I Connexité

On considère une surface d'équation $z^2 + y^2 - x^4 + z \cdot y + 1 = 0$

1. Determiner ses composantes connexes

2. Cette surface est-elle reglée ?

II Paramétrages

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne : $z = x^2 - y^2$

1. Montrer que les paramétrages $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (u+v, u-v, 4 * uv) \end{array} \right.$
et $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (u \cdot \mathrm{ch}(v), u \cdot \mathrm{sh}(v), u^2) \end{array} \right.$ paramétrisent tous deux des parties de cette surface

2. Le quel paramétrise la plus grande partie de cette surface ?

3. Déterminer l'intersection de cette surface avec un plan quelconque

III Surfaces définies par des droites

(D_1) et (D_2) sont deux droites de l'espace non coplanaires.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(d(M,D1))^2 + (d(M,D2))^2 = a^2$

2. Déterminer la surface engendrée par les droites (Δ) rencontrant (D_1) et (D_2) avec des angles égaux.

IV Théorème des extrema liés

Soit E un $\mathbf{R}$-ev de dimension 3, et f et g dans $\mathcal{C}^1(E, \mathbf{R})$.
Notons $\Gamma = \{x \in E \mid g(x) = 0\}$.
Soit $x_0 \in E$: $\mathrm{d}g_{x_0} \neq 0$. Montrer que si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum en x_0, alors $\exists \lambda \in \mathbf{R} : \mathrm{d}f_{x_0} = \lambda \mathrm{d}g_{x_0}$

Remarque : Vous avez sans doute déjà utilisé en physique une généralisation de ce résulatat en dimension quelconque. Rapellons-en l'ennoncé :
Soient $f, g_1, \ldots, g_p$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ et X l'ensemble défini par : $X = x \in U; g_1(x) = \ldots = g_p(x) = 0$.
Si la restriction de f à X admet un extrémum local en a, et si les différentielles $\mathrm{d}g_1(a), \ldots, \mathrm{d}g_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes, alors il existe des

réels $c_1, \ldots, c_p$ tels que : $\mathrm{d}f(a) = c_1 \mathrm{d}g_1(a) + \ldots + c_p \mathrm{d}g_p(a)$ Ces réels $c_1, \ldots, c_p$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

V Courbure moyenne

On considère un point M d'une surface **S** de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Déterminer le rayon de courbure (en M) de l'arc défini (au voisinage de M) par l'intersection de $\mathcal{S}$ et d'un plan $\mathcal{P}$ contenant la normale N à $\mathcal{S}$ en M.
Indication: Comme toujours, on sera bien avisé de choisir un repère simplifiant au maximum les éventuels calculs...

2. Montrer que la somme des courbures des intersections de $\mathcal{S}$ avec deux plans orthogonaux $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant tous deux N est constante.

On l'appelle la courbure moyenne de $\mathcal{S}$ au point M.

3. Conaitre la courbure moyenne de $\mathcal{S}$ nous permet-il de determiner la position de $\mathcal{S}$ par rapport à son plan tangeant ?