I Cours

1. Espaces stables par l'adjoint d'un endomorphisme
2. Formes quadratiques définies, formes quadratiques non dégénérées.

II Intégration

Montrer que pour E préhilbertien réél, et $f \in \mathcal{C}([0,1], E)$,

$$\left\| \int f(x)\mathrm{d}x \right\| = \int \|f(x)\| \,\mathrm{d}x \Rightarrow \exists \alpha \in E, g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}^+) \ : \ f = \alpha g$$

Le résultat persiste-t'il si f est seulement supposée continue par morceaux ?

III Parité

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{R}_n[X] = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid d^\circ(P) \leq n\}$. On définit sur $\mathbf{R}_n[X]^2$ l'application

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(-t)dt.$$

Montrer qu'il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique et determiner sa signature

IV Noyau et Cône isotrope

Etant donnée une forme quadratique q sur $\mathbf{R}^n$, montrer l'équivalence entre :

(i) Le cône isotrope de q est un espace vectoriel
(ii) Le cône isotrope de q est exactement son noyau
(iii) $q \geq 0$ ou $q \leq 0$

V Grand Classique

Trouver les endomorphismes d'un espace vectoriel de dim finie qui laissent stables les hyperplans.
Indication: On pourra commencer par le montrer pour les espaces euclidiens

VI Orthogonalité

Soit E de dimension n, f bilinéaire symétrique sur E, et F un sev de E.

On définit naturellement

$$F^{\perp} = \bigcap_{x\in F} \ker f(x,\cdot)$$

Montrer :

$$\dim\, F + \dim\, F^{\perp} \geq n$$

Et si f non dégénérée sur E ou sur F,

$$\dim\, F + \dim\, F^{\perp} = n$$

VII Caractérisation

Soit E un $\mathbf{R}$-ev normé. On pose :

$$\mu(E) = \sup_{\substack{(x,y)\in E^2 \\ (x,y)\neq(0,0)}} \left(\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2} \right)$$

1. Prouver que : $1 \leq \mu(E) \leq 2$
2. Montrer que cette norme est euclidienne si et seuement si $\mu(E) = 1$

VIII Décomposition d'Iwasawa

Soit $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des matrices diagonales de tailles n avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices trigonales supérieures dont les coefficients diagonaux vallent tous 1. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_n \times \mathcal{D}_n^+ \times \mathcal{T}_n & \to & GL_n(\mathbf{R}) \\ (K,D,T) & \mapsto & KDT \end{array}$$

est un homéomorphisme
Indication: Pour la surjectivité, on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt