I Cours

1. Définition du systeme fondamental de l'équation $Y' = A(t)Y + B(t)$

2. Solutions de $x = \frac{1}{2}tx'$

3.

a) Expliciter un champ de vecteurs dont les courbes integrales sont orthogonales aux courbes integrales du champ $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$

b) Interprétation

c) En particulier, montrer que les lignes de niveaux de $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonales à celles de $\mathrm{Re}(f)$, pour f développable en série entière.

II Étude pratique

1. Étudier l'équation

$$(1-t^2)x' + tx = 0$$

2. Résoudre l'équation sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$t \cdot {x'}^2 - (1+t^3)x \cdot x' + t^2 \cdot x^2 = 0$$

Indication: L'idée est proche de celle du I.2

III Cauchy-Lipschitz

1. Étudier l'existence et l'unicité de solutions de l'équation

$$\dot{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{sinon} \end{cases} .$$

2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $f(t,0,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Montrer que toute solution non nulle de l'équation différentielle $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ a ses zéros isolés.

3. Soient $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 et g, h deux solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t,x)$. Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que si $g(t_0) < h(t_0)$, alors $\forall t \in \mathbf{R}$, $g(t) < h(t)$.

4. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1, périodique de période T sur la première variable. Montrer que pour toute solution g de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t,x)$, la suite $(g(nT))_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement monotone ou constante, et que g est périodique dans ce dernier cas.

IV Stabilité

Soit E : $\dot{x} = f(t, x)$ une équation différentielle avec $f : D \setminus I \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ telle que pour tout $(t_0, x_0) \in D$, il existe une unique solution $\phi(t, t_0, x_0)$ de E vérifiant $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$. On dit que ϕ est stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{(t_0,\varepsilon)}, \forall x_1 \in \mathbf{R}^d, \quad \|x_1 - x_0\| \leq \eta_{(t_0,\varepsilon)} \implies \forall t \geq t_0,\ \|\phi(t, t_0, x_1) - \phi(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon.$$

On dit que ϕ est asymptotiquement stable si elle est stable et si

$$\exists \eta_{(t_0)}, \forall x_1 \in \mathbf{R}^d, \|x_1 - x_0\| \leq \eta_{(t_0)} \implies \lim_{t\to\infty} \|\phi(t, t_0, x_1) - \phi(t, t_0, x_0)\| = 0.$$

1. Montrer que l'équation différentielle définie par

$$\text{E} : \begin{cases} \dot{x} = -y\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

admet 0 pour solution stable, mais que toutes les autres solutions sont instables.

2. Montrer que la stabilité d'une solution d'une équation linéaire homogène ne dépend que de l'équation. On parlera alors d'équation homogène stable (resp. asymptotiquement stable).

3. Montrer que la stabilité d'une solution d'une équation linéaire ne dépend que de l'équation. On parlera alors d'équation stable (resp. asymptotiquement stable). Montrer qu'une équation et son équation homogène associée ont même stabilité.

4. Montrer que l'équation $\dot{x} = Ax$ est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle ≤ 0 et même < 0 si elles sont de multiplicité > 1. Montrer que l'équation est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0.

5. En étudiant l'équation

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix} x,$$

montrer qu'il n'existe pas de tel critère sur les valeurs propres lorsque les coefficients ne sont pas constants.

V Contrôle

Soient I un intervale de $\mathbf{R}$ d'interieur non vide, et $F, G : I \to M_n(\mathbf{R})$ continues. On considère l'équation différentielle $\text{E}_u : \dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$ dont on veut influencer la sortie $x(t)$ par un contrôle $u(t)$. Étant donné deux points

(t_0, x_0) et (t_1, x_1), on se demande s'il existe $u : I \to \mathbf{R}^n$ tel que l'unique solution $\phi_{(u,t_0,x_0)}$ du problème de Cauchy $(\mathrm{E}_u, (t_0, x_0))$ vérifie $\phi_{(u,t_0,x_0)}(t_1) = x_1$. Si c'est le cas pour tout couple $((t_0, x_0), (t_1, x_1))$ où $t_0 \neq t_1$, on dit que le système est complètement contrôlable. On va s'intéresser ici au cas où F et G sont constantes.

1. Étude de deux exemples :

a) Montrer que le système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

n'est pas controlable (on montrera qu'il est impossible de trouver un contrôle ramenant à l'origine)

b) Montrer que le système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

est controlable.

2. Montrer que le système E_u est complètement contrôlable si et seulement si le rang de la matrice $\begin{pmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{pmatrix}$ (de taille $n \times n^2$) est n.
Indication: On pourra montrer que

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\left(G, FG, F^2G, \dots, F^{n-1}G\right) < n \quad & \Leftrightarrow \quad \exists E \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} : \forall t, {}^{\mathrm{T}}E e^{tF} G = 0 \\
& \qquad\quad \text{(utiliser Cayley Hamilton)} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists E \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} : \\
& \qquad \{\phi(u, t_0, 0)(t) \mid u : I \to \mathbf{R}^n,\ t \in I\} \subset E^{\perp} \\
& \Leftrightarrow \quad \text{le système n'est pas contrôlable.}
\end{aligned}$$

3. Montrer qu'une équation scalaire d'ordre n à coefficients constants est toujours contrôlable.