettes anglophones). On trouve cette fonction dans le menu `DISTR` accessible par 2nd VARS . On entre ensuite les valeurs 12 et 0.3 (pour $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$), séparées par des virgules, puis 6 (pour calculer $\mathbb{P}[X \leqslant 6]$). On finit par) ENTER . La valeur qui s'affiche alors est la probabilité $\mathbb{P}[X \leqslant 6]$.



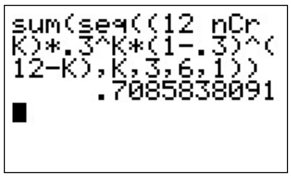
Loi Binomiale Sur un ancien modèle sans la fonction `binomFRep` (ou `binomcdf`)

(Exemple du calcul de $\mathbb{P}[3 \leqslant X \leqslant 6]$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$)

Si on cherche à calculer $\mathbb{P}[3 \leqslant X \leqslant 6]$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$, on note tout d'abord que $\mathbb{P}[3 \leqslant X \leqslant 6] = \mathbb{P}[X=3] + \mathbb{P}[X=4] + \cdots + \mathbb{P}[X=6]$

$$= \sum_{k=3}^{6} \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=3}^{6} \binom{12}{k} (0{,}3)^k (1-0{,}3)^{12-k}.$$

On utilise alors `sum(seq(`, qui permet de calculer une telle somme (capture d'écran ci-contre).



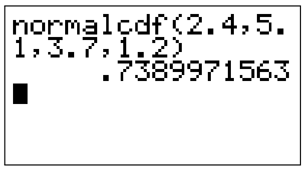
Les fonctions `sum` et `seq` se trouvent dans le menu `LIST` accessible avec 2nd , puis STAT . Une fois dans ce menu, `sum` se trouve dans la colonne `MATH` alors que `seq` se trouve dans la colonne `OPS`. La lettre `K` s'obtient avec ALPHA puis (, et la virgule avec la touche , . Les derniers arguments "`K,3,6,1`", indiquent que les différents termes de la somme s'obtiennent en variant la valeur de k, en commençant par $k = 3$, en allant jusqu'à $k = 6$, et que pour obtenir le terme suivant on ajoute 1 à k.

Remarque : Selon le modèle (et la langue) de la calculette, la fonction `sum` est susceptible de s'appeler `somme` et la fonction `seq` est susceptible de s'appeler `suite`.

Loi Normale

(Exemple du calcul de $\mathbb{P}[2{,}4 \leqslant X \leqslant 5{,}1]$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(3{,}7\,;\,1{,}2)$)

On utilise la fonction `normalFRep` (ou `normalcdf` sur les calculettes anglophones). On trouve cette fonction dans le menu `DISTR` accessible par 2nd VARS . On entre ensuite les valeurs 2.4, 5.1, 3.7, et 1.2 (séparées par des virgules), pour indiquer qu'on calcule $\mathbb{P}[2{,}4 \leqslant X \leqslant 5{,}1]$ et que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(3{,}7\,;\,1{,}2)$. On finit par) ENTER . La valeur qui s'affiche alors est la probabilité $\mathbb{P}[2{,}4 \leqslant X \leqslant 5{,}1]$.



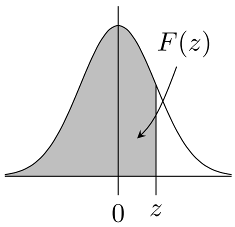
Remarque (lecture inverse) : On peut aussi résoudre des problèmes comme « *trouver a tel que* $\mathbb{P}[X \leqslant a] = 0{,}95$ » avec la fonction `invNorm` : par exemple si on pose cette question pour $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(3{,}7\,;\,1{,}2)$, il suffit d'exécuter `invNorm(0.95,3.7,1.2)`.

Table 1 : Loi Normale centrée réduite

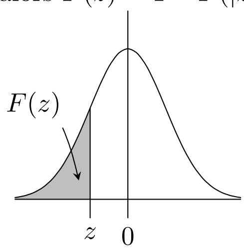
Fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite

$F(z) = \mathbb{P}[Z \leqslant z]$ en fonction de z pour $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000



Remarque :
Si $z < 0$,
alors $F(z) = 1 - F(|z|)$.



