I Sous groupes finis

Soient G un groupe fini, et H, K deux sous-groupes. Calculer le cardinal de $HK = \{g \in G | \exists h, k \in H \times K : g = hk\}$

II Inversibilité de matrices

Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$, non identiquement égale à 0 ou 1, telle que $\forall A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}), f(AB) = f(A)f(B)$

Montrer que $f(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est inversible

III Dimension

Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \to & \mathbf{R} \\ P & \mapsto & \int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{1+t^2} \mathrm{d}t \end{array} \right.$

Soient $x_0, \ldots, x_n$ des points distincts, montrer qu'il existe des constantes $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ telles que $\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \varphi(P) = \sum \lambda_k P(x_k)$, et expliquer comment les calculer.

Quand n est impair, montrer qu'il existe n points $x_1, \ldots, x_n$ et des constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tellesque $\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \varphi(P) = \sum \lambda_k P(x_k)$.

IV Noyau et Cône isotrope

Etant donnée une forme quadratique q sur $\mathbf{R}^n$, montrer l'équivalence entre :

(i) Le cône isotrope de q est un espace vectoriel

(ii) Le cône isotrope de q est exactement son noyau

(iii) $q \geq 0$ ou $q \leq 0$

V Coniques

Dans cette exercice, il sera sous-entendu que les coniques considérées sont propres

1. Étudier les milieux des cordes d'une conique qui sont paralèles à une direction donnée

2. Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangeantes orthogonales à une même conique.

Indication: Dans le cas des coniques à centre, on pourra montrer que les coefficients directeurs de tangeantes à $\mathcal{C}$ passant par M sont les vecteurs isotropes d'une certaine forme quadratique.

On pourra alors trouver à quelle condition une forme quadratique a deux vecteurs isotropes orthogonaux.

VI Décomposition de Bruhat

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$. On nute $\mathcal{T}_{si} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{T}_{si}$ telle que TM soit triangulaire supérieure à permutation des lignes près, c'est à dire telle qu'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$:
$\forall i, \begin{cases} (TM)_{\sigma(i),i} \neq 0 \\ \forall j < i, (TM)_{\sigma(i),j} = 0 \end{cases}$

2. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note P_σ la matrice dont les coefficients sont $p_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.
Montrer que pour toute $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, il existe $T, T' \in \mathcal{T}_{si}$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tels que $M = T' P_\sigma T$

3. Avec cette construction, l'application $M \mapsto (T', \sigma, T)$ est elle continue ?

VII Décomposition d'Iwasawa

Soit $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des matrices diagonales de tailles n avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices trigonales supérieures dont les coefficients diagonaux vallent tous 1. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_n \times \mathcal{D}_n^+ \times \mathcal{T}_n & \to & GL_n(\mathbf{R}) \\ (K, D, T) & \mapsto & KDT \end{array}$$

est un homéomorphisme
Indication: Pour la surjectivité, on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt