I Cours

1. **Vrai ou faux:** Toute application linéaire est sa propre différentielle
2. **Vrai ou faux:** Si T linéaire , $\forall f \in \mathcal{C}^0(E), \mathrm{d}(T \circ f) = T \circ \mathrm{d}f$

   2'. Y a t'il une réciproque ?
3. Différentielle d'un fonction composée
4. Caractérisation des applications $\mathcal{C}^1$ en dimension finie

II

Soit $A \subset \mathbf{C}$ bornée et $f \in \mathcal{C}^1(\overline{A})$, telle que $f_{|\partial A}$ soit constante. Montrer qu'alors ∇f s'annule dans $\overset{\circ}{A}$ (c'est à dire $\exists x \in \overset{\circ}{A}$: $\nabla f(x) \neq 0$)

III Études de fonctions

1. Déterminer les extrema de $x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
2. Étudier la continuité, puis la différentiabilité de

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2} \end{array} \right.$$

3. Déterminer les extrema locaux de

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 \to & \mathbf{R} & \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2x_3 - x_2 + x_3 \end{array} \right.$$

4. Montrer que l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \to & \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) & \\ S & \mapsto & S^2 \end{array} \right.$$

(où $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ désigne les matrices symétriques définies positives) est un difféomorphisme.

IV C−dérivabilité et harmonicité

1. Soit $E = \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(E,E)$ et $z \in E$. On note $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$.Montrer l'équivalence, entre

   (a) $\exists \alpha \in \mathbf{C}\ :\ \forall u \in \mathbf{C},\ \mathrm{d}f(z) \cdot u = \alpha u$

(b) $\mathrm{d}f(z)$ est une similitude

(c) $\frac{\partial f_1}{\partial x}(z) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z)$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(z) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z)$

(d) $\exists \alpha \in \mathbf{C}\ :\ \frac{f(z)-f(a)-\alpha u}{|u|} \xrightarrow[|u|\to 0]{} 0$

Dans ce cas, on dit que f est $\mathbf{C}$-dérivable.

2. Montrer que toute série entière est $\mathbf{C}$-dérivable sur son disque de convergence

3. Soit $f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{C}$-dérivable $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$.
En déduire que $\Delta(|f|^2) = 2(|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2) \geq 0$

4. En déduire que si f s'annule sur $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| = 1\}$ elle s'annule sur $\mathcal{D}^1 = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| \leq 1\}$

V Polynome minimal

Soit $\mu : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathbf{C}^n \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \dots, \mathrm{Tr}(M^n) \end{array} \right.$

Montrer que le rang de $\mathrm{d}\mu$ est le degré du polynome minimal de M. En déduire que l'ensembles des matrices dont le polynome minimal est le polynome caractéristiques est ouvert.

VI Géométrie

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles tangeants en A. Déterminer les point $B \in \mathcal{C}$ et $B' \in \mathcal{C}'$ maximisant l'aire de ABB'.