I Cours

1. Evn produit, CNS de convergence dans un evn produit

2. Caractérisations ensemblistes de la continuité

3. **Vrai ou faux:** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et $x, y \in E$ vérifiant $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors $x \in \mathrm{Vect}(y)$

4. **Vrai ou faux:** Si F est un sev de $(E, \|\cdot\|)$, et $(u_n) \in F^{\mathbf{N}}$ converge, alors $\lim u_n \in F$.

5. **Vrai ou faux:** Deux normes sont équivalentes ssi elles définissent les mêmes applications continues.

6. **Vrai ou faux:** Pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$, on peut trouver un $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que

$$\forall P \in \mathbf{C}_3[X], |P(1)| \leq \alpha \sum_{k=1}^{4} |P(k\,n)|$$

II Normes subordonées

Les applications linéaires suivantes sont-elles continues ?

Calculer leur norme subordonée, et indiquer si elle est atteinte.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & \int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$

2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t) \end{array} \right.$

   Où $\mathbf{K}[X]$ est munie de la norme : $\| \sum a_i X^i \| = \sup(|a_i|)$

3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2) & \to & (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 2y+3x \end{pmatrix} \end{array} \right.$

III Condition suffisante de continuité

Soient E et F deux evn et $f : E \to F$. On suppose que f est bornée sur $\overline{\mathrm{B}_E(0,1)}$, et additive sur E (c'est à dire que $\forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y)$).

Montrer que f est continue.

IV Continuité sur des suites

On munit le $\mathbf{R}-$ev E des des suites réelles tendant vers 0 de la norme $\| u \| = \sup_n |u_n|$.

On définit $f : E \to \mathbf{R}$ par

$$f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

Montrer que f est linéaire continue, déterminer sa norme et si elle est atteinte

V Norme sur $\mathcal{C}([0,1])$

Soit $\sum a_n$ une série convergente ($a_n \geq 0$) et soit (t_n) une suite d'éléments de $[0,1]$. Pour $f \in E = \mathcal{C}([0,1])$, on pose

$$N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot |f(t_n)|$$

1. Donner une CNS pour que N soit une norme sur E.
2. Dans ce cas, la comparer à $\|\cdot\|_\infty$ et à $\|\cdot\|_1$

VI Composée de fonction et de distance

Soit (E,d) métrique, et $\phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ concave, continue en 0, avec $\phi^{-1}\{0\} = \{0\}$.

Montrer que $\phi \circ d$ est une distance sur E définissant la même topologie (c'est à dire les mêmes ouverts) que d.

VII Jauge d'un convexe

Soit $\mathcal{C}$ un convexe borné de $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$, contenant 0 dans son intérieur. Pour $x \in \mathbf{R}^n$, on pose $j(x) = \inf\{\alpha > 0 | x/\alpha \in \mathcal{C}\}$. On appelle j la jauge du convexe $\mathcal{C}$.

1. Montrer que : •$\forall \lambda \geq 0, j(\lambda x) = \lambda j(x)$
   •$j(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   •$j(x+y) \leq j(x) + j(y)$

   Est-ce une norme ?
2. Montrer que : $\overset{\circ}{\mathcal{C}} = \{x \mid j(x) < 1\}$ et $\overline{\mathcal{C}} = \{x \mid j(x) \leq 1\}$
3. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_*^+)^2$ tel que
$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \alpha j(x) \leq \| x \| \leq \beta j(x)$$
4. En déduire que deux compacts convexes de $\mathbf{R}^n$ d'intérieur non vide sont homéomorphes (c'est à dire "reliés par un bijection bicontinue")

VIII Topologie sur les matrices

Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (où $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$)

1. Les matrices de rang $r \leq r_0$ (où $r_0 < n$)
2. Les matrices diagonales
3. Les matrices inversibles diagonalisables