I Cours

1. Déterminer le rayon de courbure de l'arc $\gamma(t) = (t, \int_1^\infty \frac{\ln u + 1/(ut)^2}{u} \mathrm{d}u)$

2. Pour recevoir les satellites, pourquoi utilise t'on des paraboles et non des patatoïdes de révolution ?

2'. On pourra aussi énnoncer des propriétés analogues pour d'autres coniques...

3. On se donne deux fonctions γ et τ définies sur un intervalle I. Existe t'il un arc $\Gamma : I \to \mathbf{R}^3$ tels qu'en $\Gamma(s)$ la courbure soit $\gamma(s)$ et la torsion $\tau(s)$?

II Coniques

1. On se donne une conique $(\mathcal{C})$ et une droite (D). Étudier les milieux des cordes (de $(\mathcal{C})$) qui sont parallèles à $(\mathcal{D})$

2. Montrer que si un paralélograme stricte est inscrit dans une conique, alors son centre est le centre de la conique

III Plan osculateur

Soit $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe régulière où I est un intervalle ouvert non trivial. Soit $t_0 \in I$. On suppose que la courbure de α en t_0 est non nulle. On se donne un plan (affine) P vérifiant les hypothèses suivantes :

a. $\alpha(t_0) \in P$

b. $\overrightarrow{T}(t_0) \in \overrightarrow{P}$

c. L'image de tout voisinage de t_0 dans I par α possède des points de chaque côté du plan P .

Montrer que P est le plan osculateur en $\alpha(t_0)$.

IV Courbe polaire

Soit Γ la courbe $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

1. Tracer cette courbe.

2. Calculer le rayon de courbure.

3. Soient I le centre de courbure en M et H le projeté orthogonal de I sur (OM). Déterminer $\overrightarrow{MH}$.

4. En déduire une construction géométrique de la développée de Γ.

V Théorème des extrema liés

Soit E un $\mathbf{R}$-ev de dimension 2, et f et g dans $\mathcal{C}^1(E, \mathbf{R})$.

Notons $\Gamma = \{x \in E \mid g(x) = 0\}$.

Soit $x_0 \in E : \mathrm{d}g_{x_0} \neq 0$. Montrer que si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum en x_0, alors $\exists \lambda \in \mathbf{R} : \mathrm{d}f_{x_0} = \lambda \mathrm{d}g_{x_0}$

Remarque : Vous avez sans doute déjà utilisé en physique une généralisation de ce résulatat en dimension quelconque. Rapellons-en l'ennoncé :

Soient $f, g_1, \ldots, g_p$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ et X l'ensemble défini par : $X = x \in U; g_1(x) = \ldots = g_p(x) = 0$.

Si la restriction de f à X admet un extrémum local en a, et si les différentielles $\mathrm{d}g_1(a), \ldots, \mathrm{d}g_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes, alors il existe des réels $c_1, \ldots, c_p$ tels que : $\mathrm{d}f(a) = c_1\mathrm{d}g_1(a) + \ldots + c_p\mathrm{d}g_p(a)$ Ces réels $c_1, \ldots, c_p$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

VI Courbes tracées sur une sphère

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon R et Γ une courbe paramétrée de classe C^2 tracée sur $\mathcal{S}$.

1. Montrer que le rayon de courbure en tout point de Γ est inférieur ou égal à R.

2. Déterminer les courbes Γ dont le rayon de courbure en tout point est R.

3. Déterminer les courbes Γ dont le rayon de courbure est constant.