Théories NIP

Pierre Simon
sous la direction d'Élisabeth Bouscaren

10 juin 2008

Table des matières

Introduction

On se propose dans ce mémoire de rendre compte de l'étude des théories sans la propriété d'indépendance (ou théories NIP) telle qu'elle est développée dans [HruPetPil] et [HruPil].

Les théories NIP peuvent être considérées comme une généralisation à la fois des théories stables et o-minimales. En plus de celles-ci, les théories C-minimales, et certaines théories de corps valués sont NIP.

Il a été constaté, lors de l'étude des théories simples, que le phénomène de stabilité était la somme de deux choses. D'une part le fait que la non-déviation donne une notion d'indépendance, et d'autre part le fait qu'un type n'admet qu'un nombre borné d'extensions non-déviantes. Le premier phénomène peut se produire indépendamment du deuxième : il est maintenant associé à la simplicité. Le deuxième comportement est lié à l'absence de la propriété d'indépendance. Les théories NIP apparaissent ainsi comme en quelque sortes orthogonales aux théories simples : une théorie simple et NIP est stable, et réciproquement.

Le but des articles sus-cités est d'appliquer des méthodes s'apparentant à la stabilité dans le cas des théories NIP. Ils s'en servent ensuite pour résoudre une conjecture sur les groupes définissables dans les théories o-minimales dont nous ne parlerons pas.

Une nouvelle notion, généralisation de la notion de type, fait son apparition : celle de *mesure de Keisler*. Il s'agit en fait rien de plus qu'une mesure borélienne régulière sur l'espace des types $\mathsf{S}(\mathsf{A})$. Elles avaient été introduites initialement par Keisler dans [Kei] qui montrait que leur utilisation permettait de recouvrer des résultats de stablilté dans les théories NIP. Seulement cela n'avait pas donné des résultats satisfaisants et elles n'ont plus été utilisées avant [HruPetPil].

Les mesures interviennent ici notamment à travers les mesures invariantes. Si p est un type sur A, les extensions A-invariantes de p jouent le rôle dans les théories NIP des extensions non-déviantes dans les théories stables. Elles ont été utilisées dans l'étude des corps valués algébriquement clos ([HasHruMac1, HasHruMac2]). Tout type p n'admet pas d'extension invariante, mais on peut par contre toujours obtenir, en moyennant les extensions non-déviantes de p, une mesure A-invariante étendant p.

Les mesures invariantes seront surtout utiles dans l'étude des groupes. Dans ce contexte, une mesure invariante est une mesure invariante sous l'action du groupe, à l'instar de la mesure de Haar d'un groupe compact. On montre l'existence et l'unicité de mesures invariantes pour certains groupes, dits *fsg*.

Résumons l'organisation de ce mémoire :

Dans le premier chapitre, on rappelle des résultats généraux de théories des modèles, notamment sur le comportement de la déviation et des relations d'équivalence bornées en dehors du cas stable.

Le deuxième chapitre introduit les théories NIP. Le troisième définit les mesures et donne des idées de construction de mesures invariantes.

Le chapitre 4. est consacré à l'étude de phénomènes locaux de stabilité. On y parle notamment de types génériquement stables : types dans une théorie NIP se comportant comme des types d'une théorie stable.

Ces types sont parfois inexistants (ex. dans les théories o-minimales), mais on peut trouver alors des mesures génériquement stables (on retrouve l'intuition de Keisler : même si les types se comportent mal, les mesures se comportent bien). Le chapitre 5. est consacré à la présentation d'un point de vue différent sur les mesures qui permet d'étudier de tels objets. On y résout aussi le problème de l'unicité de la mesure invariante pour les types fsg.

On aborde le cas des groupes dans le chapitre 6., où une preuve un peu simplifiée de l'unicité de la mesure invariante est présentée.

Enfin, on donne dans le chapitre 7., en guise d'appendice, des démonstrations du caractère NIP de certaines théories de corps valués.

Chapitre 1

Quelques résultats généraux

Dans tout ce qui suit, T désigne une théorie complète du premier ordre sur un langage L. On travaille dans un modèle $\bar{M}$ saturé de cardinal inaccessible $\bar{\kappa}$. Tout ensemble de cardinal strictement inférieur à $\bar{\kappa}$ est dit *borné*. Un type sur $\bar{M}$ est appelé type global. Les lettres $x, y, a, b \dots$ désignent des *uplets* (finis) de variables ou d'éléments de $\bar{M}$. On écrira quand même $a \in \bar{M}$ au lieu de $a \in \bar{M}^n$.

Les lettres majuscules $A, B \dots$ désignent en général des ensembles bornés ; M et N désigneront toujours des modèles (bornés).

§1.1 Suites indiscernables

Définition 1.1.1. Soit A un ensemble de paramètres. Une suite infinie (a_i) est dite *A-indiscernable* si pour tous $i_1 < ... < i_n$ et $j_1 < ... < j_n$, on a

$$tp(a_{j_1}, ..., a_{j_n}/A) = tp(a_{i_1}, ..., a_{i_n}/A).$$

Si $A = \emptyset$, on parle simplement de suite indiscernable.

Remarque 1.1.2. Étant donnée une suite indiscernable $(a_i)_{i<\omega}$, on peut, par compacité, la prolonger en une suite arbitrairement longue $(a_i)_{i<\lambda}$ indiscernable.

La notion de suite indiscernable n'est pertinente que pour des suites infinies. Une suite finie indiscernable n'a aucune raison de se prolonger en une suite infinie (prendre deux éléments algébriques distincts). Voir plus loin la discussion sur les types forts de Lascar.

Le lemme suivant est une application du théorème d'Erdös-Rado, lui-même généralisation du théorème de Ramsey. Il sera notre unique outil pour construire des suites indiscernables.

Lemme 1.1.3. *Soit A un ensemble borné, alors il existe $\xi < \bar{\kappa}$ tel que, étant donné une suite $(a_i)_{i<\xi}$, on peut construire une autre suite $(b_j)_{j<\omega}$ A-indiscernable tel que pour tout $j_1 < \cdots < j_n$, il existe $i_1 < \cdots < i_n$ tels que $(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) \equiv_A (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$.*

Une suite indiscernable (a_i) est dite *totalement indiscernable* si pour tous $i_1, ..., i_n$ et $j_1, ..., j_n$ (pas nécessairement ordonnés), on a

$$tp(a_{j_1}, ..., a_{j_n}/A) = tp(a_{i_1}, ..., a_{i_n}/A).$$

Elle est dite *insécable* s'il n'existe pas de b, de formule $\phi(x, y)$ et de suite strictement croissante d'indices $(k_i, i < \omega)$ tels que :

$$\neg(\phi(a_{k_i}, b) \leftrightarrow \phi(a_{k_{i+1}}, b)) \text{ pour tout } i.$$

Étant donnée une suite insécable $I = (a_i)$ et un ensemble A de paramètres, on peut définir $Lim(I/A)$ le type limite, ou moyen, de I par : $\phi(x, b) \in I \Leftrightarrow (\exists N, \forall k > N, \models \phi(a_k, b))$. Il est souvent noté $\mathrm{Moy}(I/A)$, mais nous adoptons ici une notation qui sera cohérente avec la notion équivalente pour les mesures.

On verra que dans une théorie NIP, toutes les suites indiscernables sont insécables.

Si une suite *totalement* indiscernable $I = (a_i)$ est insécable, alors pour toute formule $\phi(x, b)$, la valeur de vérité de $\phi(a_i, b)$ est la même pour tous les i, sauf éventuellement un nombre fini $N_{\phi,b}$. Par compacité, il existe N_ϕ qui majore tous les $N_{\phi,b}$. On a donc pour tout b :

$$\phi(x, b) \in \mathrm{Lim}(I/\bar{M}) \Leftrightarrow \bigvee_{w \subset 2N_\phi, |w|=N_\phi} \bigwedge_{i \in w} \phi(a_i, b).$$

En particulier, on remarque que le type $\mathrm{Lim}(I/\bar{M})$ est définissable sur I.

1.1.1 Types de Lascar

Si $A \subseteq B$, on note $\mathrm{Aut}_A(B) = \mathrm{Aut}(B/A)$ le groupe d'automorphismes de B qui fixent A point par point.

Définition 1.1.4. Soit A un ensemble de paramètres, on note $\mathrm{Autf}_A(\bar{M})$ le sous-groupe (distingué) de $\mathrm{Aut}(\bar{M})$ engendré par les $\mathrm{Aut}_M(\bar{M})$, pour M modèle contenant A.

On dit que deux uplets a et b ont même *type de Lascar* sur A, s'ils sont conjugués par $\mathrm{Autf}_A(\bar{M})$. On note momentanément $a \sim_L b$ (A est fixé et sous-entendu).

Définition 1.1.5. On note $\sim_I$ la relation d'équivalence engendrée par "être deux éléments d'une suite infinie indiscernable sur A".

Définition 1.1.6. Une relation d'équivalence E (sur des uplets de $\bar{M}$) est dite A-*invariante* si pour tout $x, y \in \bar{M}$, et pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}_A(\bar{M})$, on a : $xEy \Leftrightarrow \sigma x E \sigma y$ (*i.e.*, le fait que x et y soient congrus modulo E ne dépend que de $\mathrm{tp}(x, y/A)$).

Elle est dite *bornée* si elle a un nombre borné de classes d'équivalence.

Proposition 1.1.7. *Les relations $\sim_L$ et $\sim_I$ sont égales, A-invariantes, bornées, et sont la plus fine telle relation d'équivalence.*

Preuve. Que ces relations d'équivalence soient A-invariantes est clair. Si M contient A, il n'y a pas plus de classes d'équivalence pour $\sim_L$ que de types sur M. Cette relation est donc bornée. De plus, si on prend un nombre non borné d'uplets de $\bar{M}$, on peut par Erdös-Rado en extraire une suite A-indiscernable. Ils ne peuvent donc être dans des classes d'équivalence différentes pour $\sim_I$. Ceci assure que $\sim_I$ est bornée.

Considérons E une relation d'équivalence A-invariante. Si (a_i) est une suite indiscernable, alors soit pour tout $i < j$, $a_i E a_j$, soit pour tout $i < j$, $\neg(a_i E a_j)$. Supposons de plus E bornée. Le deuxième cas est alors exclus car on peut prolonger la suite arbitrairement loin ce qui donnerait un nombre non borné de classes d'équivalences. Ainsi, $a \sim_I b$ implique aEb.

En particulier, $\sim_I$ est plus fine que $\sim_L$.

Enfin, supposons que a et b ont même type sur un modèle M contenant A. Considérons un modèle M' très saturé contenant M. On place M' de telle sorte à ce que $\mathrm{tp}(M'/Mab)$ cohérite de sa restriction à M (voir section suivante). Dans M' on peut trouver c tel que $a \sim_I c$. Par M-invariance de $\mathrm{tp}(M'/Mab)$, on a aussi $b \sim_I c$ et ainsi $a \sim_I b$.

Ceci achève la preuve. □

On notera dorénavant $\mathrm{Lstp}(a/A) = \mathrm{Lstp}(b/A)$ pour $a \sim_L b$.

Il est immédiat que si $A = M$ est un modèle, les types de Lascar sur M coïncident avec les types sur M.

Comme il est expliqué en 1.3, le groupe $\mathrm{Autf}(\bar{M})$ est un groupe compact, qu'on peut considérer comme un groupe de Galois de la théorie T. On vérifie aisément qu'en prenant pour T la théorie des corps algébriquement clos, on tombe sur $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

Exemple 1.1.8. *Si T est stable, les types de Lascar sur A coïncident avec les types forts sur A (*i.e.*, les types sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$).*

§1.2 Déviation de types

1.2.1 Fils invariants

Soient $M \subseteq N$ deux modèles, et $q \in S(N)$, $p := q|_M$. On dit que q est un *fils invariant* de p si q est M-invariant.

Soient $M \subseteq N$ deux modèles, et $q \in S(N)$, $p := q|_M$. On dit que q est un *cohéritier* de p si q est adhérent dans $S(N)$ aux types réalisés dans M.

Si $p \in S(M)$, p admet au moins un cohéritier à N (par compacité). Plus généralement, si $M \subseteq N \subseteq P$, $q \in S(N)$ cohéritant de sa restriction à M, alors q admet un fils sur P qui cohérite de sa restriction à M.

On voit qu'un cohéritier est un fils invariant.

Soient $M \subseteq N$ avec N $|M|^+$-saturé et $q \in S(N)$ un fils spécial de sa restriction p à M. La situation est la suivante : à toute formule $\phi(x, y)$ (où x est de la bonne taille) est associé un sous ensemble $d\phi_q$ de $S(M)$ vérifiant :

$$\forall b \in N(q \vdash \phi(x, b) \Leftrightarrow tp(b/M) \in d\phi_q).$$

(Remarquer que l'hypothèse de saturation sur N assure que $d\phi_q$ est uniquement défini.) Pour toute extension P de N, on peut utiliser le schéma de définition $d\phi_q$ pour définir un type r sur P. Le r ainsi défini est l'unique fils invariant de p à P qui étende q.

On notera $q|_P := r$, l'extension invariante de q à P.

La donnée d'un type global M-invariant est ainsi équivalente à la donnée d'un schéma de définition de la forme $d\phi_q$.

R*emarque* 1. Il est naturel à ce point de s'interroger sur la nature topologique des $d\phi_q$. On peut se convaincre en prenant par exemple pour T la théorie du graphe aléatoire que ces ensembles sont en général quelconques. Par contre si T est stable, q est définissable et les $d\phi_q$ sont des ouverts-fermés. Le degré de complexité supérieur auquel on peut s'attendre est celui où les $d\phi_q$ sont des combinaisons booléennes finies de fermés de $S(M)$. On verra que c'est ce qui se passe lorsque T est NIP.

1.2.2 Suites de Morley

Soit p un type global M-invariant et $q \in S(\bar{M})$. On peut définir le produit $p \ltimes q$ de la manière suivante : On réalise q par b puis $p|_{\bar{M}b}$ par a. On pose $p \ltimes q := tp(ab/\bar{M})$. On définit aussi $q \rtimes p := tp(ba/\bar{M})$.

On peut en particulier définir les puissances $p^{(n)}$ par récurrence (attention à l'ordre) : $p^{(1)} := p$, $p^{(n+1)} := p^{(n)} \rtimes p$.

Enfin. $p^{(\omega)}$ est le type en une infinité de variables correspondant à l'union des $p^{(n)}$.

Remarquer que les $p^{(n)}$ sont aussi M-invariants.

Une réalisation de $p^{(\omega)}|_M$, ou toute suite indiscernable étendant une telle suite, est appelée *suite de Morley* de p sur M.

Exercice 1.2.1. *Une suite de Morley sur M d'un type p M-invariant est une suite M-indiscernable.*

Les notions précédentes ne sont définies que pour des types sur des modèles. Si A est un ensemble quelconque de paramètres, la notion de type A-invariant est trop forte (elle n'est pas vérifiée par les types algébriques par exemple). À la place, on considérera les types $\mathrm{Autf}(A)$-invariants. C'est à dire les types admettant un schéma de définition $d\phi$, où les $d\phi$ sont cette fois des parties de l'ensemble des types de Lascar sur A.

R*emarque* 2. L'ensemble des types de Lascar sur A n'est pas a priori muni d'une topologie et on ne peut se poser la question de la nature topologique des $d\phi$. On verra par contre que dans le cas NIP, ces types coïncident avec les types compacts. L'espace des types compacts est un espace compact et, à nouveau, dans le cas NIP, les $d\phi$ seront des combinaisons booléennes finies de fermés.