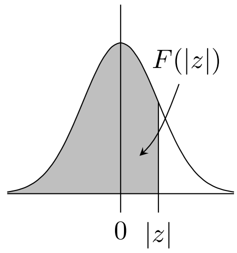


Table inverse de la loi Normale centrée réduite

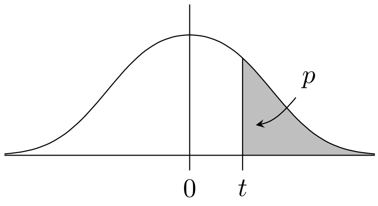
Valeurs de z en fonction de $F(z) = \mathbb{P}[Z \leqslant z]$, ou de la confiance (bilatérale) $c = 2\,F(z) - 1$.

$F(z)$	0,75	0,90	0,95	0,96	0,97	0,975	0,98	0,99	0,995	0,9975
confiance c	0,50	0,80	0,90	0,92	0,94	0,950	0,96	0,98	0,990	0,9950
z	0,674	1,282	1,645	1,751	1,881	1,960	2,054	2,326	2,576	2,807

Table 2 : Loi de Student

Table inverse de la loi de Student

t en fonction de p tel que $p = \mathbb{P}[T \geqslant t]$
pour T suivant une loi de Student.



ddl \ p	0,2	0,15	0,1	0,05	0,04	0,03	0,025	0,02	0,015	0,01	0,005	0,0025
1	1,3764	1,9626	3,0777	6,3138	7,9158	10,5789	12,7062	15,8945	21,2049	31,8205	63,6567	127,3213
2	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	3,3198	3,8964	4,3027	4,8487	5,6428	6,9646	9,9248	14,0890
3	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	2,6054	2,9505	3,1824	3,4819	3,8960	4,5407	5,8409	7,4533
4	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,3329	2,6008	2,7764	2,9985	3,2976	3,7469	4,6041	5,5976
5	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,1910	2,4216	2,5706	2,7565	3,0029	3,3649	4,0321	4,7733
6	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,1043	2,3133	2,4469	2,6122	2,8289	3,1427	3,7074	4,3168
7	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,0460	2,2409	2,3646	2,5168	2,7146	2,9980	3,4995	4,0293
8	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,0042	2,1892	2,3060	2,4490	2,6338	2,8965	3,3554	3,8325
9	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	1,9727	2,1504	2,2622	2,3984	2,5738	2,8214	3,2498	3,6897
10	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	1,9481	2,1202	2,2281	2,3593	2,5275	2,7638	3,1693	3,5814
11	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	1,9284	2,0961	2,2010	2,3281	2,4907	2,7181	3,1058	3,4966
12	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	1,9123	2,0764	2,1788	2,3027	2,4607	2,6810	3,0545	3,4284
13	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	1,8989	2,0600	2,1604	2,2816	2,4358	2,6503	3,0123	3,3725
14	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	1,8875	2,0462	2,1448	2,2638	2,4149	2,6245	2,9768	3,3257
15	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	1,8777	2,0343	2,1314	2,2485	2,3970	2,6025	2,9467	3,2860
16	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	1,8693	2,0240	2,1199	2,2354	2,3815	2,5835	2,9208	3,2520
