I Cours

1. Stabilité par u de $\text{Im}\,(P(u))$ et $\text{Im}\,(P(u))$
2. Théorème de décomposition des noyaux
3. Spectre d'un endomorphisme
4. Polynome caractéristique
5. Définition et caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable
6. Réduction simultanée

II Indépendance d'image et noyau

Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$.

1. Montrer l'équivalence des trois conditions :

$$\mathbf{K}^n = \text{Im}\,(A) \oplus \text{Ker}\,(A)\,, \quad \text{Ker}\,(A) = \text{Ker}\left(A^2\right), \quad \text{Im}\,(A) = \text{Im}\left(A^2\right).$$

2. Donner une CNS sur le polynôme minimal de A pour que ces trois conditions soient réalisées.

III Éléments propres

Déterminer les éléments propres de la matrice réélle :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

IV Matrices positives de Frobenius

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ est une matrice, on note $A \geq 0$ si $a_{i,j} \geq 0$ pour tout (i,j), $A > 0$ si $A \geq 0$ et $A \neq 0$, et on note $A \gg 0$ si $a_{i,j} > 0$ pour tout (i,j).

Enfin, si A et B sont deux matrices de même taille, on note $A \geq B$ (resp $A > B$, resp $A \gg B$) si $A - B \geq 0$ (resp $A - B > 0$, resp $A - B \gg 0$).

On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A \gg 0$.

1. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ tels que $X > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Montrer que l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{R} | (\exists X \in \mathcal{S}), AX \geq \lambda X\}$$

est majoré ,et que sa borne supérieure λ_0 est une valeure propre associée à un vecteur propre $X \gg 0$
Indication: On pourra commencer par montrer que $\sup \Lambda \in \Lambda$.
Pour la valeur propre, on pourra montrer que $X > 0 \Rightarrow AX \gg 0$.

2. Si $\lambda \neq \lambda_0$ et une autre valeur propre de A, montrer que $|\lambda| < \lambda_0$.

V Exemple de matrice nilpotente

Soit $A \in M_{3n}(\mathbf{R}) : A^3 = 0$ et $rang(A) = 2n$. Mq :

$$\exists P \in GL_{3n}(\mathbf{R}) : A = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix} P$$

VI Spectre et polynomes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbf{C}$ev de dimension n.

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Déterminer le spectre de $P(u)$.
2. On suppose u^2 diagonalisable. Donner un CNS pour que u soit diagonalisable.

VII Endomorphisme sur les matrices

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})) : X \mapsto AX - XB$

1. Soit λ une valeur propre de u et M un vecteur propre associé.
   a) Montrer que pour tout polynome $P : P(A) \cdot M = M \cdot P(\lambda \mathrm{I} + B)$
   b) En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp}\,(A) \times \mathrm{Sp}\,(B)$ tel que : $\lambda = \alpha - \beta$
2. Enoncer et démontrer la réciproque, en considérant la matrice $X \cdot {}^tY$, où X est vecteur propre de A et Y vecteur propre de ${}^tB$.