R*emarque* 3. Hrushovski définit (par exemple dans sa thèse) un type fort p comme étant une fonction qui a tout $A \subseteq \bar{M}$ associe un type $p|_A$ sur A tel que si $A \subseteq B$, alors $p|_B$ étend $p|_A$. Définissons les types forts *basés sur* A comme étant les types forts p tels que pour tout B, $p|_B$ ne dévie pas sur A. Alors pour une théorie T stable les types forts basés sur A coïncident avec les types sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$. Dans le cas général, ils correspondent aux types de Lascar sur A. On verra que dans le cas NIP, ils se réduisent aux types compacts sur A.

1.2.3 Déviation

Cette section est largement inspirée de [Wag].

On prend A un ensemble de paramètres.

Définition 1.2.2. Une formule $\phi(x, b)$ *se divise sur* A s'il existe une suite $(b_i)_{i<\omega}$ A-indiscernable avec $b_0 = b$ et telle que l'ensemble de formules $\{\phi(x, b_i), i < \omega\}$ soit inconsistant.

Un type partiel q *dévie sur* A s'il existe des formules $\phi_1(x, b_1), \ldots, \phi_n(x, b_n)$ qui se divisent sur A et telles que : $q \vdash \bigvee_{k=1}^{n} \phi_k(x, b_k)$.

Remarquer que dans la définition de la déviation, les paramètres des ϕ_k peuvent être en dehors de l'ensemble de définition de q ; et q, même s'il est complet, ne prouve pas nécessairement un des ϕ_k (voir l'exemple 1.2.5).

Exemple 1.2.3. *Un type global M-invariant ne dévie pas sur M.*
Plus généralement, un type global $\mathrm{Autf}(A)$-invariant est non-déviant sur A.

Exemple 1.2.4. *On prend pour T la théorie des ordres denses, M un modèle de T, et $a \in M$. On considère le type p sur M correspondant à la coupure a^+ ($p \vdash x < b \leftrightarrow b > a$). Soient N une extension de M et $q \in S(N)$ un fils de p. Alors q dévie sur M si et seulement s'il existe $b_1, b_2 \in N$ tels que $tp(b_1/M) = tp(b_2/M) = a^+$ et $q \vdash b_1 < x < b_2$.*

Exemple 1.2.5. *On prend $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est une relation ternaire et M le cercle unité où on a $R(x, y, z)$ si et seulement si y est dans le petit arc joignant x à z. Soit p l'unique élément de $S_1(\emptyset)$ et soient a, b, c trois points équidistants de M, alors $p \vdash R(a, x, b) \vee R(b, x, c) \vee R(c, x, a)$. Or on peut vérifier (s'inspirer de l'exemple précédent) que les formules $R(a, x, b)$, $R(b, x, c)$ et $R(c, x, a)$ se divisent sur $\emptyset$. Par conséquent, p dévie sur $\emptyset$.*

En dehors du cas stable (ou simple) la déviation peut avoir un comportement pathologique. Commençons par donner les propriétés qui sont toujours vraies avant d'attirer l'attention du lecteur habitué au contexte stable sur tout ce qui n'est pas valable en général.

Proposition 1.2.6.
1. *Un type partiel p dévie sur A si et seulement s'il existe une formule $\phi(x)$ impliquée par p qui dévie sur A.*
2. *Si $p \in S(M)$, M un modèle, alors p ne dévie pas sur M.*
3. *Soient $A \subseteq B \subseteq C$. Si $tp(a/C)$ ne dévie pas sur A, alors il ne dévie pas sur B et $tp(a/B)$ ne dévie pas sur A.*
4. *Soit p un type partiel qui ne dévie pas sur A, alors p admet une extension en un type global qui ne dévie pas sur A.*

Proposition 1.2.7. *Pour une théorie* T *fixée, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

symétrie *Pour tous* A, a, b*,* $tp(a/Ab)$ *ne dévie pas sur* A *si et seulement si* $tp(b/Aa)$ *ne dévie pas sur* A*.*

transitivité *Pour tous* $A \subseteq B \subseteq C$ *et tout* a*, si* $tp(a/B)$ *ne dévie pas sur* A *et* $tp(a/C)$ *ne dévie pas sur* B*, alors* $tp(a/C)$ *ne dévie pas sur* A*.*

localité *Pour tout* $p \in S(\bar{M})$*, il existe* A *tel que* $|A| \leq |T|$ *et tel que* p *ne dévie pas sur* A *(De manière équivalente : il n'existe pas de suite arbitrairement longue de types* $p_1 \prec p_2 \prec \cdots \prec p_\alpha \prec \ldots$*, chacun déviant sur le précédent).*

Une théorie vérifiant l'une de ces propriétés est dite *simple*.

Notons tout de suite, même si nous n'avons pas encore donné la définition, qu'une théorie simple et NIP est stable. Il ne faudra donc pas s'attendre à ce que, dans le cas NIP, la déviation vérifie une de ces propriétés.

Exercice 1.2.8. *À l'aide de l'exemple 1.2.4 montrer que toutes les propriétés de 1.2.7 peuvent être mises en défaut. On verra plus loin que la théorie des ordres denses est NIP.*

§1.3 Relations d'équivalence bornées

Soit E une relation d'équivalence d'uplets (éventuellement infinis) type-définissable sur A. La relation xEy s'écrit donc $\bigwedge \psi_i(x, y)$ où les ψ_i sont des formules à paramètres dans A.

Définition 1.3.1. Une formule $\psi(x, y)$ est dite *large* s'il existe N vérifiant : pour tout $x_1, \ldots, x_N$, il existe $1 \leq n, m \leq N$, $n \neq m$ tels que $\models \psi(x_n, x_m)$.

Proposition 1.3.2. *Soit* E *une relation d'équivalence type-définissable sur* A*, définie par le type partiel* $\Psi = \{\psi_i\}$*. Alors* E *est bornée si et seulement si toutes les* ψ_i *sont larges.*

Preuve. Supposons qu'il existe $\psi \in \Psi$ qui ne soit pas large. Alors par compacité, on peut trouver une suite non bornée (a_i) telle qu'on ait $\neg\psi(a_i, a_j)$ pour tout $i \neq j$. Nécessairement, on a $\neg a_i E a_j$ pour $i \neq j$ et E est non bornée.

Réciproquement, supposons que tous les ψ sont larges. Si (a_i) est une suite de A-indiscernables, on doit avoir $\psi(a_i, a_j)$ pour un $i \neq j$, donc pour tous $i \neq j$. Ainsi deux uplets ayant même type de Lascar sur A sont équivalents modulo E et E est bornée. □

Remarque 1.3.3. On voit qu'il y a équivalence entre "a et b sont deux éléments d'une suite de A-indiscernables" et "on a $\psi(a, b)$ pour toute formule large à paramètres dans A" (on a montré un sens, l'autre est par compacité).

Soit E une relation d'équivalence bornée définie sur un ensemble type-définissable Y (le tout défini sur A). Soit $X = Y/E$. On note G le groupe de permutations de X induites par des A-automorphismes.

On définit des topologies sur ces deux ensembles de la manière suivante :

Si π désigne la projection de Y sur X, alors $C \subseteq X$ est dit fermé lorsque $\pi^{-1}(C)$ est type définissable.

Remarque 1.3.4. Si $R \subset Y$ est type-définissable, l'ensemble $\pi(R)$ est fermé dans X.

Si $Z \subset Y$ est définissable, l'ensemble $\{E(a) \mid a \in Y, E(a) \subseteq Z\}$ est ouvert.

On donne à G la topologie induite par la topologie produit sur X^X.

La proposition suivante est démontrée dans [LasPil], on en donne une preuve plus bas dans le cas particulier qui nous intéressera :

Proposition 1.3.5. *L'espace* X *est compact, le groupe* G *est un groupe topologique compact et l'action de* G *sur* X *est continue.*

Soit A un ensemble de paramètres. L'intersection de toutes les relations d'équivalence définies et bornées sur A est encore une relation d'équivalence bornée. Si a et b sont congrus modulo cette dernière relation, on note $\mathsf{KP}(a/A) = \mathsf{KP}(b/A)$ et on dit que a et b ont même *type compact* sur A.

Définition 1.3.6. Une formule $\psi(x, y)$ à paramètres dans A est dite *très large* (sur A) si elle est symétrique et si $\mathsf{KP}(a/A) = \mathsf{KP}(b/A)$ implique $\psi(a, b)$.

Remarque 1.3.7. On a en particulier, $\mathsf{KP}(a) = \mathsf{KP}(b)$ si et seulement si $\models \psi(a, b)$ pour toute formule très large ψ (remarquer que si $\mathsf{KP}(a/A) = \mathsf{KP}(b/A)$ implique $\psi(a, b)$, alors $\psi(x, y) \wedge \psi(y, x)$ est très large).

On sait que si $\psi(x, y)$ n'est pas large, il existe a, b de même type de Lascar sur A vérifiant $\neg\psi(a, b)$. En particulier, a et b ont même type compact sur A. Ainsi, une formule très large est large.

EXEMPLE 1.3.8. *On considère la théorie sur le langage réduit à une relation binaire* I *stipulant que* I *définit une relation d'équivalence ayant une infinité de classes, toutes à deux éléments. La formule* $\neg(xIy)$ *est large mais pas très large.*

Définition 1.3.9. Un ensemble type-définissable X est dit *saturé* pour A si l'appartenance d'un élément x à X est déterminée par $\mathsf{KP}(x)$.

Lemme 1.3.10. *Soit* Y *type-définissable, saturé, alors* Y *s'écrit* $\bigwedge_i \neg\psi_i(x, b_i)$ *pour des uplets* b_i *et des formules très larges* ψ_i*.*

Preuve. Soit $\Psi = \{\neg\psi(x, b) : \psi$ très large vérifiant $(Y \to \neg\psi)\}$. Soit a satisfaisant Ψ. On veut montrer que $a \in Y$. Il suffit pour cela de trouver $b \in Y$ de même type compact que a sur A. Si ce n'est pas possible, l'ensemble de formules suivant est inconsistant : $\{\mathsf{KP}(x) = \mathsf{KP}(a), x \in Y\}$. Il existe alors ψ très large et ϕ contenant Y tel que $\models \psi(x, a) \to \neg\phi(x)$. Mais alors, $\neg\psi(x, a) \in \Psi$, ce qui est absurde. □

Lemme 1.3.11. *Soit* Y *type-définissable saturé, et soit* $\phi(x)$ *tel que* $x \in Y \to \phi(x)$*. Alors, il existe* $\phi_1(x)$ *impliquée par* Y *et une formule très large* $\psi(x, y)$ *telles que* $\models (\psi(x, y) \wedge \neg\phi(y)) \to \neg\phi_1(x)$.

Preuve. Par compacité. □

§1.4 bdd(A)

Soit $G_1(A)$ le sous-groupe (distingué) de $\mathrm{Aut}_A(\bar{M})$ fixant les types compacts sur A. On définit $\mathrm{Aut}_A(\mathrm{bdd}(A))$ comme étant le quotient $\mathrm{Aut}_A(\bar{M})/G_1(A)$.

Remarque 1.4.1. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_A$, alors σ est dans G_1 si et seulement si, on a $\psi(a, \sigma.a)$ pour tout a et tout formule ψ très large, si et seulement si σ stabilise chaque ensemble type-définissable saturé.

On munit $\mathrm{Aut}_A(\mathrm{bdd}(A))$ d'une topologie comme suit : l'ensemble $C \subseteq \mathrm{Aut}_A(\mathrm{bdd}(A))$ est dit fermé lorsqu'on peut écrire $\pi^{-1}(C) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}_A(\bar{M}) \mid \sigma(a) \in Y\}$ pour un uplet (infini) a de $\bar{M}$ et un ensemble type-définissable Y.

Remarque 1.4.2. L'ensemble Y ci-dessus est saturé.

Remarque 1.4.3. Si $a, b \in \bar{M}$, alors il existe $\sigma \in G_1$ vérifiant $\sigma(a) = b$ si et seulement si $\mathsf{KP}(a/A) = \mathsf{KP}(b/A)$. Ainsi $\{a \mid$ Il existe $\sigma \in G_1$ tel que $\sigma(a) \in Y\}$ est type définissable dès que Y l'est.

On a ainsi, comme dans la section précédente : si Z est un ensemble définissable, l'ensemble $\{e \in \mathrm{Aut}_A(\mathrm{bdd}(A)) : \rho(a) \in Z$ pour tout relèvement ρ de $e\}$ est un ouvert.

On écrira plus loin "pour tout $\rho \in e$" à la place de "pour tout relèvement…".

Proposition 1.4.4. *Le groupe* $G = \mathrm{Aut}_A(\mathrm{bdd}(A))$ *est un groupe topologique compact.*

Preuve. Montrons que G est quasi-compact. Soient C_i des fermés, $C_i =: \{\sigma : \sigma(a_i) \in Y_i\}$ d'intersection vide. Cela implique qu'il n'existe pas de (b_i) vérifiant : $(b_i) \equiv_A (a_i)$ et $b_i \in Y_i$ pour tout i. Par compacité un ensemble fini de ces conditions est inconsistant et ainsi une intersection finie des C_i est déjà vide (Cet argument fonctionne car le groupe G est borné, donc on peut supposer la famille (C_i) bornée).

Montrons maintenant que G est séparé. Soient $\bar{\sigma}, \bar{\tau} \in G$ et σ, τ des relèvements de ces éléments à $Aut_A(\bar{M})$. Il existe alors $a \in \bar{M}$ et une formule très large ψ tels que $\models \neg\psi(\sigma.a, \tau.a)$. Il existe une formule ϕ très large impliquant ψ et vérifiant : $\phi(x,y) \wedge \phi(y,z) \rightarrow \psi(x,z)$. Ainsi, on a $\neg\phi(\sigma'.a, \tau.a)$ pour tout σ' de $\bar{\sigma}$. De même, on a $\neg\phi(\tau'.a, \sigma.a)$ pour tout τ' dans $\bar{\tau}$.

Les ensembles $\{e \in G : \neg\phi(\rho.a, \tau.a)$ pour tout $\rho \in e\}$ et $\{e \in G : \neg\phi(\rho.a, \sigma.a)$ pour tout $\rho \in e\}$ sont des ouverts disjoints de G et contiennent respectivement $\bar{\sigma}$ et $\bar{\tau}$.

Il reste à montrer que les applications de groupe sont continues. Commençons par la loi de composition : $c : G \times G \to G$.

Soit $O \subseteq G$ un ouvert ; $\pi^{-1}(O) = \{\sigma : \sigma(a) \notin Y\}$, Y saturé. Soient $\sigma, \tau \in \pi^{-1}(c^{-1}(O))$, c'est-à-dire vérifiant $\sigma(\tau(a)) \notin Y$. Posons $b = \tau(a)$. Il existe ϕ impliquée par Y telle qu'on ait $\neg\phi(b)$. On applique le lemme 1.3.11 à ϕ qui donne une formule ϕ_1. Le même lemme appliqué à ϕ_1 donne des formules $\psi_2(x,y)$ et ϕ_2.

On considère les ouverts suivants : $\{e \in G : \neg\phi_1(\rho(b))$ pour tout $\rho \in e\}$ et $\{e \in G : \psi_2(\rho(a), b)$ pour tout $\rho \in e\}$. Alors $\pi(\sigma)$ est dans le premier, $\pi(\tau)$ dans le second. De plus, si on prend un autre tel couple (σ', τ'), on a : $\psi_2'(\tau'(a), b)$, donc $\psi_2'(\sigma'(\tau'.a)), \sigma'(b))$ et d'autre part on a $\neg\phi_1(\sigma'(b))$. Par construction de ψ_2, ceci implique $\neg\phi_2(\sigma'(\tau'(a)))$. Ainsi $\sigma'(\tau'(a)) \notin Y$.