17	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	1,8619	2,0150	2,1098	2,2238	2,3681	2,5669	2,8982	3,2224
18	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	1,8553	2,0071	2,1009	2,2137	2,3562	2,5524	2,8784	3,1966
19	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	1,8495	2,0000	2,0930	2,2047	2,3456	2,5395	2,8609	3,1737
20	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	1,8443	1,9937	2,0860	2,1967	2,3362	2,5280	2,8453	3,1534
21	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	1,8397	1,9880	2,0796	2,1894	2,3278	2,5176	2,8314	3,1352
22	0,8583	1,0614	1,3212	1,7171	1,8354	1,9829	2,0739	2,1829	2,3202	2,5083	2,8188	3,1188
23	0,8575	1,0603	1,3195	1,7139	1,8316	1,9782	2,0687	2,1770	2,3132	2,4999	2,8073	3,1040
24	0,8569	1,0593	1,3178	1,7109	1,8281	1,9740	2,0639	2,1715	2,3069	2,4922	2,7969	3,0905
25	0,8562	1,0584	1,3163	1,7081	1,8248	1,9701	2,0595	2,1666	2,3011	2,4851	2,7874	3,0782
26	0,8557	1,0575	1,3150	1,7056	1,8219	1,9665	2,0555	2,1620	2,2958	2,4786	2,7787	3,0669
27	0,8551	1,0567	1,3137	1,7033	1,8191	1,9632	2,0518	2,1578	2,2909	2,4727	2,7707	3,0565
28	0,8546	1,0560	1,3125	1,7011	1,8166	1,9601	2,0484	2,1539	2,2864	2,4671	2,7633	3,0469
29	0,8542	1,0553	1,3114	1,6991	1,8142	1,9573	2,0452	2,1503	2,2822	2,4620	2,7564	3,0380
30	0,8538	1,0547	1,3104	1,6973	1,8120	1,9546	2,0423	2,1470	2,2783	2,4573	2,7500	3,0298
31	0,8534	1,0541	1,3095	1,6955	1,8100	1,9522	2,0395	2,1438	2,2746	2,4528	2,7440	3,0221
32	0,8530	1,0535	1,3086	1,6939	1,8081	1,9499	2,0369	2,1409	2,2712	2,4487	2,7385	3,0149
33	0,8526	1,0530	1,3077	1,6924	1,8063	1,9477	2,0345	2,1382	2,2680	2,4448	2,7333	3,0082
34	0,8523	1,0525	1,3070	1,6909	1,8046	1,9457	2,0322	2,1356	2,2650	2,4411	2,7284	3,0020
35	0,8520	1,0520	1,3062	1,6896	1,8030	1,9438	2,0301	2,1332	2,2622	2,4377	2,7238	2,9960
36	0,8517	1,0516	1,3055	1,6883	1,8015	1,9419	2,0281	2,1309	2,2595	2,4345	2,7195	2,9905
37	0,8514	1,0512	1,3049	1,6871	1,8001	1,9402	2,0262	2,1287	2,2570	2,4314	2,7154	2,9852
38	0,8512	1,0508	1,3042	1,6860	1,7988	1,9386	2,0244	2,1267	2,2546	2,4286	2,7116	2,9803
39	0,8509	1,0504	1,3036	1,6849	1,7975	1,9371	2,0227	2,1247	2,2524	2,4258	2,7079	2,9756
40	0,8507	1,0500	1,3031	1,6839	1,7963	1,9357	2,0211	2,1229	2,2503	2,4233	2,7045	2,9712
41	0,8505	1,0497	1,3025	1,6829	1,7952	1,9343	2,0195	2,1212	2,2482	2,4208	2,7012	2,9670
42	0,8503	1,0494	1,3020	1,6820	1,7941	1,9330	2,0181	2,1195	2,2463	2,4185	2,6981	2,9630
