I Cauchy-Lipschitz

1. Étudier l'existence et l'unicité de solutions de l'équation

$$\dot{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $f(t, 0, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Montrer que toute solution non nulle de l'équation différentielle $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ a ses zéros isolés.

3. Soient $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 et g, h deux solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$. Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que si $g(t_0) < h(t_0)$, alors $\forall t \in \mathbf{R}$, $g(t) < h(t)$.

4. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1, périodique de période T sur la première variable. Montrer que pour toute solution g de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$, la suite $(g(nT))_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement monotone ou constante, et que g est périodique dans ce dernier cas.

II Théorème de Darboux

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable. On va montrer dans cet exercice que l'image d'un intervalle par la dérivée de f est un intervalle. On propose trois méthodes pour montrer ce résultat.

1. *Preuve topologique* : Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ et

$$G = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid x < y \in I \right\}.$$

Montrer que G est connexe et que $G \subset f'(I) \subset \overline{G}$. Conclure.

2. *Pentes* : Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $y \in [f'(a), f'(b)]$. On définit deux fonctions $\varphi, \psi : I \to \mathbf{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

Montrer que $y \in \varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$ et en déduire l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $y = f'(c)$.

3. *Existence d'un maximum* : Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ telle que $g'(a) \geq 0$ et $g'(b) \leq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g'(c) = 0$. Conclure en posant $g(x) = yx - f(x)$.

III Courbe polaire

Soit Γ la courbe $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

1. Tracer cette courbe.

2. Calculer le rayon de courbure.

3. Soient I le centre de courbure en M et H le projeté orthogonal de I sur (OM). Déterminer $\overrightarrow{MH}$.

4. En déduire une construction géométrique de la développée de Γ.

IV Séries connues

1. En considérant le fonction $2\pi-$périodique valant $\pi - x$ sur $[0, 2\pi]$, démontrer que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. En considérant la fonction f 2π-périodique égale à x^2 sur [-π, π[, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

V Diracs et approximation polynomiale

Une suite $(K_n)_n$ d'applications continues positives et à support compact de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ est dite de Dirac si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \int_{\mathbf{R}} K_n(t)\mathrm{d}t = 1 \qquad (1)$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall \delta < 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geq n_0,\ 0 \leq \int_{\mathbf{R}\setminus[-\delta,\delta]} K_n(t)\mathrm{d}t \leq \epsilon \ (2)$$

Soit alors $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continue à support compact (c'est à dire nulle en dehors d'un compact de $\mathbf{R}$). On pose :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (f * K_n)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)K_n(x-t)\mathrm{D}t = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$$

1. Prouver que $(f * K_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que toute fonction continue $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions polynômes.

VI Intégrale de Dirichlet

1. Montrer que $\int_{\mathbf{R}_+} \frac{\sin t}{t}$ est semi-convergente.
2. Calcul par tranformée de Laplace :
   On considère
   $$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$
   a) Domaine de définition de F
   b) Calcul de F sur $\mathbf{R}_+^*$:
   c) Montrer que pour tout $0 < U < V$,
   $$\left|\int_U^V e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2}{U}$$
   En déduire que F est continue en zéro.
   d) Conclure
3. Lemme de Riemann-Lebesgues
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$,
   $$\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Indication: On pourra utiliser une relation entre $\sin((n-\frac{1}{2})t)$ et $\sin((n+\frac{1}{2})t)$

   b) Montrer que pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbf{C})$,
   $$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b e^{\imath\lambda t}f(t)\mathrm{d}t = 0$$
   c) En déduire que
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$
   d) Conclure

VII Géométrie

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles tangeants en A. Déterminer les point $B \in \mathcal{C}$ et $B' \in \mathcal{C}'$ maximisant l'aire de ABB'.
Indication: Comme toujours, on sera bien avisé de choisir un repère simplifiant au maximum les éventuels calculs...