Enfin, considérons l'inverse : $i : G \to G$. Soit $O \subseteq G$ un ouvert ; $\pi^{-1}(O) = \{\sigma : \sigma(a) \notin Y\}$, Y saturé. Soit σ tel que $\sigma^{-1}(a) \notin Y$. Par le lemme 1.3.10, il existe une formule très large $\psi(x,y)$ et un uplet b tels que Y implique $\psi(x,b)$ et tel qu'on ait $\neg\psi(\sigma^{-1}(a), b)$. On a donc $\neg\psi(a, \sigma(b))$. Soit $\phi(x,y)$ très large telle qu'on ait : $\phi(x,y) \wedge \phi(y,z) \to \psi(x,z)$. Alors l'ouvert $\{e \in G : \phi(a, \rho(b))$ pour tout $\rho \in e\}$ convient. $\square$

On note $S(bdd(A))$ l'ensemble des types compacts sur A, c'est-à-dire $\bar{M}$ quotienté par la relation d'équivalence bornée : "avoir même type compact sur A". On peut voir les éléments de $S(bdd(A))$ comme des ensembles de formules $\psi(x,b)$ avec ψ très large (Attention cependant, on ne peut définir de topologie à partir de ces formules, car elles ne définissent pas en général d'ensembles saturés). On munit cet ensemble de la topologie quotient comme indiqué avant la proposition 1.3.5. On a démontré une partie de cette proposition avec les notations de notre cas particulier (la preuve générale est exactement la même). L'action continue se démontre exactement comme la continuité de la loi de composition et donne :

Proposition 1.4.5. *L'action du groupe compact* $Aut_A(bdd(A))$ *sur* $S(bdd(A))$ *est continue.*

Chapitre 2

Théories NIP

§2.1 Propriété d'indépendance

2.1.1 Dimension de Vapnik-Chervonenkis

On considère un ensemble E et une classe Φ de parties de E.

Définition 2.1.1. Des éléments $x_1, \dots, x_n$ sont *éclatés* par Φ si pour toute partie $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, il existe $A \in \Phi$ tel que : $x_i \in A \Leftrightarrow i \in I$.

Définition 2.1.2. La classe Φ est de VC-dimension n s'il existe n points éclatés par Φ, mais pas $n+1$.

Elle dite de VC-dimension infinie s'il existe n points éclatés par Φ pour tout n.

2.1.2 Propriété d'indépendance

Définition 2.1.3. Une formule $\phi(x, y)$ (x et y a priori de tailles différentes) a la *propriété d'indépendance* si la VC-dimension de Φ est infinie, où $\Phi = \{\phi(x, b) \mid b \in \bar{M}\}$.

Dans le cas contraire, on dira que ϕ est *NIP* (*not independence property*).

Remarque 2.1.4. Par compacité, la propriété d'indépendance équivaut à : pour tout λ il existe $\{a_i, i < \lambda\}$ et $\{b_I, I \in \mathcal{P}(\lambda)\}$ tels que :

$$\models \phi(a_i, b_I) \Leftrightarrow i \in I.$$

En particulier, ceci implique qu'il existe 2^λ types sur l'ensemble des a_i, et ainsi que T est instable.

Remarque 2.1.5. La propriété d'indépendance est une propriété d'une formule accompagnée d'une décomposition de ses variables libres en deux uplets x et y. On fera néanmoins comme si cette décomposition était intrinsèque à la formule, ce qui nous autorisera à dire "ϕ a la propriété d'indépendance".

Exercice 2.1.6. *Le fait d'être NIP est symétrique en x et y, c'est à dire que si $\phi(x, y)$ est NIP, $\psi(y, x) := \phi(x, y)$ l'est aussi.*

Si ϕ est NIP, il en va de même de $\neg\phi$.

Le théorème suivant donne une caractérisation équivalente de la propriété d'indépendance qui est celle utilisée en pratique.

Théorème 2.1.7. *Une formule $\phi(x, y)$ a la propriété d'indépendance si et seulement s'il existe une suite indiscernable $(a_i)_{i<\omega}$ et un uplet b tel qu'on ait pour tout i :*

$$\models \phi(a_{2i}, b) \wedge \neg\phi(a_{2i+1}, b).$$

Preuve. Supposons que ϕ ait la propriété d'indépendance. Prenons des $(a_i, i < \lambda)$ et $\{b_I, I \in \mathcal{P}(\lambda)\}$ comme en 2.1.4. Si λ est assez grand, on peut extraire de (a_i) une sous-suite indiscernable. On peut donc supposer directement que (a_i) est indiscernable, et prenons $\lambda = \omega$. Il ne reste plus qu'à poser $b := b_{2\mathbf{N}}$ (où $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels).

Réciproquement, supposons qu'on ait des a_i et b comme dans l'énoncé. Soient I et J deux parties finies de $\mathbf{N}$. Le type suivant est consistant :

$$\bigwedge_{i \in I} \phi(a_i, y) \wedge \bigwedge_{j \in J} \neg\phi(a_j, y).$$

En effet, si $I \subseteq 2\mathbf{N}$ et $J \subseteq 2\mathbf{N} + 1$, il est réalisé par b. Sinon, on se ramène à ce cas en bougeant I et J tout en conservant l'ordre relatif de leurs éléments. Par indiscernabilité des a_i, le type qu'on obtient est satisfaisable si et seulement si le type de départ l'est.

Ceci montre que les a_i sont éclatés par Φ et la VC-dimension de Φ est infinie. $\square$

Ainsi, à toute formule NIP $\phi(x, y)$ est associé un entier N vérifiant : Pour toute suite indiscernable (a_i), il n'existe pas de b tel que $\neg(\phi(a_i, b) \leftrightarrow \phi(a_{i+1}, b))$ pour $i = 0, \ldots, N$.

Exercice 2.1.8. *Si ϕ et ψ sont NIP, il en va de même pour $\phi \wedge \psi$ et $\phi \vee \psi$.*

Soit p un type global A-invariant. On définit $p^{(\omega)}$ comme en 1.2.2. Soit (a_i) réalisant $p^{(\omega)}$. On dit que p est NIP si (a_i) est insécable.

À l'instar des types stables, les types NIP sont déterminés par leur suite de Morley.

Proposition 2.1.9. *Soient p et q deux types globaux NIP A-invariants. Si $p^{(\omega)}|_A = q^{(\omega)}|_A$, alors $p = q$.*

Preuve. Supposons que $p^{(\omega)}|_A = q^{(\omega)}|_A$. On construit une suite $(a_i)_{i<\omega}$ de la manière suivante : a_{2i} réalise $p|_{\bar{M} \cup \{a_j, j<2i\}}$ et a_{2i+1} réalise $q|_{\bar{M} \cup \{a_j, j<2i+1\}}$. La suite obtenue est alors indiscernable : elle réalise $p^{(\omega)}|_A$ (faire une récurrence sur i). Supposons qu'il existe $b \in \bar{M}$ et ϕ tels que (par exemple) $p \models \phi(x, b)$ et $q \models \neg\phi(x, b)$. On a alors $\models \phi(a_i, b)$ si et seulement si i est pair. Ceci contredit le fait que (a_i) est insécable. $\square$

2.1.3 Théories NIP

Théorème 2.1.10. *Pour une théorie T donnée, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Toutes les formules sont NIP.*
2. *Pour tout A et tout type p sur A, il existe au plus $2^{|A|}$ types globaux qui étendent p et cohéritent de lui.*
3. *Pour tout $X \subseteq S(\bar{M})$, l'adhérence $\bar{X}$ de X dans $S(\bar{M})$ est de cardinal au plus $2^{|X|}$.*
4. *Toutes les suites indiscernables sont insécables.*

Preuve. L'équivalence entre 2. et 3. est facile et laissée en exercice ; celle entre 1. et 4. est le théorème 2.1.7.

L'implication 1. ⇒ 2. découle de 2.1.9.

Montrons 2. ⇒ 1.. Supposons que ϕ n'ait pas la propriété d'indépendance. Prenons des $\{a_i, i < \lambda\}$ et $\{b_I, I \in \mathcal{P}(\lambda)\}$ comme en 2.1.4. Soit M un modèle de cardinal λ contenant les a_i et N une extension de M de cardinal 2^λ contenant les b_I. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur λ, on définit $a_{\mathcal{U}} := \prod \mathrm{tp}(a_i/N)/\mathcal{U}$. On a :

$$(a_{\mathcal{U}} \models \phi(x, b_I)) \Leftrightarrow I \in \mathcal{U}.$$

Ainsi les $a_{\mathcal{U}}$ sont tous différents et sont donc au nombre de 2^{2^λ}. De plus, par construction, ils cohéritent de leur restriction à M. Puisque la cofinalité de 2^{2^λ} est strictement supérieure à 2^λ, nombre maximal de types sur M, il en existe 2^{2^λ} qui ont même restriction p à M. $\square$

Définition 2.1.11. La théorie T est dite *NIP* si toutes ses formules le sont.

Exemple 2.1.12. *Une théorie stable est NIP.*

À l'aide uniquement de la définition, il est très difficile de vérifier qu'une théorie donnée est NIP. Donnons maintenant un critère maniable. Le résultat combinatoire suivant opère déjà une grande simplification.

Théorème 2.1.13 (Shelah)**.** *Une théorie est NIP si et seulement si toutes les formules* $\phi(x, y)$, où x est une seule variable, *le sont.*

Preuve. On peut supposer T dénombrable (car si $\phi(x, y)$ a la propriété d'indépendance, elle l'a aussi dans toute réduction de T la contenant). On va montrer le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit* $n < \omega$. *Toutes les formules* $\phi(x_1 \dots x_n, y)$ *(*x_i *une seule variable) sont NIP si et seulement si pour tout* κ *tel que* $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \omega_1$, *toute suite* $(b_i)_{i<\kappa}$ *indiscernable et tout uplet* a *de taille* n, *il existe* $i_0 < \kappa$ *tel que* $(b_i)_{i \geq i_0}$ *soit* a*-indiscernable.*

Ce lemme étant acquis, la preuve du théorème est facile. On suppose que toutes les formules $\phi(x_1, y)$ où x_1 est une variable sont NIP. On montre par récurrence sur n que les formules $\phi(x, y)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, sont NIP. Soit donc $\phi(x_0 \dots x_n, y)$ et κ comme ci-dessus. Si ϕ a la propriété d'indépendance, il existe un uplet a de taille n et une suite $I = (b_i)_{i<\kappa}$ indiscernable telle que $\models \phi(a, b_i) \leftrightarrow \neg\phi(a, b_{i+1})$ (2.1.7).

Par hypothèse de récurrence et le lemme, on peut extraire de I un ensemble cofinal $J = (c_i)$ qui soit $(a_1, \dots, a_n)$-indiscernable. La suite $(a_1 \dots a_n c_i)$ est indiscernable et on a $\models \phi(a_0, a_1 \dots a_n c_i) \leftrightarrow \neg\phi(a_0, a_1 \dots a_n c_{i+1})$, ce qui contredit le fait que $\phi(x_0, x_1 \dots x_n y)$ soit NIP.

Reste à montrer le lemme. Soient a et (b_i) comme dans le lemme et $\phi(x, y_1 \dots y_n)$ où la longueur des y_i est celle des b_i, de même pour x et a. Il s'agit de montrer qu'il existe i_0 tel que pour $i_0 < i_1 < \dots < i_n, i_0 < j_1 < \dots < j_n$, on a $\models \phi(a, b_{i_1} \dots b_{i_n}) \leftrightarrow \phi(a, b_{j_1} \dots b_{j_n})$. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite croissante $i_1^1 < \dots < i_n^1 < i_1^2 < \dots < i_n^2 < \dots < i_1^k < \dots < i_n^k < \dots\dots$ tel que, pour $k < \omega$, $\models \phi(a, b_{i_1^k} \dots b_{i_n^k}) \leftrightarrow \neg\phi(a, b_{i_1^{k+1}} \dots b_{i_n^{k+1}})$. Or la suite d'uplets $((b_{i_1^k} \dots b_{i_n^k}))_{k<\omega}$ est indiscernable. Ainsi, par 2.1.7, ϕ a la propriété d'indépendance.

□

On peut ainsi voir que la théorie des ordres denses, et même toute théorie o-minimale, est NIP. En effet, par le lemme de Shelah, il suffit de le vérifier pour les ensembles définissables en dimension 1, qui sont des unions finies d'intervalles. Or à k fixé, l'ensemble des unions de k intervalles est de VC-dimension égale à $2k$.

Le théorème de Shelah permet de récrire le théorème 2.1.10.

Théorème 2.1.14. *Pour une théorie* T *donnée, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. T *est NIP.*
2. *Pour tout* A *et tout 1-type* p *sur* A, *il existe au plus* $2^{|A|}$ *types globaux qui étendent* p *et cohéritent de lui.*
3. *Pour tout* $X \subseteq S_1(\bar{M})$, *l'adhérence* $\bar{X}$ *de* X *dans* $S_1(\bar{M})$ *est de cardinal au plus* $2^{|X|}$.
4. *Toutes les suites indiscernables en une variable sont insécables.*

Exemple 2.1.15. *Les théories suivantes sont NIP, à chaque fois, on peut le démontrer en comptant les cohéritiers.*

1. *Les théories o-minimales*
2. *Les théories C-minimales*
3. *Toute théorie de chaînes*
4. *Toute théorie d'un groupe abélien ordonné*
5. *ACVF : la théorie des corps valués algébriquement clos*

6. *Plus généralement, une théorie d'un corps valué hensélien de caractéristique résiduelle nulle et de corps résiduel* k *a la propriété d'indépendance si et seulement si* $\mathrm{Th}(k)$ *l'a.*
7. *La théorie des* p*-adiques*

§2.2 Étude des théories NIP

Dans le cadre des théories NIP, la déviation ne satisfait pas les propriétés qui en font, dans le cas simple, une relation d'indépendance, mais reste pertinente grâce au résultat suivant.

Proposition 2.2.1. *(NIP) Soient* p *un type global et* $A \subseteq \bar{M}$ *tels que* p *ne dévie pas sur* A*. Alors* p *est* $\mathrm{Lstp}(A)$*-invariant.*

Preuve. Soit p non $\mathrm{Lstp}(A)$-invariant. Il existe alors (a_i) une suite A-indiscernable et $\phi(x, y)$ une formule telles qu'on ait : $p \vdash \neg(\phi(x, a_0) \leftrightarrow \phi(x, a_1))$. Par NIP, l'ensemble $\{\neg(\phi(x, a_{2i} \leftrightarrow \phi(x, a_{2i+1})), i < \omega\}$ est inconsistant. Comme de plus la suite $a_0a_1, a_2a_3, \ldots$ est A-indiscernable, p dévie pas sur A. □

En particulier, si p ne dévie pas sur A, p est M-invariant pour tout modèle M contenant A. Ainsi les types globaux qui ne dévient pas sur un ensemble borné coïncident avec ceux qui sont A-invariants pour un ensemble borné A. On les appellera types invariants. Les autres types globaux ne nous intéresseront pas beaucoup.

Rappelons que suivant la section 1.2.1, si p est un type invariant, on peut définir $p|_B$ pour tout ensemble de paramètres B, même extérieur à $\bar{M}$.

Exercice 2.2.2. *(NIP) Supposons* $\mathrm{tp}(a/B)$ *ne dévie pas sur* A *et* $\mathrm{tp}(b/Ba)$ *ne dévie pas sur* A*, alors* $\mathrm{tp}(a, b/B)$ *ne dévie pas sur* A*.*

En particulier, si p ne dévie pas sur A, c'est aussi le cas de $p^{(\omega)}$, ce qui est bien la moindre des choses.

