I Cours

1. Dérivation sous le signe $\int$
2. Interversion de $\sum$ et $\int$

II Une série de fonctions

Soit (λ_n) une suite de réels croissante, positive, tendant vers $+\infty$
On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\lambda_n x}$

1. Justifier brièvement la définition et la continuité de f
2. Calculer $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t$

III Calcul d'intégrale

Pour $x > 0$, on pose $H(x) = \int_{\mathbf{R}_+} |\sin y| e^{-xy}\mathrm{d}y$.

1. Convergence de $H(x)$. Calculer $H(x)$ Montrer que $H(x) = \mathcal{O}(1/x^2)$.
2. Étudier de même $\int_{\mathbf{R}_+} \sin xy e^{-zy}\mathrm{d}y$
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $x > 1$, $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-xy}\frac{\sin(ty)}{e^y - 1}\mathrm{d}y = \sum_{n\geq 1}\frac{t}{t^2+(n+x)^2}$

Indication: $\frac{1}{e^y-1} = \sum \cdots$

IV Quelques intégrales à paramètre

1. Calculer $\int_{\mathbf{R}} e^{-\imath tx}e^{-t^2}\mathrm{d}t$
2. Calculer, pour tout $x \geq 0$, la valeur de l'intégrale

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}e^{-t}\mathrm{d}t$$

V Intégrale de Dirichlet

1. Montrer que $\int_{\mathbf{R}_+}\frac{\sin t}{t}$ est semi-convergente.
2. Calcul par tranformée de Laplace :
   On considère

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

a) Domaine de définition de F

b) Calcul de F sur $\mathbf{R}_+^*$:

c) Montrer que pour tout $0 < U < V$,

$$\left| \int_U^V e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \right| \leq \frac{2}{U}$$

En déduire que F est continue en zéro.

d) Conclure

3. Lemme de Riemann-Lebesgues

a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} \mathrm{d}t = \pi$$

Indication: On pourra utiliser une relation entre $\sin((n+\frac{1}{2})t)$ et $\sin((n-\frac{1}{2})t)$

b) Montrer que pour $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbf{C})$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b e^{\imath \lambda t} f(t) \mathrm{d}t = 0$$

c) En déduire que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

d) Conclure