I Dérivabilité de la limite

Pour $x \geq 0$, on considère la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

1. Quelle est la nature de cette suite ?

2. Étudier la continuité et la dérivabilité de sa somme

II Dérivabilité d'une série de fonctions

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{x}{n})$ pour $x \in \mathbf{R}^+$.

1. Définition, continuité et dérivabilité de f.

2. Montrer que $f'(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t$

3. Donner un équivalent de f en 0_+ et en $+\infty$

III Convergence d'integrales

étudier la convergence des intégralles suivantes

1.
$$\int_{]0,+\infty[} \frac{\ln(1+t^a)}{t^b} \mathrm{d}t$$

2.
$$\int_{]0,+\infty[} \cos(e^t) \mathrm{d}t$$

3.
$$\int_{]-1,+\infty[} \frac{t^2}{t+t^4} \mathrm{d}t$$

IV $\mathcal{N}_\infty$

Soit f continue et strictement positive sur $[0,1]$. Determiner

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_0^1 f^n(t) \mathrm{d}t \right]^{1/n}$$

V Calcul d'intégrale

Pour $x > 0$, on pose $H(x) = \int_{\mathbf{R}_+} |\sin y| e^{-xy} \mathrm{d}y$.

1. Convergence de $H(x)$. Calculer $H(x)$ Montrer que $H(x) = \mathcal{O}(1/x^2)$.
2. Étudier de même $\int_{\mathbf{R}_+} \sin xy e^{-zy} \mathrm{d}y$
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $x > 1$, $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-xy} \frac{\sin(ty)}{e^y - 1} \mathrm{d}y = \sum_{n \geq 1} \frac{t}{t^2 + (n+x)^2}$

VI Intégrale de Dirichlet

1. Montrer que $\int_{\mathbf{R}_+} \frac{\sin t}{t}$ est impropre.
2. Lemme de Riemann-Lebesgues

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Indication: On pourra utiliser une relation entre $\sin((n-\frac{1}{2})t)$ et $\sin((n+\frac{1}{2})t)$

   b) Montrer que pour $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbf{C})$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b e^{\imath \lambda t} f(t) \mathrm{d}t = 0$$

Indication: On pourra par exemple commencer par montrer le résultat quand f est la fonction caractéristique d'un intervalle.

   c) En déduire que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

   d) Conclure quant à la valeur de $\int_{\mathbf{R}_+} \frac{\sin t}{t}$