Donnons quelques lemmes qui explicitent le fait qu'un type invariant est basé sur sa suite de Morley.

Lemme 2.2.3. *(NIP) Soit* A *un ensemble,* I *une suite indiscernable sur* A*,* p *et* q *deux types globaux. On suppose que* $p|AI = q|AI = \mathrm{Lim}(I)$ *et que ni* p *ni* q *ne dévie sur* A*. Alors* $p = q$*.*

Preuve. On reproduit dans ce contexte la preuve de la proposition 2.1.9. On construit donc par récurrence une suite $(b_i)_{i<\omega}$ en réalisant alternativement $p|_{\bar{M}\cup\{b_j, j<2i\}}$ et $q|_{\bar{M}\cup\{b_j, j<2i+1\}}$. On montre par récurrence qu'on obtient une suite indiscernable qui prolonge $\bar{a}$ en utilisant la proposition précédente. On conclut comme en 2.1.9. □

Lemme 2.2.4. *(NIP) Soit* p *ne déviant pas sur* A *et* I *une suite de Morley de* p *sur* A*, alors* p *est* AI*-invariant.*

Preuve. Soit σ un automorphisme de $\bar{M}$ laissant AI invariant. Alors $\sigma(p)|AI = p|AI$. De plus, ni p ni $\sigma(p)$ ne dévie sur A. Par le lemme précédent, $p = \sigma(p)$. □

Définition 2.2.5. Soit p un type global A-invariant. Il est muni d'un schéma de définition $d\phi_p$ comme expliqué en 1.2.1. On dit que p est *fortement borel-définissable* si les $d\phi_p$ sont des combinaisons booléennes finis de fermés de $S(A)$.

Proposition 2.2.6. *(NIP) Soit* p *un type global* A*-invariant, alors* p *est fortement borel-définissable.*

Preuve. (Idée) : Soit $\phi(x, y)$ une formule et $b \in \bar{M}$. Il existe N minimal tel que la situation suivante soit inconsistante :

(C_N) : $(a_i, i < N)$ est le début d'une suite de Morley de p, pour tout $i < N - 1$, $\models \neg(\phi(a_i, b) \leftrightarrow \phi(a_{i+1}, b)$.

Alors pour toute réalisation $(a_i, i < N-1)$ de C_{N-1}, $p \vdash \phi(x, b)$ si et seulement si $\models \phi(a_{N-1})$. En écrivant ceci soigneusement, on voit que cela donne une définition $d\phi_p$ de ϕ pour p sous la forme voulue. □

On ne peut directement obtenir un résultat similaire pour p ne déviant pas sur A (donc $\mathrm{Lstp}(A)$-invariant) car on n'a pas défini de topologie sur cette ensemble. Mais on fait, on a un peu mieux.

Proposition 2.2.7. *Soit* p *un type global ne déviant pas sur* A*, alors* p *est* $\mathrm{bdd}(A)$*-invariant.*

Corollaire 2.2.8. *Toute théorie NIP est G-compacte (les types de Lascar correspondent aux types compacts).*

Chapitre 3

Mesures

Si A est un ensemble de paramètres, on note $\mathcal{L}_n(A)$ l'ensemble des ensembles de $\bar{M}^n$ définissables à paramètres dans A. En d'autres termes, $\mathcal{L}_n(A)$ est l'ensemble des formules de $L(A)$ quotienté par la relation d'équivalence $T \vdash \phi \leftrightarrow \psi$.

Définition 3.0.9. Une *mesure de Keisler* (ou *mesure*) sur A est une mesure de probabilité finiment additive sur les ensembles définissables à paramètres dans A (d'une arité n donnée).

Exemple 3.0.10. *Un type est un cas particulier de mesure : soit $p \in S_n(A)$, alors p peut être vu comme une mesure en posant, pour $\phi \in \mathcal{L}_n(A)$, $p(\phi) = 1$ si $p \vdash \phi$ et $p(\phi) = 0$ dans le cas contraire.*

Pour μ une mesure, l'ensemble $S(\mu) = \{p \in S(A) \mid \mu(\phi) = 1 \rightarrow p \models \phi\}$ est un fermé de l'espace des types appelé *support* de μ.

Remarque 3.0.11. Si on a $\mu(\phi) > 0$ pour un ensemble ϕ, alors il existe $p \in S(\mu)$ vérifiant $p \models \phi$. En effet, l'ensemble $\{\phi\} \cup \bigcup_{\mu(\psi)=0}\{\neg\psi\}$ est consistant par compacité.

On note $\mathcal{M}_n(A)$ l'espace des mesures de Keisler sur A d'arité n.

On munit $\mathcal{M}_n(A)$ de la topologie faible, c'est-à-dire celle engendrée par les $B_\phi(r) := \{\mu \mid |\mu(\phi) - x_0| < r\}$.

Proposition 3.0.12. *L'espace $\mathcal{M}_n(A)$ est compact.*

Preuve. On considère l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(A) \rightarrow [0,1]^{\mathcal{L}_n(A)}$ où ce dernier espace est muni de la topologie produit (il est donc compact). On remarque que Φ est injective et est un homéomorphisme sur son image. De plus Im(Φ) est le fermé de l'espace Y d'arrivé défini par $\{w \in Y \mid w(x = x) = 1\} \bigwedge_{\phi\cap\psi=\emptyset}\{w(\phi \vee \psi) = w(\phi) + w(\psi)\}$. □

Remarque 3.0.13. On a le même résultat pour des mesures en une infinité de variables.

En fait, dans les démonstrations d'existence de mesure, il est souvent utile de se ramener à la compacité de $[0,1]^{\mathcal{L}_n(A)}$. En voici un exemple.

Proposition 3.0.14. *Si μ est une mesure sur A, alors μ s'étend en une mesure globale (i.e., sur $\bar{M}$).*

Preuve. On cherche un élément ν de $[0,1]^{\mathcal{L}_n(A)}$ vérifiant les propriétés suivantes : ν est une mesure, $\nu(\phi) = \mu(\phi)$ pour $\phi \in \mathcal{L}_n(A)$. Si ceci est inconsistant, par compacité un nombre fini de ces conditions l'est déjà. Ces conditions ne font intervenir qu'un ensemble fini Ψ de formules. On est donc ramené à construire une fonction de $[0,1]^\Psi$ vérifiant ces conditions. Considérons l'algèbre de Boole $\mathcal{B}$ engendrée par les éléments de Ψ. Il s'agit de définir la mesure des atomes de cette algèbre finie respectant éventuellement certaines conditions imposées par les éléments de Ψ définissables sur A. Ceci est clairement possible. □

Une mesure borélienne sur un espace E est dite régulière si pour tout borélien B et tout $\epsilon > 0$, il existe $F \subseteq B \subseteq O$, F fermé, O ouvert tels que $\mu(O \setminus F) < \epsilon$.

Citons un résultat important de l'article original de Keisler.

Proposition 3.0.15. *Une mesure μ sur A induit une mesure régulière sur la tribu de $S_n(A)$ engendré par $\mathcal{L}_n(A)$.*

Quelques résultats élémentaires :

Proposition 3.0.16. *Si (a_i) est une suite indiscernable et ϕ une formule telle que $\mu(\phi(x, a_i)) > \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ et tout i, alors $\bigwedge \phi(x, a_i)$ est consistant.*

Preuve. D'abord remarquons qu'on peut supposer les a_i indiscernables pour μ. En effet, on peut étendre la suite en une suite très longue (par compacité...) et utiliser Erdös-Rado. Soit, s'il existe, N minimal tel que $\mu(\bigwedge_{i=0}^{N} \phi(x, a_i)) = 0$. Alors on a $\mu(\bigwedge_{i=0}^{N-1} \phi(x, a_i)) =: r_{N-1} > 0$ mais $\mu(\bigcup_k \bigwedge_{k.N}^{(k+1).N-1} \phi(x, a_i)) < \infty$. Ces ensembles ne peuvent donc être deux-à-deux disjoints, ce qui contredit l'indiscernabilité de la suite. □

Proposition 3.0.17. *(NIP) Il n'existe pas $\{b_i, i < \omega\}$ et $\epsilon > 0$ vérifiant*

$$i \neq j \to \mu(\phi(x, b_i) \triangle \phi(x, b_j)) > \epsilon.$$

À partir d'une mesure μ, on peut définir une relation d'équivalence sur les ensembles définissables par $\phi \sim_\mu \psi$ si $\mu(\phi \triangle \psi) = 0$.

Proposition 3.0.18. *(NIP) $\#\{X/\sim_\mu\}$ est borné.*

Corollaire 3.0.19. *(NIP) L'espace $S(\mu)$ est de cardinalité bornée.*

Exemple 3.0.20. *Contre-exemple à ces propriétés dans le cas non-NIP : prendre pour T la théorie du graphe aléatoire (sur le langage $L = \{R\}$) et pour μ la mesure globale définie par : $\mu(\wedge_{i=1}^{n} (xRa_i)^{\epsilon_i}) = 2^{-n}$ (pour tout $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ et $a_i \in \bar{M}$). Le support de μ est l'ensemble des types non-réalisés.*

Étudions les propriétés modèles-théoriques des mesures :

Définition 3.0.21. La mesure de Keisler μ ne dévie pas sur A si $\mu(X) > 0$ implique que X ne dévie pas sur A. De manière équivalente, aucun type de $S(\mu)$ ne dévie sur A.

La mesure μ est finiment satisfaisable sur A si $\mu(X) > 0 \to X \cap A \neq \emptyset$.

La mesure μ est définissable sur A si pour tout $C \subseteq [0, 1]$ fermé et $\phi \in L$, $\{c \mid \mu(\phi(x, c)) \in C\}$ est type-définissable sur A.

La mesure μ est lisse sur M_0 s'il existe une unique extension globale de $\mu|_{M_0}$.

Définition 3.0.22. Soient μ, une mesure sur N et $M \subset N$. On dit que μ *hérite* de sa restriction à M si pour tout $O \subset [0, 1]$ ouvert et pour tout ϕ, s'il existe $a \in N$ tel que $\mu(\phi(x, a)) \in O$, alors on peut trouver un tel a dans M.

Lemme 3.0.23. *La mesure μ globale a un unique héritier global à toute extension de $\bar{M}$ si et seulement si μ est définissable.*

Lemme 3.0.24. *(NIP) Soit μ une mesure sur M_0, alors il existe une mesure globale μ' et une extension M de M_0 tels que μ' soit lisse sur M.*

Preuve. On va construire une tour d'extensions $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\alpha \subset \ldots$ et des extensions correspondantes de μ par récurrence.

Supposons μ_α construite sur M_α. Si μ_α est lisse, on s'arrête. Sinon, elle admet deux extensions globales distinctes ν_1 et ν_2. Soit X un ensemble définissable sur lequel elles diffèrent. On prend pour $M_{\alpha+1}$ une extension de M_α sur laquelle X est défini et on pose $\mu_{\alpha+1} = 1/2(\nu_1 + \nu_2)$. Soit $r > 0$ tel que $|\nu_1(X) - \nu_2(X)| < r$. Alors μ' vérifie :

$$\text{Pour tout ensemble } Y\ M_\alpha\text{-définissable, } \mu'(X \triangle Y) > r/4.$$

Supposons que cette construction ne s'arrête pas en un nombre borné d'étapes. On peut alors trouver une formule $\phi(x, y)$, un $\epsilon > 0$, une suite $(c_i, i < \omega)$ et une mesure globale μ'' tels que

$$\mu''(\phi(x, c_i) \triangle \phi(x, c_j)) > \epsilon \text{ pour tout } i \neq j.$$

Ceci contredit NIP. □

Lemme 3.0.25. *(NIP) Une mesure μ lisse sur M est définissable sur M et finiment satisfaisable dans M.*

3.0.1 Borel-définissabilité

Le théorème suivant de la théorie des probabilités sera très utile pour étendre des résultats des types aux mesures (voir [Rod]).

Théorème 3.0.26 (Vapnik-Chervonenkis)**.** *Soit (E, μ) un espace mesuré (μ mesure de probabilité), et $\mathcal{C}$ une classe dénombrable d'ensembles mesurables de VC-dimension finie. Soit aussi $\epsilon > 0$. Il existe alors $a_1, \ldots, a_n \in E$ tels que pour tout $A \in \mathcal{C}$:*

$$|\mu(A) - \frac{1}{n}\#\{i \mid a_i \in A\}| \leq \epsilon.$$

De plus, n ne dépend que de ϵ et de la VC-dimension de $\mathcal{C}$.

On démontre à l'aide de ceci la proposition d'approximation suivante.

Proposition 3.0.27. *Soit μ une mesure globale et $\phi(x, y)$ une formule. Soit aussi $\epsilon > 0$. Il existe alors $p_1, \ldots, p_n \in S(\mu)$ tels que pour tout $b \in \bar{M}$:*

$$|\mu(\phi(x, b)) - \frac{1}{n}\#\{i \mid p_i \vdash \phi(x, b)\}| \leq \epsilon.$$

La Borel-définissabilité des types invariants passe aux mesures.

Proposition 3.0.28. *(NIP) Soit μ une mesure de Keisler globale ne déviant pas sur M, alors μ est Borel-définissable sur M. C'est-à-dire que pour tout borélien de $[0, 1]$ et toute formule $\phi(x, y)$, l'ensemble $\{b \in \bar{M} \mid \mu(\phi(x, b)) \in B\}$ est un borélien de $S(M)$.*

Grâce à cette proposition, on peut définir le produit de mesures. Soient μ une mesure globale ne déviant pas sur un A et ν une mesure globale quelconque. On définit $\mu \ltimes \nu$ par $\mu \ltimes \nu(\phi(x, y)) = \int \nu(\phi(x, b))d\nu$. Ceci est possible car la fonction $b \mapsto \nu(\phi(x, b))$ est borélienne.

On notera parfois, notamment lorsque plusieurs mesures sont en jeu, μ_x pour préciser que μ porte sur la variable x.

§3.1 Exemples

3.1.1 Cas totalement transcendant

Dans le cas d'une théorie T totalement transcendante, les mesures se ramènent exactement à des moyennes de types.

Rappelons qu'une mesure μ s'étend en une mesure borélienne régulière sur l'espace des types. On a en particulier, si $p \in S(M)$, $\mu(p) = \inf_{p \vdash \phi} \mu(\phi)$.

Pour une mesure μ, un atome est un point x tel que $\mu(x) > 0$.

Proposition 3.1.1. *Soient M un modèle saturé d'une théorie T totalement transcendante et $\mu \in \mathcal{M}(M)$. On a alors, pour toute formule ϕ, $\mu(\phi) = \Sigma_{p \vdash \phi} \mu(p)$.*

Preuve. On effectue la preuve par récurrence sur $MR(\phi)$.

Si $MR(\phi) = 0$, Alors ϕ isole un ensemble fini de types $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Chacun de ces types est isolé par une formule ϕ_i. On a $\mu(\phi) = \Sigma\mu(\phi_i) = \Sigma\mu(p_i)$.

Supposons $MR(\phi) = \beta$. On peut, quitte à découper ϕ, supposer que cette formule est de degré de Morley 1. Notons $N := \Sigma_{p \vdash \phi} \mu(p)$. On a d'abord $\mu(\phi) \geq N$. En effet, supposons le contraire. Il existe donc $p_1, \ldots, p_n$ tels que $\Sigma\mu(p_i)$ soit déjà supérieur à $\mu(\phi)$. Considérons alors des formules disjointes $\phi_1, \ldots, \phi_n$ qui impliquent ϕ et qui sont prouvées respectivement par $p_1, \ldots, p_n$. On voit que $\Sigma\mu(\phi_i) \geq \Sigma\mu(p_i) > \mu(\phi)$ ce qui est absurde.

