I Cours

1. Définition du rayon de convergence, du disque de convergence

2. Donner des ensembles où la convergence d'une série entière est simple, absolue, normale

3. Fonctions développable en série entière

II Quelques sommes

Sommer les séries entières suivantes

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cos(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2})$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$$

III Résultats classiques

1. Montrer que le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $R = 1/\text{limsup}_{n\to\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}}$.

2. **Principe des zéros isolés :**
Montrer que si les points d'annulation d'une série entière sur son disque de convergence y admettent un point d'acumulation, alors elle est nulle.
Indication: On pourra considerer l'ensemble des zéros non isolés de la série entière.

3. **Formule de Cauchy :**
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f sa somme sur son disque de convergence. Montrer que pour tout $r \in]0, R[$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int} dt$$

4. **Quotient :** Montrer que si f est DSE au voisinage de zéro et $f(0) \neq 0$ alors il en est de même pour $g = 1/f$.

IV Calcul d'une somme réélle

On cherche à calculer la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(2n+1)}$, pour $x \in \mathbf{R}$

1. Calculer le rayon de convergence de S, et calculer les sommes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in \mathbf{R}$

2. En déduire une expression de S. (pour $x \in \mathbf{R}$)

3. Nature de la série double

$$\sum_{n,k} \frac{1}{k(2k+1)} \left(\frac{1}{2n}\right)^{2k}$$

V Théorème de Liouville

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est infini. On note f la somme de cette série.

1. On suppose que f est bornée sur $\mathbf{C}$. Montrer que f est constante. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.
Indication: Pour montrer le théorème de D'alembert, on admetra que si f et g sont la somme de deux séries entières de rayons respectifs R et R' et si g ne s'annulle nul part, alors f/g est une série entière de rayon $R'' \geq \min(R, R')$

2. Plus généralement, on suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ à coefficients positifs et tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Montrer que f est un polynôme.

3. Montrer que le résultat n'est plus vrai si on ne s'intéresse qu'aux valeurs de la fonction sur l'axe réel.