I Interpolation

1. **Cours :** Rappeler ce qu'est un polynôme d'interpolation de Lagranges et justifier les resultats d'existence et d'unicité, ainsi que l'expression explicite du polynôme d'interpolation de Lagrange.

2. Soient $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$, et $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynome $P \in \mathbf{R}_{2n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ P(x_i) = f(x_i) \text{ et } P'(x_i) = f'(x_i)$$

3. On pose $Q_j(x) = \prod_{k\neq j}(x - x_k)^2$. Montrer que

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(1 - (x - x_j)\frac{Q_j'(x_j)}{Q_j(x_j)} \right) f(x_j) + (x - x_j)f'(x_j) \right] \frac{Q_j(x)}{Q_j(x_j)}$$

II Intersection d'hyperplans

Étant donné des formes linéaires φ_i, que dire d'une forme linéaire φ dont le noyau inclut $\cap \mathrm{Ker}(\varphi_i)$?

III Endomorphisme en dimension finie

Soit E de dimension finie et F et G des sous espaces vectoriels de E.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}(u) = F$ et $\mathrm{Im}(u) = G$.

IV Rang

Soit E de dimension $n < \infty$ et $f,\ g \in \mathcal{L}(E)$, tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ avec $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$.

Montrer que f et g sont des projecteurs.

V Dualité

Soit E un $\mathbf{R}$-EV de dimension n et $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ p formes linéaires sur E. Mq :

$$(f_i)_{1\leq i\leq p} \text{ libre } \Leftrightarrow \forall(\lambda_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbf{R}^p, \exists x \in E : \forall i \in [1..p],\ f_i(x) = \lambda_i$$

VI Dimension dénombrable

Montrer que si un espace vectoriel E admet une base infinie dénombrable, toutes ses bases sont infinies dénombrables.

VII Classique !

Déterminer les endomorphismes stabilisant tous les hyperplans

VIII Projecteurs

Soient p et q des projecteurs, et $r = p^2 + q^2$.

1. On pose $r = p + q$. Mq : r projecteur $\Leftrightarrow pq = qp = 0$.

2. Déterminer alors $\mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Im}(r)$ (à l'aide de l'image et du noyau de p et q évidemment !).

3. On suppose que : $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$. Montrer que r est un projecteur et déterminer $\mathrm{Im}(r)$ et $\mathrm{Ker}(r)$.

IX Racine cubique de l'identité

Soient E un $\mathbf{R}$-EV de dimension quelconque et $u \in L(E) : u^3 = Id_E$. On pose : $v = u - Id_E$.

1. Montrer que $u \in GL(E)$

2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(v) \oplus \mathrm{Ker}\,\left(u^2 + u + Id_E\right)$

3. $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id_E)$

X Polynomes

Dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ soit Δ l'endomorphisme $P(X) \mapsto P(X+1) - \mu P(X)$.

1. Determiner son noyau, son image et ses valeurs propres.

2. Montrer que $\forall P \in \mathbf{R}_{n-1}[X],\ \exists (\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbf{R}^n :\ P(X+n) = \sum \alpha_i P(X+i)$