Maintenant, notons p_0 l'unique type étendant ϕ de rang de Morley β. Soit ψ une formule prouvée par p_0. On peut supposer que $\psi \to \phi$. On sait que $\phi \wedge \neg\psi$ est de rang de Morley strictement inférieur à β. Par hypothèse de récurrence, $\mu(\phi \wedge \neg\psi) \leq \Sigma_{p\vdash\phi, p\neq p_0}\mu(p)$ et $\mu(\psi) \geq \mu(\phi) - \Sigma_{p\vdash\phi,p\neq p_0}$. Ainsi, $\mu(p_0) \geq \mu(\phi) - \Sigma_{p\vdash\phi,p\neq p_0}$ et $\mu(\phi) \leq N$. □

Le lemme suivant est vrai en général :

Lemme 3.1.2. *Soient* $\mu \in \mathcal{M}(M)$ *et* $p \in S(M)$ *tels que* $\mu(p) > 0$. *Il existe alors* $M \prec M'$, $a \in M'$ *et une extension* μ' *de* μ *à* M' *vérifiant :* $tp(a/M) = p$ *et* $\mu'(x = a) > 0$.

Preuve. Soit M' contenant un tel élément a, et $\tilde{\mu}$ une extension quelconque de μ à M'. On va déformer $\tilde{\mu}$ pour qu'elle convienne. Notons $m := \mu(p)$. On définit μ' de la façon suivante : Soit $\phi \in L(M')$. Si $\models \phi(a)$, on pose $\mu'(\phi) = \tilde{\mu}(\phi \wedge \neg p) + m$. Dans le cas contraire, on pose $\mu'(\phi) = \tilde{\mu}(\phi \wedge \neg p)$.

Il est facile de vérifier, en distinguant les différents cas, que μ' est finiment additive et qu'elle étend μ. □

Dans le cas totalement transcendant, on peut définir le rang de Morley d'une mesure comme étant $\sup\{MR(p) \mid \mu(p) > 0\}$. On a alors :

Corollaire 3.1.3. *Si* T *est t.t., les mesures lisses sont exactement les mesures de rang de Morley 0.*

Preuve. Si μ est de rang de Morley 0, les seuls types satisfaisant $\mu(p) > 0$ sont réalisés et n'admettent donc qu'une seule extension à tout modèle plus grand. Ceci assure que μ elle-même n'admet qu'une seule extension.

Réciproquement, s'il existe p de rang de Morley strictement positif vérifiant $\mu(p) > 0$, alors μ admet au moins deux extensions à un grand modèle : une extension donnée par le lemme précédent et un cohéritier. □

Les résultats précédents sont en défaut dès que T n'est pas totalement transcendante. Traitons un exemple pour illustrer ce qui se passe alors :

Exemple 3.1.4. *On considère* $\mathcal{L} = \{V_1, V_2, \ldots\}$ *ou les* V_i *sont des prédicats unaires, et la théorie* T *sur cette signature stipulant que les* V_i *sont des ensembles infinis co-infinis en position générale les uns par rapport aux autres. On définit alors une mesure lisse sur* $\emptyset$ *en posant, pour tout* $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $\mu_0(V_1^{\epsilon_1} \wedge \cdots \wedge V_n^{\epsilon_n}) = 2^{-n}$. *Cette mesure admet tous les types non-réalisés dans son support et tous les types sont de mesure nulle.*

Remarquons en passant que, dans cet exemple, toute mesure sans atome est lisse.

3.1.2 Théories o-minimales

Soit M un modèle de la théorie T des ordres denses. Soit $\mu \in \mathcal{M}(M)$ (mesure en une variable). On suppose que μ est sans atome réalisé (*i.e.*, pour tout $a \in S(M)$, $\mu(x = a) = 0$). La mesure μ est alors déterminée par sa fonction de densité $f : a \mapsto \mu(]-\infty, a]) = \mu(]-\infty, a[)$. Cette fonction f est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$. De plus, pour tout $a \in M$, on a : $\mu(a^-) = f(a) - f(a^-)$, $\mu(a^+) = f(a^+) - f(a)$ et pour π une coupure transcendante de M, $\mu(\pi) = f(\pi^+) - f(\pi^-)$. Enfin, on a $\mu(+\infty) = 1 - \lim_{+\infty} f(a)$, de même en $-\infty$.

En particulier, si μ est sans atome (*i.e.*, $\mu(p) = 0$ pour tout $p \in S(M)$), alors f est continue et tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

Il est facile de voir avec cette remarque que μ est lisse si et seulement si elle est sans atome (rappelons qu'on a supposé $\mu(x = a) = 0$ pour tout $a \in M$).

Si T est o-minimale, l'analyse ci-dessus s'applique toujours à un détail près : on a correspondance entre les mesures sans atome réalisé et les fonctions f croissantes, à valeurs dans $[0, 1]$ et vérifiant : si a admet un successeur b, alors $f(a) = f(b)$.

3.1.3 Z-groupes

Soit M un modèle de la théorie des Z-groupes (ordonnés). Cette théorie élimine les quantificateurs dans le langage $\{0, 1, +, -, \leq, D_n\}_n$ où D_n est un prédicat défini par : $D_n(x) \leftrightarrow (\exists y) n.y = x$.

Un type p sur M est entièrement déterminé par l'ensemble des n tels que $p \vdash D_n(x)$ et la coupure induite sur M.

Définissons une mesure μ par : $\mu(D_{n_1}^{\epsilon_1} \wedge \cdots \wedge D_{n_k}^{\epsilon_k}) = 2^{-k}$ où les n_i sont des nombres premiers distincts, et $\mu(x > a) = 1$ pour tout $a \in M$. Alors μ est une mesure sans atome qui n'est pas lisse.

Si par contre on définit μ par $\mu(p_0) = 1$ où p_0 est un type sur $\emptyset$ et que la fonction de densité de μ (voir cas o-minimale) est continue, alors on obtient une mesure lisse sans atome.

§3.2 Mesures invariantes

Commençons par un rappel sur la mesure de Haar :

Proposition 3.2.1. *Soit G un groupe topologique compact, alors G admet une unique mesure borélienne de probabilité invariante par multiplication à gauche qui est aussi l'unique mesure invariante à droite.*

Si S est un espace topologique muni d'une action continue transitive de G, alors S admet une unique mesure borélienne de probabilité G-invariante.

Remarque 3.2.2. Supposons T stable et soit $p \in S(A)$. Alors les extensions globales non-déviantes de p sont conjuguées pas l'action de Aut_A.

Preuve. Considérons x et y deux éléments dans une extension élémentaire saturée de $\bar{M}$ réalisant p et telles que $\mathrm{tp}(x/\bar{M})$ et $\mathrm{tp}(y/\bar{M})$ ne dévient pas sur A. Il existe un A-automorphisme σ envoyant x sur y. Alors σ stabilise $\mathrm{acl}(A)$ et envoie $\mathrm{tp}(x/\mathrm{acl}(A))$ sur $\mathrm{tp}(y/\mathrm{acl}(A))$. On prend maintenant τ une extension à $\mathrm{Aut}_A(\bar{M})$ de $\sigma|_{\mathrm{acl}(A)}$. Alors, par stationnarité des types forts, τ envoie $\mathrm{tp}(x/\bar{M})$ sur $\mathrm{tp}(y/\bar{M})$. □

Ceci n'est plus vrai en général pour une théorie NIP (ou simple).

Proposition 3.2.3. *Supposons T stable. Soit $p \in S(A)$, alors p s'étend de manière unique en une mesure globale A-invariante.*

Preuve. Preuve 1

Construisons la mesure μ recherchée. On prend une extension globale non-déviante p' de p. Soit $\phi(x, a)$ une formule de $L(\bar{M})$. Soit $d_c\phi$ la définition de ϕ pour p', de paramètre canonique c. Alors c est dans $\mathrm{acl}^{eq}(A)$. De plus, les définitions de ϕ des autres extensions non-déviantes de p sont les $d_{c'}\phi$ pour c' conjugué de c sur A. Soit N le nombre de tels conjugués et soit k le nombre de conjugués c' tels que $\models d_{c'}\phi(a)$. On pose alors $\mu(\phi(x, a)) = k/N$. Cette valeur ne dépend que de $\mathrm{tp}(a/A)$ et ne dépend pas du choix de p'.

Remarquons qu'au lieu de prendre pour c exactement le paramètre canonique de $d\phi$, on aurait pu prendre n'importe quel uplet de $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ le contenant. L'additivité de μ découle facilement de cette remarque (prendre pour c l'union des paramètres canoniques de ϕ, ψ, $\phi \wedge \psi$ et $\phi \vee \psi$).

Pour l'unicité, notons d'abord qu'une mesure A-invariante ne dévie pas sur A.

On reprend les notations du début de la preuve.

Considérons $K = \mathrm{Aut}_A / \mathrm{Aut}_{Ac}$ et prenons $\sigma_1, \ldots, \sigma_N \in \mathrm{Aut}_A$ des représentants quelconques des N éléments de K. Notons $a_i := \sigma_i(a)$. Soit ν A-invariante et prolongeant p. Toutes les formules $\phi(x, a_i)$ ont même mesure par ν. Pour $j \in \{1 \ldots N\}$, notons $I_j = \{i \mid d_{\sigma_j(c)}\phi(a_i)\}$. Les ensembles I_j ont tous k éléments. On note de plus $\Phi_j = \bigwedge_{i \in I_j} \phi(x, a_i)$. Alors on a $\nu(\bigvee \Phi_j) = 1$ et les Φ_j sont deux-à-deux d'intersection négligeable. Ainsi $\nu(\Phi_j) = 1/N$. Puisque tous les $\phi(x, a_i)$ ont même mesure, il n'est pas difficile de voir que celle-ci doit être k/N.

Preuve 2

On utilise l'identité entre mesures sur les formules et mesures sur l'espace des types.

Considérons le groupe $G = \mathrm{Aut}_A(\mathrm{acl}^{eq}(A))$. C'est un groupe compact totalement discontinu. Ce groupe agit transitivement sur le fermé de $S(\mathrm{acl}^{eq}(A))$ des extensions de p. Ce dernier espace est ainsi en bijection naturelle avec G/H pour un sous-groupe fermé H (non nécessairement distingué). Il hérite donc de la mesure de Haar de G. Or, par stationnarité des types forts, $S(\mathrm{acl}^{eq}(A))$ est isomorphe à l'espace des fils globaux non déviants de p. D'où l'existence de la mesure invariante.

L'unicité découle de l'unicité de la mesure de Haar. □

Proposition 3.2.4. *(NIP) Soit $p \in S(A)$ ne déviant pas sur A. Alors p s'étend en une mesure globale A-invariante.*

Preuve. La preuve est une adaptation de la preuve 1 du cas stable. La mesure de Haar sur $\mathrm{Aut}_A(\mathrm{bdd}(A))$ nous donne —comme dans la preuve 2— une unique mesure λ A-invariante sur $S(\mathrm{bdd}(A))$. Seulement, cet espace n'est pas isomorphe à l'espace des fils non déviants. Il faut donc relever la mesure obtenue à ce dernier espace. Pour cela, on choisit une extension globale p'. Étant donnée une formule $\phi(x, a)$, on pose $\mu(\phi(x, a)) = \lambda(\{\sigma.a \mid \sigma \in \mathrm{Aut}_A, p' \models \phi(x, \sigma.a)\})$.

Autre manière de voir la même chose : Soit p' comme ci-dessus et soit $S_{p'}$ l'espace des conjugués de p' par Aut_A. Alors, le groupe compact $\mathrm{Aut}_A(\mathrm{bdd}(A))$ agit transitivement sur cet espace et le munit d'une mesure invariante induite par la mesure de Haar.

Remarquer que dans les deux cas, il faut vérifier que certains ensembles sont bien mesurables. On utilise pour cela la Borel-définissabilité des types invariants dans les théories NIP. □

Remarque 3.2.5. Une condition suffisante pour avoir unicité de la mesure globale A-invariante est que tout type compact détermine une unique extension non-déviante.

La preuve d'existence de mesures invariantes dans le cas des groupes fsg dont on parlera plus loin suit exactement le même schéma.

§3.3 Groupes de Grothendieck

Nous présentons ici un autre point de vue sur les mesures qui peut être utile dans la pratique. Pour simplifier les notations, nous ne considérons que des mesures d'arité 1, sans le préciser à chaque fois.

On emploie ici la notation X plutôt que ϕ pour désigner un élément de $\mathcal{L}(A)$. Soit A un ensemble de paramètres (éventuellement non borné), on définit $\mathcal{G}_0$ comme étant le groupe de Grothendieck engendré par $\mathcal{L}(A)$. Plus explicitement, $\mathcal{G}_0$ est formé des sommes formelles, à coefficents dans $\mathbf{Z}$, d'éléments de $\mathcal{L}(A)$. Soit $\mathcal{H}$ le sous-groupe distingué engendré par les $X+Y-(X\cup Y+X\cap Y)$ pour $X, Y \in \mathcal{L}(A)$. On pose $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0/\mathcal{H}$.

Pour $X \in \mathcal{L}(A)$, on note $[X]$ la classe de X dans $\mathcal{G}$. Un élément de $\mathcal{G}$ s'écrit ainsi $\Sigma_i n_i[X_i]$ pour des $n_i \in \mathbf{Z}$, où $[X] + [Y] = [X \cup Y] + [X \cap Y]$.

On note de plus V le cône formé des éléments de $\mathcal{G}$ qui admettent une écriture de la forme $\Sigma_i n_i[X_i]$ avec des n_i dans $\mathbf{N}$.

À partir d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(A)$, on construit un morphisme $f : \mathcal{G} \to \mathbf{R}$ en posant $f(\Sigma_i n_i[X_i]) = \Sigma_i n_i \mu(X_i)$. Ce morphisme vérifie $f(x) \geq 0$ pour $x \in V$ et $f(\bar{M}) = 1$. Inversement, à partir d'un f vérifiant ces deux propriétés, on définit une mesure μ par $\mu(X) = f([X])$. Ces deux correspondances sont inverses l'une de l'autre.

L'intérêt de ce point de vue est qu'on peut changer le groupe $\mathcal{G}$ pour travailler avec des mesures vérifiant certaines propriétés. Par exemple, si $\bar{M} =: G$ est muni d'une structure de groupe, on pourra considérer $\mathcal{G}_1$ égal à $\mathcal{G}$ quotienté par les relations $[X] - [g.X]$ pour $g \in \bar{M}$. On aura alors correspondance entre les morphismes $\mathcal{G}_1 \to \mathbf{R}$ normalisés et positifs sur V et les mesures de Keisler G-invariantes à gauche.

Chapitre 4

Types génériquement stables

§4.1 Notions de stabilité

On trouve dans les articles quelques définitions de types stables dans des théories instables. Dans l'étude des théories NIP, c'est la notion de type génériquement stable qui sera pertinente. Profitons néanmoins de l'occasion pour faire le point sur ce qui existe.

Cette section est indépendante du reste du mémoire (en particulier de la section suivante).

Commençons par discuter les notions d'ensembles stables.

Définition 4.1.1. Un sous-ensemble A de $\bar{M}$ est *stablement plongé* si tout sous-ensemble définissable de A est définissable avec paramètres dans A.

(On appelle ensemble définissable de A l'intersection avec A d'un ensemble définissable de $\bar{M}$.)

De manière équivalente, A est stablement plongé si tous les types sur A sont définissables. On voit donc qu'une théorie est stable si et seulement si tous les ensembles sont stablement plongés.

Dans le cas général, cette notion sera surtout utilisée pour A définissable ou type-définissable.