43	0,8501	1,0491	1,3016	1,6811	1,7931	1,9317	2,0167	2,1179	2,2445	2,4163	2,6951	2,9592
44	0,8499	1,0488	1,3011	1,6802	1,7921	1,9305	2,0154	2,1164	2,2427	2,4141	2,6923	2,9555
45	0,8497	1,0485	1,3006	1,6794	1,7911	1,9294	2,0141	2,1150	2,2411	2,4121	2,6896	2,9521
46	0,8495	1,0483	1,3002	1,6787	1,7902	1,9283	2,0129	2,1136	2,2395	2,4102	2,6870	2,9488
47	0,8493	1,0480	1,2998	1,6779	1,7894	1,9273	2,0117	2,1123	2,2380	2,4083	2,6846	2,9456
48	0,8492	1,0478	1,2994	1,6772	1,7885	1,9263	2,0106	2,1111	2,2365	2,4066	2,6822	2,9426
49	0,8490	1,0475	1,2991	1,6766	1,7878	1,9253	2,0096	2,1099	2,2351	2,4049	2,6800	2,9397
50	0,8489	1,0473	1,2987	1,6759	1,7870	1,9244	2,0086	2,1087	2,2338	2,4033	2,6778	2,9370
51	0,8487	1,0471	1,2984	1,6753	1,7863	1,9236	2,0076	2,1076	2,2325	2,4017	2,6757	2,9343
52	0,8486	1,0469	1,2980	1,6747	1,7856	1,9227	2,0066	2,1066	2,2313	2,4002	2,6737	2,9318
53	0,8485	1,0467	1,2977	1,6741	1,7849	1,9219	2,0057	2,1055	2,2301	2,3988	2,6718	2,9293
54	0,8483	1,0465	1,2974	1,6736	1,7843	1,9211	2,0049	2,1046	2,2289	2,3974	2,6700	2,9270
55	0,8482	1,0463	1,2971	1,6730	1,7836	1,9204	2,0040	2,1036	2,2278	2,3961	2,6682	2,9247
56	0,8481	1,0461	1,2969	1,6725	1,7830	1,9197	2,0032	2,1027	2,2268	2,3948	2,6665	2,9225
57	0,8480	1,0459	1,2966	1,6720	1,7825	1,9190	2,0025	2,1018	2,2258	2,3936	2,6649	2,9204
58	0,8479	1,0458	1,2963	1,6716	1,7819	1,9183	2,0017	2,1010	2,2248	2,3924	2,6633	2,9184
59	0,8478	1,0456	1,2961	1,6711	1,7814	1,9177	2,0010	2,1002	2,2238	2,3912	2,6618	2,9164
60	0,8477	1,0455	1,2958	1,6706	1,7808	1,9170	2,0003	2,0994	2,2229	2,3901	2,6603	2,9146
61	0,8476	1,0453	1,2956	1,6702	1,7803	1,9164	1,9996	2,0986	2,2220	2,3890	2,6589	2,9127
62	0,8475	1,0452	1,2954	1,6698	1,7799	1,9158	1,9990	2,0979	2,2212	2,3880	2,6575	2,9110
63	0,8474	1,0450	1,2951	1,6694	1,7794	1,9153	1,9983	2,0971	2,2204	2,3870	2,6561	2,9093
64	0,8473	1,0449	1,2949	1,6690	1,7789	1,9147	1,9977	2,0965	2,2195	2,3860	2,6549	2,9076
65	0,8472	1,0448	1,2947	1,6686	1,7785	1,9142	1,9971	2,0958	2,2188	2,3851	2,6536	2,9060
66	0,8471	1,0446	1,2945	1,6683	1,7781	1,9137	1,9966	2,0951	2,2180	2,3842	2,6524	2,9045
67	0,8470	1,0445	1,2943	1,6679	1,7776	1,9132	1,9960	2,0945	2,2173	2,3833	2,6512	2,9030
68	0,8469	1,0444	1,2941	1,6676	1,7772	1,9127	1,9955	2,0939	2,2166	2,3824	2,6501	2,9015
69	0,8469	1,0443	1,2939	1,6672	1,7769	1,9122	1,9949	2,0933	2,2159	2,3816	2,6490	2,9001
70	0,8468	1,0442	1,2938	1,6669	1,7765	1,9118	1,9944	2,0927	2,2152	2,3808	2,6479	2,8987

