I Cours

1. Définir l'exponentielle et justifier sa dérivabilité.
2. Formules de Taylor.
3. Dérivées et limites de fonctions.

II Une série de fonctions

Soit (λ_n) une suite de réels croissante, positive, tendant vers $+\infty$
On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}$

1. Définition et continuité de f
2. Calculer $\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$

III Dérivabilité de la limite

Pour $x \geq 0$, on considère la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

1. Quelle est la nature de cette suite ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de sa somme

IV Théorème de Darboux

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable. On va montrer dans cet exercice que l'image d'un intervalle par la dérivée de f est un intervalle. On propose trois méthodes pour montrer ce résultat.

1. *Preuve topologique* : Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ et

$$G = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid x < y \in I \right\}.$$

Montrer que G est connexe et que $G \subset f'(I) \subset \overline{G}$. Conclure.

2. *Pentes* : Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $y \in [f'(a), f'(b)]$. On définit deux fonctions $\varphi, \psi : I \to \mathbf{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

Montrer que $y \in \varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$ et en déduire l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $y = f'(c)$.

3. *Existence d'un maximum* : Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ telle que $g'(a) \geq 0$ et $g'(b) \leq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g'(c) = 0$. Conclure en posant $g(x) = yx - f(x)$.

V Dérivabilité d'une série de fonctions

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{x}{n})$ pour $x \in \mathbf{R}^+$.

1. Définition, continuité et dérivabilité de f.
2. Montrer que $f'(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$
3. Donner un équivalent de f en 0_+ et en $+\infty$

VI Diracs et approximation polynomiale

Une suite $(K_n)_n$ d'applications continues positives et à support compact de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ est dite de Dirac si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \int_{\mathbf{R}} K_n(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{1}$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall \delta < 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geq n_0,\ 0 \leq \int_{\mathbf{R}\setminus[-\delta,\delta]} K_n(t)\mathrm{d}t \leq \epsilon \tag{2}$$

Soit alors $f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continue à support compact (c'est à dire nulle en dehors d'un compact de $\mathbf{R}$). On pose :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (f * K_n)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)K_n(x-t)\mathrm{D}t = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$$

1. Prouver que $(f * K_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.

2. Montrer que toute fonction continue $g\ :\ [0,1] \to \mathbf{R}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions polynômes.

VII Fonctions continues nulle part dérivables

1. Soit Δ la fonction 1-périodique paire définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $\Delta(x) = |x|$. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{\Delta(2^n x)}{2^n}$$

est continue et nulle part dérivable sur $\mathbf{R}$.

Indication: Pour la dérivabilité, considerer des suites de points bien choisies.

2. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout $\varepsilon, A > 0$, on pose

$$U_{\varepsilon,A} = \{f \in \mathcal{C} \mid \forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1],\ |y-x| < \varepsilon \text{ et } \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| > A\}.$$

Montrer que $U_{\varepsilon,A}$ est un ouvert dense. En considérant $(U_{\frac{1}{n},n})_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.

Indication:

- pour $f \in \mathcal{C}$ et $\delta > 0$, on considèrera la fonction $x \mapsto f(x) + \delta\sin(Nx)$ avec N bien choisi
- On admetra le théorème de Baire (c.f. poly : page 5 du chapitre II-3) qui affirme que toute intersection dénombrable d'ouverts denses (d'un espace complet) est dense.