Proposition 4.1.2. *Soit X un ensemble type-définissable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *X est stablement plongé.*
2. *Pour tout a, il existe $X_0 \subseteq X$ borné tel que $\mathrm{tp}(a/X_0) \vdash \mathrm{tp}(a/X)$.*
3. *Pour tout a, $\mathrm{tp}(a/X)$ est définissable sur un X_0 borné.*
4. *Tout automorphisme de X_0 s'étend en un automorphisme de X.*

Définition 4.1.3. Un ensemble type-définissable X est *faiblement stable* s'il n'existe pas de formule $\phi(x, y)$ (à paramètres dans $\bar{M}$) et des $(a_i, b_i)_{i<\omega}$ uplets d'éléments de X tels que $\bar{M} \models \phi(a_i, b_j)$ si et seulement si $i \leq j$.

Définition 4.1.4. Un ensemble type-définissable X est *stable* (ou *pleinement stable*) s'il n'existe pas de formule $\phi(x, y)$ (à paramètres dans $\bar{M}$) et des $(a_i, b_i)_{i<\omega}$, ou les a_i sont des uplets d'éléments de X tels que $\bar{M} \models \phi(a_i, b_j)$ si et seulement si $i \leq j$.

Proposition 4.1.5. *Supposons, pour simplifier, T dénombrable. Soit X type-définissable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *X est pleinement stable.*
2. *Pour tout $A \subset \bar{M}$ dénombrable et toute formule $\phi(x, y)$, l'ensemble $\{\mathrm{tp}_\phi(c/A) \mid c \in X\}$ est dénombrable.*
3. *Pour tout A, le nombre de A-types réalisés dans X est inférieur à $|A|^{\aleph_0}$.*
4. *Pour tout A, le type d'un élément de X sur A est définissable.*

Proposition 4.1.6. *Supposons X $\emptyset$-définissable, alors X est pleinement stable si et seulement si X est faiblement stable et stablement plongé.*

Remarque 4.1.7. La notion appelée ici pleinement stable est souvent appelée *stable stablement plongé*.

Dans le cas NIP, les choses sont un peu plus simples.

Proposition 4.1.8. *Supposons* T *NIP, alors si l'ensemble type-définissable* X *est faiblement stable, il est pleinement stable.*

Dans le contexte NIP, on dira ainsi simplement que X est stable.

§4.2 Types génériquement stables

Revenons au cas des théories NIP.

EXERCICE 4.2.1. *(NIP) Soit* p *un type global non déviant sur* A.

1. *Supposons* p *définissable. Alors* p *est définissable sur* $\mathrm{acl}^{eq}(A)$. *En particulier, il est* $\mathrm{acl}^{eq}(A)$*-invariant.*
2. *Supposons* p *finiment satisfaisable dans un modèle borné. Alors* p *est finiment satisfaisable dans tout modèle contenant* A.

Proposition 4.2.2. *(NIP) Soit* p *un type global* A*-invariant. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Si* I *réalise* $p^{(\omega)}|_A$, *alors* $p = \mathrm{Lim}(I/\bar{M})$.
2. p *est définissable et finiment satisfaisable dans un modèle contenant* A.
3. *Toute suite de Morley de* p *sur* A *est totalement indiscernable.*
4. *Pour toute formule* $\phi(x,y)$, *il existe* N *tel que pour toute suite de Morley* $(a_i)_{i<\omega}$ *de* p *sur* A *et tout* c, *on a* $p \vdash \phi(x,c)$ *si et seulement si* $\models \bigvee_{w\subset 2N,|w|=N} \bigwedge_{i\in w} \phi(a_i,c)$.
5. *Pour tout* $B \supseteq A$ *borné,* p *est l'unique extension globale non-déviante de* $p|_B$.

Preuve. 1. $\Rightarrow$ 2. :

Soit $b \in \bar{M}$ tel que $p \models \phi(x,b)$. L'ensemble de formules suivant est inconsistant : $y \models tp(b/A) \wedge \bigwedge_i \neg\phi(a_i,y)$. Par compacité, il existe N et $\psi \in tp(b/A)$ tels qu'on ait : $\psi(y) \rightarrow \bigvee_{i=1..N} \phi(a_i,y)$. En particulier, pour tout $b \in \bar{M}$ vérifiant ψ, on a $p \models \phi(x,b)$. L'ensemble $\{q \in S(A) \mid p \models \phi(x,b)$ pour $b \models q\}$ est donc un ouvert. En appliquant le même raisonnement pour $\neg\phi$, on voit que c'est aussi un fermé. Ainsi p est définissable.

De plus, si M est un modèle contenant I, on voit que p est finiment satisfaisable dans M.

2. $\Rightarrow$ 3. :

Soit M un modèle contenant A tel que p est finiment satisfaisable dans M. Il suffit de prouver 3. avec M à la place de A. Soit donc $(a_i)_{i<\omega}$ une suite de Morley de p sur M. Montrons que pour tout n et $i \leq n$, a_i réalise la restriction de p à $Ma_0..a_{i-1}a_{i+1}..a_n$. Ceci suffira à montrer la totale indiscernabilité de (a_i) (connaissant déjà son indiscernabilité).

Le type $tp(a_{i+1},\dots,a_n/Ma_0,\dots,a_i)$ est finiment satisfaisable dans M. Puisque de plus $tp(a_i/a_0,\dots,a_{i-1},M)$ est définissable sur M, $tp(a_0..a_{i-1}a_{i+1}..a_n/Ma_i)$ est finiment satisfaisable dans M, ou encore $tp(a_i/Ma_0..a_{i-1}a_{i+1}..a_n)$ est un héritier de $p|_M$. Or p étant définissable sur M, $p|_M$ admet un unique héritier à tout $B \supseteq M$ et a_i réalise $p|(Ma_0..a_{i-1}a_{i+2}..a_n)$.

3. $\Rightarrow$ 4. :

Immédiat par compacité.

4. $\Rightarrow$ 1. :

Immédiat.

L'équivalence entre 5. et les autres est laissée en exercice. □

Définition 4.2.3. Un type global invariant vérifiant une des conditions équivalentes ci-dessus est dit *génériquement stable*.

Proposition 4.2.4. *Soit* p *type global* A*-invariant génériquement stable. Soit* a *une réalisation de* $p|_A$ *et* b *un élément de* $\bar{M}$ *tel que* $tp(b/A)$ *ne dévie pas sur* A*. Alors :*

1. $tp(b/Aa)$ *dévie sur* A *si et seulement si* $tp(a/Ab)$ *dévie sur* A.
2. $tp(b/A)$ *a une unique extension non déviante à* Aa.

Preuve. Supposons que $tp(b/Aa)$ ne dévie pas sur A. Soit $I = (a_i)$ une suite de Morley de p sur A avec $a_0 = a$. Soit ϕ à paramètres dans A telle que $\models \phi(a, b)$. Alors puisque b ne dévie pas sur a, on a $\phi(a_i, b)$ pour tout i. Si a_ω est une réalisation de p, on a donc $\phi(a_\omega, b)$. Ainsi $tp(a/Ab) = tp(a_\omega/Ab)$. On en déduit 2. et que $tp(a/Ab)$ ne dévie pas sur A.

Maintenant si $tp(a/Ab)$ ne dévie pas sur A, si b' réalise l'extension non déviante de $tp(b/A)$ à Aa. Alors $tp(a/Ab')$ ne dévie pas sur A par ce qui précède. Or $tp(a/A)$ admet une unique extension non déviante à tout ensemble de paramètres. Donc $tp(ab/A) = tp(ab'/A)$ et $tp(b/Aa)$ ne dévie pas sur A. □

Réciproquement, si un type vérifie ces deux propriétés, il est facile de voir qu'il est génériquement stable (montrer que $p^{(\omega)}$ est totalement indiscernable).

Remarque 4.2.5. Soit $p \in S(A)$ ne déviant pas sur A. Si p admet une extension non déviante génériquement stable, alors elle est $acl(A)$-invariante (et génériquement stable sur cet ensemble). Or toutes les extensions de p à $acl(A)$ sont conjuguées, donc toutes les extensions de p à cet ensemble sont génériquement stables, et toutes les extensions non déviantes de p sont génériquement stables et conjuguées sur A.

On dit alors que p est génériquement stable.

Comparons cette définition avec les notions de la section précédente. Prenons $p \in S(A)$ un type non déviant sur A et posons X l'ensemble des réalisations de p (On suppose T NIP). Si X est stable, alors toute suite indiscernable de réalisations de p est totalement indiscernable (sinon elle serait ordonnable, contredisant la stabilité de X). Ainsi p est génériquement stable.

La réciproque est par contre fausse. En effet, supposons p génériquement stable, et admettant une extension globale p' A-invariante pour se fixer les idées. Si $a \in X$, et $B \supset A$, alors on sait que *si* $tp(a/B)$ *ne dévie pas sur* A, alors $tp(a/B)$ est définissable. On voit que ceci est bien plus faible que 4.2.2, 4.. En fait, X est stable si et seulement si toutes les extensions, mêmes déviantes, de p sont génériquement stables.

Chapitre 5

Mesures II

L'objet de ce chapitre est de présenter un autre point de vue sur les mesures, de donner les outils nécessaires à une preuve simplifiée de l'unicité de la mesure invariante pour les groupes fsg suivant une idée d'Anand Pillay, et de répondre à une question de [HruPil] sur les types fsg.

On se place dans tout ce qui suit dans une théorie NIP.

§5.1 Généralités

Lemme 5.1.1. *Soit* $\Omega \subseteq \mathcal{L}_\alpha(A)$ *un ensemble de formules clos par intersection, union et complémentaire. On se donne* μ_0 *une mesure sur les éléments de* Ω*, c'est-à-dire un élément de* $[0,1]^\Omega$ *vérifiant, pour* $\phi, \psi \in \Omega$*,*

$$\mu_0(\phi \vee \psi) + \mu_0(\phi \wedge \psi) = \mu_0(\phi) + \mu_0(\psi).$$

Alors μ_0 *se prolonge en une mesure* μ *de* $\mathcal{M}_\alpha(A)$*.*

Preuve. Par compacité dans l'espace $[0,1]^{\mathcal{L}_\alpha(A)}$, il suffit de montrer que pour $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \mathcal{L}_\alpha(A)$ il existe une fonction $f : \langle \psi_1, \ldots, \psi_k \rangle \mapsto [0,1]$ compatible avec μ_0 et finiment additive (où $\langle A \rangle$ désigne l'algèbre de Boole engendrée par A). On peut supposer que $\psi_1, \ldots, \psi_k$ sont les atomes de l'algèbre de Boole B qu'ils engendrent.

Les éléments de Ω dans B forment une sous-algèbre de Boole. Notons $\phi_1, \ldots, \phi_r$ ses atomes. On a par exemple

$$\phi_1 = \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_{i_1} \ , \ \phi_2 = \psi_{i_1+1} \vee \cdots \vee \psi_{i_2} \text{ etc.}$$

Tout choix de f satisfaisant $f(\psi_1) + \cdots + f(\psi_{i_1}) = \mu_0(\phi_1)$ etc. convient. □

Donnons quelques exemples d'utilisation de ce lemme.

Soient μ et ν deux mesures sur A. Un *amalgame séparé* de μ et ν est une mesure λ en deux variables x et y vérifiant :

$$\lambda(\phi(x) \wedge \psi(y)) = \mu(\phi(x))\nu(\psi(y))$$

pour tous ϕ, ψ.

Le lemme 5.1.1 appliqué à $\Omega =$ "l'ensemble des unions finies de formules de la forme $\phi(x) \wedge \psi(y)$" donne l'existence d'un tel amalgame (il n'y a pas en général unicité).

Soit $\mu \in \mathcal{M}(M_0)$, alors μ admet un cohéritier $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(\bar{M})$.

On prend pour Ω l'ensemble des $\phi(x) \in \mathcal{L}_1(\bar{M})$ tels que $\phi(M_0)$ coïncide avec $f_\phi(M_0)$ pour un $f_\phi \in \mathcal{L}_1(M_0)$. Pour $\phi \in \Omega$, on pose $\mu_0(\phi) = \mu(f_\phi)$. Par le lemme μ_0 s'étend en $\bar{\mu}$ qui est la mesure recherchée.

Le raffinement suivant sera utile par la suite.

Lemme 5.1.2. *Soient $A \subseteq M_0$ avec M_0 $|A|^+$-saturé et soit $\mu \in \mathcal{M}(A)$. Il existe $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(\bar{M})$ étendant μ et telle que pour $\phi(x) \in \mathcal{L}(\bar{M})$, si $\bar{\mu}(\phi(x)) > 0$, il existe $a \in M_0$, $tp(a/A) \in S(\mu|_A)$ tel que $a \models \phi(x)$.*

Preuve. On note P l'ensemble des éléments de M_0 dont le type sur A est dans $S(\mu|_A)$. Soient $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}_1(A)$ tels que $\psi_1(P) = \psi_2(P)$. Alors $\mu(\psi_1 \triangle \psi_2) = 0$.

On pose Ω l'ensemble des $\phi(x) \in \mathcal{L}_1(\bar{M})$ tels que $\phi(P)$ coïncide avec un $f_\phi(P)$ pour un $f_\phi \in \mathcal{L}_1(A)$. Pour un tel ϕ, on pose $\mu_0(\phi) = \mu(f_\phi)$. Ceci est bien défini par la remarque précédente. □

§5.2 Points formels

On veut pouvoir manipuler les mesures exactement comme des types. Le problème principal qu'on rencontre alors est que les types peuvent être réalisés, alors que ce n'est pas le cas pour les mesures. Qu'à cela ne tienne, nous allons nous autoriser à réaliser les mesures par des points particuliers que nous appellerons *points formels*.

Comme leur nom l'indique il s'agit d'objets purement formels qui ne vivent dans aucun espace.

Nous noterons toujours les points formels avec des lettres soulignés : $\underline{a}, \underline{b}$.

Il s'agit juste d'une notation : au lieu d'écrire $\mu(\phi(x))$, on écrira $[\phi(\underline{a})]$ où $\underline{a}$ est un point formel qui réalise μ. Ici $\mu\phi(\underline{a})]$ indique la mesure de la formule $\phi(\underline{a})$. Ainsi, on peut intégrer des points formels en paramètres dans des formules ; ces formules sont alors vues comme ayant une valeur de vérité dans $[0, 1]$.

Si $\underline{a}$ réalise $\mu \in \mathcal{M}(\bar{M})$, on dit que μ est le type de $\underline{a}$ sur $\bar{M}$ et on écrit $tp(\underline{a}/\bar{M}) = \mu$.

Si μ est une mesure invariante et $\underline{b}$ un point formel de type ν, on peut considérer l'extension invariante $\mu|_{\bar{M}\underline{b}}$ de μ à $\bar{M}\underline{b}$: Si on réalise cette extension par $\underline{a}$, on aura, par définition, $[\phi(\underline{a}, \underline{b})] = \mu \ltimes \nu(\phi(x, y))$.

Se donner plusieurs points formels revient à se donner une mesure en plusieurs variables sur les paramètres existants.

Si μ est une mesure sur A et qu'on dispose déjà de n points formels $\underline{a}_i$ dont la mesure commune est $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, réaliser μ par un point formel $\underline{b}$ veut dire : On étend λ en une mesure en $n+1$ variables $\lambda'(x_1, \ldots, x_n, y)$ telle que la restriction de λ' à la dernière variable soit égale à μ. L'uplet $(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b})$ est alors un uplet de points formels réalisant λ'.

On dira aussi que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont séparés si $[\phi(\underline{a}) \wedge \psi(\underline{b})] = [\phi(\underline{a})].[\psi(\underline{b})]$ pour tous ϕ et ψ.

