I Cours

Donner des conditions (le moins stricte possibles) auxquelles les théorèmes suivants s'appliquent

1. Si une série $\sum u_n$ converge vers la somme S, alors pour toute permutation $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{N})$, $\sum u_{\varphi(n)}$ converge aussi vers la somme S

2. **Sommation par paquets :** Soit $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ croissante, et

$$v_n = \sum_{i=\psi(n)+1}^{\psi(n+1)} u_n$$

Alors $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge

II Équivalents

1. Soit $\alpha < 1$. Donner un équivalent de

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$$

2. Pour $\alpha > 1$ donner un équivalent simple de

$$R_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

3. Déterminer la convergence de la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

4. Déterminer

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$

III Convergence

1. Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum_{n>0} u_n$ où

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$$

2. Discuter en fonction des réels θ, φ la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ où

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{e^{i\cdot n\theta}}{\sqrt{n} + e^{i\cdot n\varphi}}$$

3. Plus généralement, discuter en fonction des paramètres $\theta, \varphi \in \mathbf{R}$ et $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ où

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{e^{i\cdot n\theta}}{n^\alpha + e^{i\cdot n\varphi}}$$

IV Formule de Stirling

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$$

1. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \log(u_{n+1}/u_n)$. En déduire l'existence d'un réel $k > 0$ tel que $n! \sim k\sqrt{n}n^n e^{-n}$ (pour $n \to \infty$)

2. Calculer cette constante $k \in \mathbf{R}$.
Indication: On pourra utiliser la formule de Wallis : $\frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right]^2 \to \pi$ (quand $p \to \infty$)

V Équivalents et convergence

Soit $\sum u_n$ une série à termes > 0

1.

a) Si $\sum u_n$ diverge, discuter en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série

$$\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha},\ \text{ où }\ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

b) On suppose $u_n \ll S_n$ lorsque $n \to \infty$. Exprimer en fonction de S_n un équivalent des sommes partielles (resp de restes) de la série $\sum u_n/S_n^\alpha$ lorsqu'elle diverge (resp lorsqu'elle converge).

2.

a) Si $\sum u_n$ diverge, discuter en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série

$$\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha},\ \text{ où }\ R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$$

b) On suppose $u_n \ll R_n$ lorsque $n \to \infty$. Exprimer en fonction de R_n un équivalent des sommes partielles (resp de restes) de la série $\sum u_n/R_n^\alpha$ lorsqu'elle diverge (resp lorsqu'elle converge).