I Cours

Soit E de dimension finie.

1. Définir la trace de $u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Définir de même son rang.
3. CNS pour que deux matrices soient équivalentes.
4. Définir le determinant d'un famille de vecteurs.
5. Définir le déterminant de $u \in \mathcal{L}(E)$.
6. CNS pour qu'un endomorphisme soit inversible.
7. déterminer $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \dots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \dots & {a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \dots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix}$

II Matrices Stochastiques

Une matrice réelle A est dite stochastique si

$$\forall i,j,\ 0 \leq a_{i,j} \leq 1 \tag{1}$$

$$\forall j,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1 \tag{2}$$

On note alors $a_i = \min(a_{i,j})_j$ et $A_i = \max(a_{i,j})_j$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique
2. Montrer que si A est stochastique et $B = A^2$, alors $\forall (i,j)\ a_i \leq b_{i,j} \leq A_i$

III Inversibilité

Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$: $\forall i,\ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} a_{i,j}$
Montrer que A est inversible

IV Classique

Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $H \cap GL_n(\mathbf{R}) \neq \emptyset$
Indication: Montrer que les formes linéaires sur $M_n(\mathbf{R})$ sont exactement les $M \mapsto Tr(AM)$.

On pourra aussi se ramener à $A = J_r$

V Déterminant

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$

VI Trace

1. Sur $E = M_n(\mathbf{C})$, déterminer les formes linéaires f vérifiant : $\forall A, B, f(AB) = f(BA)$

1'. Déterminer de même les formes telles que $\forall A, B, f(ABC) = f(CBA)$

VII Déterminants

Soient $(a_1, a_2, \dots a_n)$ des entiers, montrer que $\prod_{i<j}(j-i)$ divise $\prod_{i<j}(a_i - a_j)$.

Indication: On posera L_i (resp M_i) les polynomes interpolants $\{(a_j, \delta_{i,j})\}$ (resp $\{(j, \delta_{i,j})\}$), et on exprimera les determinant des changements de bases entre la base canoniques et les L_i (resp M_i)

VIII Décomposition d'Iwasawa

Soit $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des matrices diagonales de tailles n avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices trigonales supérieures dont les coefficients diagonaux vallent tous 1. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_n \times \mathcal{D}_n^+ \times \mathcal{T}_n & \to & GL_n(\mathbf{R}) \\ (K, D, T) & \mapsto & KDT \end{array}$$

est un homéomorphisme

Indication: Pour la surjectivité, on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt