I

Soit $A \subset \mathbf{C}$ bornée et $f \in \mathcal{C}^1(\overline{A})$, telle que $f_{|\partial A}$ soit constante. Montrer qu'alors ∇f s'annule dans $\overset{\circ}{A}$ (c'est à dire $\exists x \in \overset{\circ}{A}$: $\nabla f(x) \neq 0$)

II Études de fonctions

1. Déterminer les extrema de $x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
2. Étudier la continuité, puis la différentiabilité de

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2} \end{cases}$$

3. Déterminer les extrema locaux de

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 \to & \mathbf{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2x_3 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

4. Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \to & \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \\ S & \mapsto & S^2 \end{cases}$$

(où $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ désigne les matrices symétriques définies positives) est un difféomorphisme.

III Polynome minimal

Soit $\mu : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathbf{C}^n \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n) \end{cases}$

Montrer que le rang de $\mathrm{d}\mu$ est le degré du polynome minimal de M. En déduire que l'ensembles des matrices dont le polynome minimal est le polynome caractéristiques est ouvert.

IV Géométrie

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles tangeants en A. Déterminer les point $B \in \mathcal{C}$ et $B' \in \mathcal{C}'$ maximisant l'aire de ABB'.

V Équations différentielles

1. Solutions de $x = \frac{1}{2}tx'$
2. Étudier l'équation

$$(1-t^2)x' + tx = 0$$

3. Résoudre l'équation sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$t \cdot {x'}^2 - (1+t^3)x \cdot x' + t^2 \cdot x^2 = 0$$

Indication: On pourra étudier la quantité $(x - tx')(t^2x - x')$

VI Cauchy-Lipschitz

1. Étudier l'existence et l'unicité de solutions de l'équation

$$\dot{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{sinon} \end{cases} .$$

2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $f(t,0,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Montrer que toute solution non nulle de l'équation différentielle $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ a ses zéros isolés.

3. Soient $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 et g, h deux solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$. Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que si $g(t_0) < h(t_0)$, alors $\forall t \in \mathbf{R}$, $g(t) < h(t)$.

4. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1, périodique de période T sur la première variable. Montrer que pour toute solution g de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$, la suite $(g(nT))_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement monotone ou constante, et que g est périodique dans ce dernier cas.

VII Stabilité

Soit $\mathrm{E} : \dot{x} = f(t, x)$ une équation différentielle avec $f : I \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ telle que pour tout $(t_0, x_0) \in D$, il existe une unique solution $\phi(t, t_0, x_0)$ de E vérifiant $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$. On dit que ϕ est stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{(t_0,\varepsilon)}, \forall x_1 \in \mathbf{R}^d, \quad \|x_1 - x_0\| \leq \eta_{(t_0,\varepsilon)} \implies \forall t \geq t_0,\ \|\phi(t, t_0, x_1) - \phi(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$$

On dit que ϕ est asymptotiquement stable si elle est stable et si

$$\exists \eta_{(t_0)}, \forall x_1 \in \mathbf{R}^d, \|x_1 - x_0\| \leq \eta_{(t_0)} \implies \lim_{t\to\infty} \|\phi(t, t_0, x_1) - \phi(t, t_0, x_0)\| = 0.$$

1. Montrer que l'équation différentielle définie par

$$\mathrm{E} : \begin{cases} \dot{x} = -y\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

admet 0 pour solution stable, mais que toutes les autres solutions sont instables.

2. Montrer que la stabilité d'une solution d'une équation linéaire homogène ne dépend que de l'équation. On parlera alors d'équation homogène stable (resp. asymptotiquement stable).

3. Montrer que la stabilité d'une solution d'une équation linéaire ne dépend que de l'équation. On parlera alors d'équation stable (resp. asymptotiquement stable). Montrer qu'une équation et son équation homogène associée ont même stabilité.

4. Montrer que l'équation $\dot{x} = Ax$ est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle ≤ 0 et même < 0 si elles sont de multiplicité > 1. Montrer que l'équation est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0.

5. En étudiant l'équation

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix} x,$$

montrer qu'il n'existe pas de tel critère sur les valeurs propres lorsque les coefficients ne sont pas constants.