5.2.1 Localisation

Soit μ une mesure et $\psi(x)$ une formule telle que $\mu(\psi(x)) > 0$, on définit le localisé μ_ψ de μ en ψ comme étant la mesure définie par :

$$\mu_\psi(\phi(x)) = \frac{\mu(\phi(x) \wedge \psi(x))}{\mu(\psi(x))}.$$

Soient μ_y invariante et ν_x quelconque, et soient $\psi(y)$ et $\phi(x)$ des formules. On a $\nu \rtimes \mu_\psi = (\nu \rtimes \mu)_\psi$ et $\nu_\phi \rtimes \mu = (\nu \rtimes \mu)_\phi$. Il suffit pour le voir d'écrire les définitions.

De même, si $\underline{a}$ est un point formel de mesure μ et $\psi(x)$ est telle que $[\psi(\underline{a})] > 0$, on définit le localisé de $\underline{a}$ en ψ comme étant un point formel $\underline{a}_\psi$ de type μ_ψ.

Si on manipule plusieurs points formels en même temps, localiser un des points a toujours un sens lorsque les points sont séparés. Ainsi :

$$[\phi(\underline{a}_\psi, \underline{b})] := \frac{[\phi(\underline{a}, \underline{b}) \wedge \psi(\underline{a})]}{[\psi(\underline{a})]}.$$

Remarquons que, rigoureusement, il faudrait écrire quelque chose comme $(\underline{a}, \underline{b})_\psi$ au lieu de $(\underline{a}_\psi, \underline{b})$ car $tp(\underline{a}_\psi, \underline{b})$ ne dépend pas que de $tp(\underline{b})$ et $tp(\underline{a})$ pris indépendamment, mais bien de $tp(\underline{a}, \underline{b})$. On s'autorise néanmoins cette notation abusive lorsque $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont séparés (sans quoi, localiser $\underline{a}$ pourrait changer $\underline{b}$).

§5.3 Extensions de mesures

Définition 5.3.1. Soit μ une mesure sur $M\underline{a}$ où $\underline{a}$ est un uplet de points formels, et soit $M_0 \subseteq M$.

On dit que μ est finiment satisfaisable dans M_0, si pour tout localisé μ_ψ de μ ($\psi \in \mathcal{L}(M)$) et tout $\phi(x) \in L(M\underline{a})$, on a :

$$\inf_{a \in \psi(M_0)} [\phi(a)] \leq \mu_\psi(\phi(x)) \leq \sup_{a \in \psi(M_0)} [\phi(a)].$$

On dit que μ *hérite de* M_0, si pour tout $\phi(x, yz) \in L(M_0)$, tout $b \in M$ et tout localisé $\underline{a}_\psi$ de $\underline{a}$, on a :

$$\inf_{(a_1,a_2) \in \psi(M_0) \times M_0} \mu(\phi(x, a_1 a_2)) \leq \mu(\phi(x, \underline{a}_\psi b)) \leq \sup_{(a_1,a_2) \in \psi(M_0) \times M_0} \mu(\phi(x, a_1 a_2)).$$

De plus, si $A \subseteq M_0$ et P est un ensemble de types sur A, alors on dit que μ est P-finiment satisfaisable dans M_0 si elle est finiment satisfaisable dans $P(M_0)$.

Remarquer que si $tp(\underline{a}/\underline{b}M)$ est finiment satisfaisable, ou hérite, sur M_0, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont séparés.

Si $e_1, \ldots, e_n$ désignent des valeurs de vérité, on note $Moy(e_i) := \frac{1}{n}\#\{i \mid e_i = \text{Vrai}\}$.

Lemme 5.3.2. *(NIP) Soient* $\mu \in \mathcal{M}(M)$ *une mesure quelconque,* $\phi(x, y) \in \mathcal{L}(M)$*,* B *un borélien de* $S(M)$ *et* $\epsilon > 0$*. Il existe* $p_1, \ldots, p_n \in S(M)$ *tels que :*

$$\begin{array}{rll} & |\mu(B) - Moy(p_i \models B)| & \leq \epsilon \\ \textit{pour tout } b \in M, & |\mu(\phi(x, b)) - Moy(p_i \models \phi(x, b))| & \leq \epsilon. \end{array}$$

Preuve. La preuve suit celle du lemme 4.8 dans l'article [HruPil], qui démontre la même chose sans introduire de B.

Remarquons d'abord que si L et M sont dénombrables, le théorème VC appliqué à $\{\phi(x, b) \mid b \in M\} \cup \{B\}$, tel qu'exposé dans l'article, donne immédiatement le résultat.

Pour traiter le cas général, on commence par encadrer B par $F \subseteq B \subseteq O$ avec F fermé, O ouvert et $\mu(O \setminus F) \leq \epsilon$ (par régularité de μ). Le fermé F est égal à l'intersection des formules qui le contiennent. Un nombre dénombrable de ces formules a déjà une intersection de même mesure que F. De même pour O. On va maintenant restreindre L et M à des objets dénombrables ; on supposera toujours implicitement qu'on a gardé les éléments de langage et les paramètres intervenant dans ces formules, de telle sorte que le F et le O restreints aient toujours la même mesure.

Pour L_0 sous-langage dénombrable de L et M_0 sous-modéle dénombrable de M réduit à L_0, le théorème VC s'applique comme ci-dessus et donne l'existence de $p_1, \ldots, p_n \in S(M_0)$ approximant les mesures de F, O et des $\phi(x, b), b \in M_0$ à ϵ près. De plus le n est uniforme en L et en M_0.

On note $r = \#\{i \mid p_i \models F\}$ et $s = \#\{i \mid p_i \models O^c\}$.

Il n'existe qu'un nombre fini de valeurs possibles pour r et s. On peut donc supposer que ces valeurs sont les mêmes pour tous les L_0 et M_0.

Maintenant, on considère l'ensembles de formules constitué de : $Diag(M)$, des formules $a_1, \ldots, a_r \in F$, $a_{r+1}, \ldots, a_{r+s} \in O^c$ et pour tout $b \in M$ et tout k tel que $|\frac{k}{n} - \mu(\phi(x, b))| > \epsilon$, de la formule stipulant qu'il n'y a pas exactement k valeurs de i pour lesquels $a_i \models \phi(x, b)$.

Cet ensemble de formules est consistant par compacité. En posant $p_i = tp(a_i/M)$, on obtient ce qu'on veut. □

Lemme 5.3.3. *(NIP) Soit* M_0 *un modèle borné et* M, $|M_0|^+$*-saturée. Soit* p *type global* P*-finiment satisfaisable dans* M_0 *et* λ *une mesure sur* M. *Alors en réalisant* λ *par* $\underline{a}$, $p|_{M\underline{a}}$ *par* b, $tp(b/\underline{a}M_0)$ *est* P*-finiment satisfaisable dans* M_0.

Preuve. Soit $\phi(x,y) \in \mathcal{L}(M_0)$ telle que $[\phi(\underline{a},b)] := \lambda(\{a \mid p \models \phi(a,y)\}) > r$.

On pose $B = \{a \in M \mid p \models \phi(a,y)\}$, borélien de $S(M_0)$. Par le lemme précédent, il existe $a_1, \dots, a_n \in M$ tels que

$$|\lambda(B) - Moy(B(a_i))| < \epsilon$$

$$\forall b \in M_0, |\lambda(\phi(x,b)) - Moy(\phi(a_i,b))| < \epsilon.$$

Comme $p|_M$ est P-finiment satisfaisable dans M_0, il existe $b_0 \in P(M_0)$ tel que $\forall i \in \{1 \dots n\} \models \phi(a_i,b) \leftrightarrow \phi(a_i,b_0)$. Or $\models \phi(a_i,b) \leftrightarrow a_i \in B$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda(B) &\sim Moy(B(a_i)) \\ &= Moy(\phi(a_i,b)) \\ &= Moy(\phi(a_i,b_0)) \\ &\sim \lambda(\phi(x,b_0)). \end{aligned}$$

Donc $|\lambda(B) - \lambda(\phi(x,b_0))| < 2\epsilon$, or $\lambda(B) = [\phi(\underline{a},b)]$, donc pour ϵ assez petit, on a $[\phi(\underline{a},b_0)] > r$. Ce qu'il fallait démontrer.

La même preuve fonctionne pour tout localisé de $\underline{a}$. □

Lemme 5.3.4. *(NIP) Même résultat que le lemme précédent en remplaçant* p *par une mesure globale* μ.

Preuve. Soit $\phi(x,y)$ une formule et α tel que $\mu(x,\underline{a}) > \alpha$. Soient $\epsilon > 0$ et $p_1, \dots, p_n \in S(\bar{M})$ tels que :

$$\forall b \in \bar{M}, |\mu(\phi(a,y)) - Moy(p_i \models \phi(a,y))| < \epsilon.$$

On peut de plus demander que $p_1, \dots, p_n$ soient P-finiment satisfaisables dans M_0. Notons, pour $a \in \bar{M}$, $f_n(a) = \frac{1}{n}.Card\{k : p_k \models \phi(a,y)\}$.

Alors,

$$\begin{aligned} \int f(a) d\lambda_a &\leq \int f_n(a) d\lambda_a + \epsilon \\ &\leq \sup_k \lambda(\{a \mid p_k \models \phi(a,y)\}) + \epsilon \\ &\leq \sup_{b \in P(M_0)} \lambda(\phi(x,b)) + \epsilon. \end{aligned}$$

Il existe donc $b_0 \in P(M_0)$ tel que $[\phi(\underline{a},\underline{b})] < [\phi(\underline{a},b_0)] + 2\epsilon$. Et on peut conclure. □

Lemme 5.3.5. *Soit* p *invariant définissable sur* M_0, *et soit* λ *invariante réalisée par* $\underline{a}$. *Alors* p *admet un unique héritier à* $\underline{a}$.

Preuve. Soit $\phi(x,y)$ une formule et $d\phi(y)$ sa définition pour p. Si $\tilde{p}$ est un héritier de p sur $\underline{a}$, on a nécessairement $\tilde{p}(\phi(x,\underline{a}) \triangle d\phi(\underline{a})) = 0$, donc $\tilde{p}(\phi(x,\underline{a})) = \lambda(d\phi(y))$. □

Lemme 5.3.6. *Soit* M_0 *un modèle borné et* M, $|M_0|^+$*-saturée. Soit* μ *mesure sur* M *définissable sur* M_0. *On considére* $\underline{a}$ *réalisant* λ, *mesure quelconque sur* M *et* $\underline{b}$ *réalisant* μ. *On suppose que* $tp(\underline{b}/M\underline{a})$ *hérite de sa restriction à* M, *alors* $tp(\underline{b},\underline{a}/M) = \mu \ltimes \lambda$.

Preuve. Remarquer avant tout que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont séparés sur M.

Soit $\phi(x,y) \in \mathcal{L}(M)$ et M_1 un petit modèle contenant M_0 et les paramètres de ϕ.

Pour $r \in [0,1]$, on définit $B_r = \{a \in M \mid \mu(\phi(x,a)) \geq r\}$ et $D_r = \{a \in M \mid \mu(\phi(x,a)) = r\}$. Ce sont des fermés de $S(M_1)$ et $C_r \setminus D_r = \{a \in M \mid \mu(\phi(x,a)) > r\}$ est un ouvert.

Alors $E := \{r \in [0,1] \mid \lambda(D_r) > 0\}$ est dénombrable.

Supposons $[\phi(\underline{b},\underline{a})] > (\mu \ltimes \lambda)(\phi(x,y)) = \int \mu(\phi(x,a))d\lambda_a$.

Il existe $r_0 = 0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ tels que $r_i \notin E$ pour $0 < i < n$ et tels que

$$[\phi(\underline{b},\underline{a})] > \sum_{i=0}^{n-2} r_{i+1}\lambda(B_{r_i} \setminus B_{r_{i+1}}) + \lambda(B_{r_{n-1}}),$$

or

$$[\phi(\underline{b},\underline{a})] = \sum_{i=0}^{n-2} [\phi(\underline{b},\underline{a}) \wedge (B_{r_i} \setminus B_{r_{i+1}})(\underline{a})] + [\phi(\underline{b},\underline{a}) \wedge B_{r_{n-1}}(\underline{a})].$$

Ainsi un des termes de la première somme est plus grand que le terme correspondant dans la deuxième. Soit i l'indice d'un tel terme.

Si $i \in \{0,\dots,n-2\}$:

$$[\phi(\underline{b},\underline{a}) \wedge (B_{r_i} \setminus B_{r_{i+1}})(\underline{a})] > r_{i+1}\lambda(B_{r_i} \setminus B_{r_{i+1}}).$$

Si $i = 0$, on pose $C = (B_{r_i} \setminus B_{r_{i+1}})$, sinon, posons $C = (B_{r_i} \setminus (B_{r_{i+1}} \cup D_{r_i}))$.

Dans les deux cas C est un ouvert et $\lambda(B_{r_i} \setminus B_{r_{i+1}}) = \lambda(C)$.

Enfin, si $i = n-1$, on pose $C = B_{r_{n-1}} \setminus D_{r_{n-1}}$.

Ainsi $[\phi(\underline{b},\underline{a}) \wedge C(\underline{a})] > r_{i+1}[C(\underline{a})]$. Il existe $\psi \to C$ tel que : $[\phi(\underline{b},\underline{a}) \wedge \psi(\underline{a})] > r_{i+1}[\psi(\underline{a})]$. Par héritage, il existe $a_0 \in M$ tel que $[\phi(\underline{b},a_0)] > r_{i+1}$ et $\models \psi(a_0)$. Ainsi $a_0 \in C$ donc $a_0 \notin B_{r_{i+1}}$. Contradiction. □

Corollaire 5.3.7. *Soient μ et ν deux mesures globales invariantes. On suppose μ finiment satisfaisable sur M et ν définissable sur M, alors $\mu \ltimes \nu = \mu \rtimes \nu$.*

Preuve. Soient $\underline{a}$ réalisant ν et $\underline{b}$ réalisant $\mu|_{\bar{M}\underline{a}}$. Par 5.3.4, $tp(\underline{b}/\bar{M}\underline{a})$ est finiment satisfaisable dans M, donc $tp(\underline{a}/\bar{M}\underline{b})$ hérite de $\bar{M}$. Par 5.3.6, $tp(\underline{a}/\bar{M}\underline{b}) = \mu|_{\bar{M}\underline{b}}$. Ce qu'il fallait démontrer. □

§5.4 Suites indiscernables

Définition 5.4.1. Une suite $(\underline{a}_i)_{i<\alpha}$ de points formels est dite A-*indiscernable* si pour tous $i_1 < \cdots < i_n$, $j_1 < \cdots < j_n$, on a

$$tp(\underline{a}_{i_1},\dots,\underline{a}_{i_n}/A) = tp(\underline{a}_{j_1},\dots,\underline{a}_{j_n}/A).$$

Lemme 5.4.2. *(NIP) Soit $\phi(x,y)$ une formule et $\epsilon > 0$, il n'existe pas de suite $(\underline{a}_i)_{i<\omega}$ indiscernable et de $\underline{b}$ tels que $|[\phi(\underline{b},\underline{a}_i)] - [\phi(\underline{b},\underline{a}_{i+1})]| \geq \epsilon$ pour tout $i < \omega$.*

Preuve. Supposons qu'on puisse trouver de tels $(\underline{a}_i)$ et $\underline{b}$. On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite qu'il existe $r \in [0,1]$ et $\epsilon' > 0$ tels que pour tout i :

$$[\phi(\underline{b},\underline{a}_{2i})] \geq r + \epsilon'$$
$$[\phi(\underline{b},\underline{a}_{2i+1})] \leq r - \epsilon'$$

On peut de plus supposer que $((\underline{a}_{2i},\underline{a}_{2i+1}))_{i<\omega}$ est $\underline{b}$-indiscernable.

