I Conditions de théorèmes

Pour chacun des énnoncés suivant, donner des conditions (les moins restrictives possibles) dans lesquelles il est vérifié.

1. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum f(u_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} f(u_n) = f(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$

2. $\|u\| < 1 \Rightarrow (1-u)$ inversible

3.
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

4.
$$\mathcal{CM}(I) = \mathcal{C}(I) \oplus \mathcal{E}(I)$$

(où $\mathcal{CM}(I)$ et $\mathcal{E}(I)$ désignent respectivement les fonctions continues par morceaux et en escalier sur sur I.

5. $(\sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\| < \infty) \Rightarrow (\sum u_i$ converge)

II De CVS à CVU

1. Soit (f_n) une suite de fonctions d'un segment $I = [a,b]$ de $\mathbf{R}$ à valeurs dans un $\mathbf{R}$-evn E. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que toutes les fonctions f_n soient $K-$lipschitziennes.

Si (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to E$, montrer que la convergence est uniforme.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions convexes de $]a,b[$ dans $\mathbf{R}$ (où $]a,b[$ est un intervalle de $\mathbf{R}$) qui converge simplement vers une fonction $f :]a,b[\to \mathbf{R}$.

Montrer que sur tout segment $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$, la suite (f_n) converge uniformément vers f. La convergence est-elle uniforme sur $]a,b[$ tout entier ?

III Séries

On considère les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dont on appelle respectivement S_n et T_n les sommes partielles de rang n.

On suppose que u décroit et tend vers zéro et que :

$$\forall n \geq 1, v_n = n \cdot (u_n - u_{n+1})$$

1. Montrer la convergence de $\sum v_n$ lorsque $\sum u_n$ converge.
Indication: On pourra exprimer T_n à l'aide de S_n et de u_{n+1}

2. Reciproquement, si $\sum v_n$ converge, montrer que $\sum u_n$ aussi.
Indication: on pourra montrer que $\forall (n,p),\ \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+p}}{n+p} \leq (\sum_1^{\infty} v_k) \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right)$

3. En cas de convergence, comparer leurs sommes

4. En déduire, pour $\alpha > 2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

IV Exponentielle

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n : \begin{cases} \mathbf{R}^+ & \to & \mathbf{R} & \\ x & \mapsto & \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \\ x & \mapsto & 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformément sur $\mathbf{R}^+$ vers $x \mapsto e^{-x}$

2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \end{array} \right.$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers $z \mapsto e^{-z}$

V Limites uniformes de polynômes

1. Que dire d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ limite uniforme sur $\mathbf{R}$ d'une suite de fonctions polynômes (P_n) ?

2. Que dire d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ limite uniforme sur un segment $I \subset \mathbf{R}$ d'une suite de fonctions polynômes (P_n) ?

VI Type de convergence

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit l'application $u_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{n^2+x^2} \end{array} \right.$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}^+$ vers une fonction continue f, mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}^+$
Indication: $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2} \geq \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2+n^2}$

2. Montrer que la série de fonctions $\sum (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}^+$ tout entier, mais que la convergence n'est pas normale

VII Sous Espace

Soit E un s-ev de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ de dimension finie, et soit $(f_1, f_2, \dots f_p)$ une base de E.

1. Montrer qu'il existe des réels $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ tels que $\det(f_i(a_j))$ soit non nul.

2. Soit $(u_n) \in E^{\mathbf{N}}$ convergeant simplement vers u sur $\mathbf{R}$. Montrer que $u \in E$, et que la convergence est uniforme sur tout compact.