Table 3 : Loi du χ^2

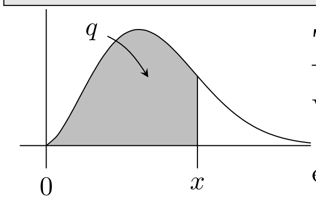
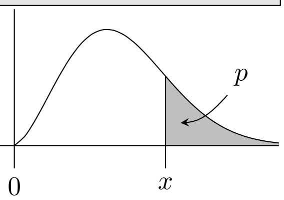


Table inverse de la loi du χ^2

Valeurs de x en fonction de q tel que $q = \mathbb{P}[\chi^2 \leqslant x]$
et de p tel que $p = \mathbb{P}[\chi^2 \geqslant x]$
en fonction du nombre de ddl du χ^2.



q	0,0025	0,005	0,01	0,02	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,9975
ddl \ p	0,9975	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0025
1	0,00001	0,00004	0,0002	0,001	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	9,141
2	0,005	0,010	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,60	11,98
3	0,045	0,072	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	9,837	11,34	12,84	14,32
4	0,145	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,14	11,67	13,28	14,86	16,42
5	0,307	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	9,236	11,07	12,83	13,39	15,09	16,75	18,39
6	0,527	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	10,64	12,59	14,45	15,03	16,81	18,55	20,25
7	0,794	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	12,02	14,07	16,01	16,62	18,48	20,28	22,04
8	1,104	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	13,36	15,51	17,53	18,17	20,09	21,95	23,77
9	1,450	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	14,68	16,92	19,02	19,68	21,67	23,59	25,46
10	1,827	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	15,99	18,31	20,48	21,16	23,21	25,19	27,11
11	2,232	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	17,28	19,68	21,92	22,62	24,72	26,76	28,73
12	2,661	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	18,55	21,03	23,34	24,05	26,22	28,30	30,32
13	3,112	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	19,81	22,36	24,74	25,47	27,69	29,82	31,88
14	3,582	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	21,06	23,68	26,12	26,87	29,14	31,32	33,43
15	4,070	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	22,31	25,00	27,49	28,26	30,58	32,80	34,95
16	4,573	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	23,54	26,30	28,85	29,63	32,00	34,27	36,46
17	5,092	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,09	24,77	27,59	30,19	31,00	33,41	35,72	37,95
18	5,623	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,86	25,99	28,87	31,53	32,35	34,81	37,16	39,42
19	6,167	6,844	7,633	8,567	8,907	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	33,69	36,19	38,58	40,88
20	6,723	7,434	8,260	9,237	9,591	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	35,02	37,57	40,00	42,34
21	7,289	8,034	8,897	9,915	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	36,34	38,93	41,40	43,78
22	7,865	8,643	9,542	10,60	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	37,66	40,29	42,80	45,20
23	8,450	9,260	10,20	11,29	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	38,97	41,64	44,18	46,62
24	9,044	9,886	10,86	11,99	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	40,27	42,98	45,56	48,03
25	9,646	10,52	11,52	12,70	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	41,57	44,31	46,93	49,44
26	10,26	11,16	12,20	13,41	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	42,86	45,64	48,29	50,83
27	10,87	11,81	12,88	14,13	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	44,14	46,96	49,64	52,22
28	11,50	12,46	13,56	14,85	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	45,42	48,28	50,99	53,59
29	12,13	13,12	14,26	15,57	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	46,69	49,59	52,34	54,97
30	12,76	13,79	14,95	16,31	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	47,96	50,89	53,67	56,33
31	13,41	14,46	15,66	17,04	17,54	19,28	21,43	41,42	44,99	48,23	49,23	52,19	55,00	57,69
32	14,06	15,13	16,36	17,78	18,29	20,07	22,27	42,58	46,19	49,48	50,49	53,49	56,33	59,05
33	14,71	15,82	17,07	18,53	19,05	20,87	23,11	43,75	47,40	50,73	51,74	54,78	57,65	60,39
34	15,37	16,50	17,79	19,28	19,81	21,66	23,95	44,90	48,60	51,97	53,00	56,06	58,96	61,74
35	16,03	17,19	18,51	20,03	20,57	22,47	24,80	46,06	49,80	53,20	54,24	57,34	60,27	63,08
36	16,70	17,89	19,23	20,78	21,34	23,27	25,64	47,21	51,00	54,44	55,49	58,62	61,58	64,41
37	17,37	18,59	19,96	21,54	22,11	24,07	26,49	48,36	52,19	55,67	56,73	59,89	62,88	65,74
38	18,05	19,29	20,69	22,30	22,88	24,88	27,34	49,51	53,38	56,90	57,97	61,16	64,18	67,06
39	18,73	20,00	21,43	23,07	23,65	25,70	28,20	50,66	54,57	58,12	59,20	62,43	65,48	68,38
40	19,42	20,71	22,16	23,84	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	60,44	63,69	66,77	69,70
45	22,90	24,31	25,90	27,72	28,37	30,61	33,35	57,51	61,66	65,41	66,56	69,96	73,17	76,22
50	26,46	27,99	29,71	31,66	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	72,61	76,15	79,49	82,66
60	33,79	35,53	37,48	39,70	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	84,58	88,38	91,95	95,34
70	41,33	43,28	45,44	47,89	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	96,39	100,4	104,2	107,8
80	49,04	51,17	53,54	56,21	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	108,1	112,3	116,3	120,1
90	56,89	59,20	61,75	64,63	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	119,6	124,1	128,3	132,3
100	64,86	67,33	70,06	73,14	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	131,1	135,8	140,2	144,3
110	72,92	75,55	78,46	81,72	82,87	86,79	91,47	129,4	135,5	140,9	142,6	147,4	151,9	156,2
120	81,07	83,85	86,92	90,37	91,57	95,70	100,6	140,2	146,6	152,2	153,9	159,0	163,6	168,1
130	89,30	92,22	95,45	99,07	100,3	104,7	109,8	151,0	157,6	163,5	165,2	170,4	175,3	179,9
140	97,59	100,7	104,0	107,8	109,1	113,7	119,0	161,8	168,6	174,6	176,5	181,8	186,8	191,6
150	105,9	109,1	112,7	116,6	118,0	122,7	128,3	172,6	179,6	185,8	187,7	193,2	198,4	203,2