I Cours

1. lien forme hermitienne $\leftrightarrow$ forme sesquilinéaire.

2. Inégalité de Bessel - Cas d'égalité

II Majoration

Soit f $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique de moyenne nule. Montrer

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2$$

Que dire lorsqu'il y a égalité ?

III Séries connues

1. En considérant le fonction $2\pi-$périodique valant $\pi - x$ sur $[0, 2\pi]$, démontrer que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. En considérant la fonction f 2π-périodique égale à x^2 sur [-π, π[, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

IV Convolution et série de Fourier

1. Soient f et g deux fonctions réelles continues 2π-périodiques. Montrer que les fonctions $f \star g$ (convolution de f et g) et $\tau_a f$ (translation de f) définies par

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt \quad \text{et} \quad \tau_a f(x) = f(x-a)$$

sont bien définies, continues et 2π-périodiques.

2. Montrer que

$$c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g) \quad \text{et} \quad c_n(\tau_a f) = e^{ian} c_n(f).$$

3. Pour $0 < \varepsilon \leq \pi$, on définit les fonctions 2π-périodiques signal σ_ε et triangle Δ_ε par

$$\sigma_\varepsilon(x) = \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x) \quad \text{et} \quad \Delta_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right) \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x),$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A. Montrer que la fonction triangle est la convolée d'une fonction signal par elle-même. En déduire les coefficients de Fourier de la fonction triangle.

V Phénomène de Gibbs

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1$ sur $[0, \pi[$ et $f(x) = -1$ sur $[\pi, 2\pi[$.

1. Déterminer la série de Fourier de f

2. Étant donné $a \in]0, \pi/2[$, montrer que la convergence est uniforme sur $[a, \pi - a]$

Indication: On pourra déterminer préalablement $\sum_{k\geq 0}^{n-1} \sin((2k+1)t)$

3. Étudier le max sur $[0, 2\pi]$ de la somme partielle $S_n(f)$

VI Absolue convergence des coefficients de fourier

Soit $E \subset \mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques telles que de plus $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$ converge. Dans le suite, f et g désigne des éléments de E et n un entier relatif.

1. Montrer que $c_n(f \cdot g) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) c_{n-k}(g)$. En déduire que E est une $\mathbf{C}$-algèbre.

2. On définit, pour $f \in E$, $N(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$. Montrer que N est une norme d'algèbre sur E.

3. Soit $(f_p)_{p\in\mathbf{N}} \in E^N$ telle que $\sum N(f_p)$ converge. Montrer que la série de fonctions $\sum f_p$ converge normalement sur $\mathbf{R}$, et que sa somme est dans E.