I Diagonalisation

Diagonaliser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

II Convergences

Déterminer la nature des séries suivantes

1. $u_n = \frac{e^{in\alpha}}{n^\alpha}$
2. $u_n = \ln(n)^{-\ln(n)}$
3. $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n-\ln(n)}$
4. $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
5. $u_n = \text{Arccos}\sqrt{1-\frac{1}{n^\alpha}}$
6. $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right)$

III Somme

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$.

1. $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
2. $u_n = \frac{\sin(n\alpha)}{2^n}$
3. $u_n = \frac{n}{2^n}$

IV Théorème de Césaro

1. Étant donné $u_n \to L$, étudier la convergence pour $\alpha > 0$ de

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha u_k$$

Indication: On pourra utiliser le théorème Césaro

2. Étudier de même la convergence de

$$c_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

V Série de $e^{e^{\cdot}}$

1. Soit $p \in \mathbf{N}$. Justifier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$. On note a_p sa somme.

2. Montrer que $a_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k$

3. Montrer que la série $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p}{p!} x^p$ converge quelque soit x dans $\mathbf{R}$.

VI Amélioration de la règle de d'Alembert

On considère une série $\sum u_n$ où $u_n > 0$ telle que

$$\exists \alpha : \ \forall n, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

1. Determiner un équivalent de u_n.
Indication: On pourra étudier $v_n = \ln(u_n)$

2. En déduire la convergence de $\sum u_n$

VII Inégalité de Carlemann

Soit $u_n \geq 0$ telle que $\sum u_n$ converge. On pose $v_n = (u_1 \ldots u_n)^{1/n}$

1. On pose $w_n = \sum_{p=1}^{n} p \cdot u_p$. Montrer que $v_n \leq \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \frac{1}{n} w_n$ pour tout $n \geq 1$.

2. Montrer que $(n+1) \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \leq e$ pour tout $n \geq 1$.

3. Faire une transformation d'Abel sur $\sum_{n=1}^{N} w_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

4. En déduire la convergence de $\sum v_n$ et un majorant de la somme