Alors pour tout $r < \omega$

$$[\bigwedge_{i=0}^{k-1} (\phi(\underline{b},\underline{a}_{2i}) \setminus \phi(\underline{b},\underline{a}_{2i+1}))] > 0. \tag{5.1}$$

En effet, pour $k = 1$, c'est clair. Soit k minimal tel que cette mesure vaille 0.

Pour $n < \omega$ on note $\psi_n = \bigwedge_{i=n(k-1)}^{(n+1)(k-1)-1} (\phi(\underline{b},\underline{a}_{2i}) \setminus \phi(\underline{b},\underline{a}_{2i+1}))$.

Alors $[\psi_n] = [\psi] > 0$ et $[\psi_n \wedge \psi_m] = 0$ pour $n \neq m$. Ceci est impossible.

Pour $I \subseteq \omega$ il existe alors $\underline{b}_I$ tel que

$$\begin{array}{ll} [\phi(\underline{b}_I, \underline{a}_i)] \geq r + \epsilon' & \text{si } i \in I \\ [\phi(\underline{b}_I, \underline{a}_i)] \leq r - \epsilon' & \text{si } i \notin I \end{array}$$

avec de plus l'équivalent de 5.1 (On obtient $tp(\underline{b}_I/\underline{a}_i)$ en considérant $tp(\underline{b}, \underline{a}_i')$ pour une sous-suite $(\underline{a}_i')$ de $(\underline{a}_i)$).

On place les $\underline{b}_I$ de telles sorte à ce qu'ils soient séparés les uns des autres (cf 5.1).

Soit $N < \omega$, $[\bigwedge_{J \subseteq N} \bigwedge_{i<N} \phi(\underline{b}_J, \underline{a}_i)^{\langle i \in J \rangle}] > 0$. La formule $\bigwedge_{J \subseteq N} \bigwedge_{i<N} \phi(b_J, a_i)^{\langle i \in J \rangle}$ est donc consistante. Ainsi ϕ a la propriété d'indépendance. □

Par compacité, il existe donc $N = N_{\phi,\epsilon}$ tel que si $(\underline{a}_i)$ est indiscernable, il n'existe pas de $\underline{b}$ tel que $|[\phi(\underline{b}, \underline{a}_i)] - [\phi(\underline{b}, \underline{a}_{i+1})]| \geq \epsilon$ pour $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Corollaire 5.4.3. *(NIP) Soit $\underline{b}$ un point formel $(\underline{a}_i)_{i<\omega}$ A-indiscernable, et $\phi(x, y) \in \mathcal{L}(A)$, alors $[\phi(\underline{a}_i, \underline{b})]$ admet une limite lorsque i tend vers $+\infty$.*

On note le type limite ainsi défini $Lim(\underline{a}_i/\underline{b})$.

Comme pour les vrais types, si $(\underline{a}_i)$ est *totalement* indiscernable, si $r \in [0, 1]$, $\epsilon > 0$, et $Lim(\underline{a}_i/\underline{b})(\phi) \geq r + \epsilon$, il existe au plus $N = N_{\phi,\epsilon}$ indices j dans dans $\{0, \ldots, 2N\}$ vérifiant $[\phi(\underline{b}, \underline{a}_i)] \leq r - \epsilon$.

Les résultats sur les types invariants s'étendent naturellement aux mesures.

Proposition 5.4.4. *Soit μ une mesure A-invariante, alors μ est déterminée par $\mu^{(\omega)}|_A$: μ est le type éventuel de sa suite de Morley.*

§5.5 Mesures génériquement stables

Définition 5.5.1. Soit μ mesure globale A-invariante, μ est dite *génériquement stable* si elle est définissable et finiment satisfaisable dans un modèle borné M_0.

Proposition 5.5.2. *Soit μ A-invariante, alors μ est génériquement stable si et seulement si sa suite de Morley $\mu^{(\omega)}$ est totalement indiscernable.*

Preuve. On sait déjà que si μ est génériquement stable, $\mu \rtimes \mu = \mu \ltimes \mu$ donc $\mu^{(\omega)}$ est totalement indiscernable.

Reciproquement, supposons $\mu^{(\omega)}$ totalement indiscernable. Alors comme dans le cas des types, pour toute réalisation $(\underline{a}_i)$ de $\mu^{(\omega)}|_A$ et tout b, $Lim(\underline{a}_i/Ab) = \mu|_{Ab}$. Soient $b \in \bar{M}$ tels que $s := \mu(\phi(x, b)) > r$.

On prend $\epsilon < s - r$.

Pour un N assez grand, l'ensemble suivant est inconsistant :

$$\begin{array}{rl} & tp(\underline{a}_i/A) = \mu^{(\omega)}|_A \\ & tp(b/A) \\ \exists i_1 < \cdots < i_N < 2N & [\phi(\underline{a}_i, b)] \leq r - \epsilon \end{array}$$

Ainsi, par compacité, il existe $\psi \in tp(b/A)$ tel que tout élément b' vérifiant ψ vérifie aussi $\mu(\phi(x, b')) > r - \epsilon > r$. Ceci montre que $\{b \in \bar{M} \mid \mu(\phi(x, b)) > r\}$ est un ouvert et que μ est définissable sur A.

Maintenant, montrons que μ est finiment satisfaisable dans tout modèle M_0 contenant A.

Soit $\phi(x,b)$ telle que $\mu(\phi(x,b)) > 0$. On réalise par $(\underline{a}_i)$ le cohéritier de $\mu^{(\omega)}|_{M_0}$ à $M_0 b$. Alors, puisque $\mathrm{Lim}(\underline{a}_i/b) = \mu$, il existe i tel que $[\phi(\underline{a}_i, b)] > 0$. Par cohéritage, il existe $a \in M_0$ tel que $\models \phi(a,b)$.

(Par le lemme 5.1.2, si on suppose M_0 $|A|^+$-saturé, on peut demander de plus à ce que $\mathrm{tp}(a/A)$ soit dans $S(\mu|_A)$). □

Proposition 5.5.3. *Soit* μ A*-invariant génériquement stable et* ν *invariante, alors* $\mu \ltimes \nu = \mu \rtimes \nu$.

Preuve. On considère $(\underline{a}_i/\underline{b})$ réalisant $\mu^{(\omega)} \rtimes \nu$ et $\underline{a}_\omega$ tel que $\mathrm{tp}(\underline{a}_\omega, \underline{b}) = \mu \ltimes \nu$. Par générique stablité, $\mathrm{Lim}(\underline{a}_i/\underline{b}) = \mathrm{tp}(\underline{a}_\omega/\underline{b})$. Mais par construction, pour tout $i \neq j$, $\mathrm{tp}(\underline{a}_i/\underline{b}) = \mathrm{tp}(\underline{a}_j/\underline{b})$, donc $\mathrm{tp}(\underline{a}_0/\underline{b}) = \mathrm{tp}(\underline{a}_\omega/\underline{b})$ et $\mu \rtimes \nu = \mu \ltimes \nu$. □

Proposition 5.5.4. *Si* μ *est* A*-invariant et génériquement stable, alors pour tout* $B \supseteq A$*,* μ *est l'unique extension* B*-invariante de* $\mu|_B$.

Preuve. Il suffit de le montrer pour $B = A$.

Soit ν A-invariante telle que $\nu|_A = \mu|_A$. On montre $\mu^{(n)} \rtimes \nu|_A = \mu^{(n)} \rtimes \mu|_A$ pour tout n. Ainsi on aura $\mu^{(\omega)}|_A = \nu^{(\omega)}|_A$, donc $\mu = \nu$.

Pour $n = 1$, c'est clair.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
\mu^{(n+1)} \rtimes \nu &= \mu^{(n)} \rtimes (\mu \rtimes \nu) \\
&= \mu^{(n)} \rtimes (\mu \ltimes \nu) \text{ par 5.5.3} \\
&= \mu^{(n)} \rtimes (\mu \ltimes \mu) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \mu^{(n+2)} \text{ par totale indiscernabilité.}
\end{aligned}$$

□

Définition 5.5.5. Soit $p \in S(A)$, p est dit *fsg* s'il existe $p' \in S(\bar{M})$ étendant p tel que pour tout modèle M_0 contenant A $|A + \aleph_0|^+$-saturé et tout $\phi(x) \in \mathcal{L}(\bar{M})$ tel que $p' \models \phi(x)$, il existe $a \in M_0$ tel que $\mathrm{tp}(a/A) = p$ et $a \models \phi(x)$.

Proposition 5.5.6. *Soit* μ A*-invariante telle que* $\mu|_A = p$ *est un type. Alors* μ *est génériquement stable si et seulement si* p *est fsg.*

Preuve. Si μ est génériquement stable, p est fsg par la remarque à la fin de la démonstration de 5.5.2 (Prendre pour p' n'importe quel type de $S(\mu)$).

Réciproquement, supposons p fsg. Soit λ A-invariante obtenu à partir de p' comme dans l'article (Proposition 4.7 racontée ici en 3.2.4). Nous allons montrer que $\lambda^{(\omega)}$ est totalement indiscernable.

Soit $n < \omega$. Soit $M_0 \supset A$ $|A + \aleph_0|^+$-saturé. Par construction, λ est p-finiment satisfaisable dans M_0. Soit $(\underline{a}_i)$ réalisant $\lambda^{(n+1)}|_{M_0}$. Alors par 5.3.4 $\mathrm{tp}(\underline{a}_n/\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{n-1})$ est p-finiment satisfaisable dans M_0.

Soit donc $\phi(x,y) \in \mathcal{L}(A)$ telle que $[\phi(\underline{a}_n, \underline{a}_0 \dots \underline{a}_{n-1})] = r$. On a :

$$\inf_{a \in p(M_0)} [\phi(a, \underline{a}_0 \dots \underline{a}_{n-1}] \leq r \leq \sup_{a \in p(M_0)} [\phi(a, \underline{a}_0 \dots \underline{a}_{n-1}].$$

Mais par A-invariance de $\lambda^{(n)}$, le sup et l'inf sont égaux et pour tout $a \in p(M_0)$, $\mathrm{tp}(a/\underline{a}_0 \dots \underline{a}_{n-1}) = \mathrm{tp}(\underline{a}_n/\underline{a}_0 \dots \underline{a}_{n-1})$. Ce qui donne $\lambda \rtimes \lambda^{(n)} = \lambda \ltimes \lambda^{(n)}$. Ceci étant vrai pour tout n, on en déduit que $\lambda^{(\omega)}$ est totalement indiscernable.

Ainsi λ est génériquement stable et A-invariante, donc par 5.5.4, $\lambda = \mu$ et μ est génériquement stable. □

On obtient en corollaire une réponse à la question 8.10 (ii) de [HruPil]

Corollaire 5.5.7. *Soit* $p \in S(A)$ *fsg, alors il existe une unique mesure globale* μ A*-invariante et prolongeant* p.

Chapitre 6

Groupes

On travaille a priori dans une théorie quelconque, G désigne un groupe $\emptyset$-définissable.

Définition 6.0.8. Le groupe G est *fsg* (à générique finiment satisfaisable) s'il existe un type global p et un modèle borné M_0 tel que $p \vdash x \in G$ et tel que tout translaté à gauche $gp = \{\phi(x) \mid \phi(g^{-1}) \in p\}$ de p ($g \in G$) est finiment satisfaisable dans M_0.

Tout groupe stable est $\mathtt{fsg}$.

Définition 6.0.9. Un ensemble définissable X de G est *générique à gauche* si un nombre fini de translatés à gauche de X recouvre G. De même pour générique à droite.

Un type p est *générique à gauche* si toutes ses formules le sont.

Proposition 6.0.10. *Soit G $\mathtt{fsg}$, alors :*

1. *Un ensemble définissable est générique à gauche si et seulement s'il est générique à droite.*
2. *Un ensemble définissable est générique si et seulement si tous ses translatés (à gauche) intersectent M_0.*
3. *Si $X = X_1 \cup X_2$ est générique, alors X_1 ou X_2 est générique.*

Si G est un groupe définissable et A un ensemble borné de paramètres, on note G^{00}_A l'intersection des sous-groupes type-définissables sur A d'indice borné dans G. Ces sous-groupes ont tous un indice inférieur à $(|T| + |A|)^+$. Lorsque A augmente, G^{00}_A peut diminuer. Si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire s'il existe A_0 tel que $G^{00}_{A_0}$ est minimal parmi les G^{00}_A, on dit que G^{00} existe et on pose $G^{00} = G^{00}_{A_0}$.

Exercice 6.0.11. *Soit G un groupe définissable (ou type-définissable), alors G^{00} existe si et seulement s'il existe un cardinal $\kappa < \bar{\kappa}$ tel que pour tout A, l'indice de G^{00}_A dans G est inférieur à κ.*

Exemple 6.0.12. *Soit G un groupe définissablement compact défini dans un corps réel clos, par exemple $G = \mathcal{U}$, le groupe des complexes de module 1 tel que défini dans un corps réel clos $\mathcal{R}$ très saturé. Alors G^{00} est le groupe des infinitésimaux de G. Il est d'indice $2^{\aleph_0}$.*

Le quotient G/G^{00} est, dans notre exemple, isomorphe à $\mathbf{R}/\mathbf{N}$ muni de sa topologie naturelle.

Théorème 6.0.13 (Shelah)**.** *Si G est NIP, alors G^{00} existe.*

Soit p un type de G, on définit $\mathrm{Stab}(p)$, le stabilisateur de p comme étant le sous-groupe des $g \in G$ vérifiant $g.p = p$. Il ne satisfait a priori aucune condition de définissabilité.

Proposition 6.0.14. *Supposons G $\mathtt{fsg}$, alors G^{00} existe. De plus, si p est un type global générique de G, alors $\mathrm{Stab}(p) = G^{00}$ (en particulier, ce stabilisateur est type-définissable).*

§6.1 Mesure invariante

On suppose ici que G est un groupe définissable dans une théorie T NIP.

Le groupe G agit sur l'espace des mesures de Keisler sur G par $g.\mu(\phi(x)) = \mu(\phi(g^{-1}.x))$.

Une mesure de μ sur G est *invariante* si $g.\mu = g$ pour tout $g \in G$. On s'intéresse aux questions de l'existence et de l'unicité d'une telle mesure invariante.

Avant d'énoncé les résultats principaux, faisons une analyse de la situation. On suppose que G admet une mesure μ invariante.

Soit X un ensemble générique (à gauche), alors nécessairement, on a $\mu(X) > 0$. En particulier, μ contient tous les types génériques dans son support.

Notons π la projection de G sur G/G^{00}. Le poussé en avant de μ par π engendre une mesure borélienne invariante sur G/G^{00}. Ce groupe étant compact, il admet une unique mesure invariante ν (sa mesure de Haar). Ainsi la mesure par μ d'un ensemble type-définissable G^{00}-saturé est imposée par ν. De plus si X est tel que $\nu(\pi(X)) = 0$, alors nécessairement, $\mu(X) = 0$.

On a même mieux. Soit X un ensemble définissable de G vérifiant : pour ν-presque tout $b \in G/G^{00}$, on a

$$(\pi^{-1}(b) \subseteq X) \vee (\pi^{-1}(b) \cap X = \emptyset). \tag{6.1}$$

La mesure de X par μ est alors aussi imposée par ν : elle doit être égale à $\nu(\pi(X))$. En effet, l'hypothèse se traduit par : $\nu(\pi(X \triangle \pi^{-1}(\pi(X)))) = 0$. Donc par ce qui précède, $\mu(X \triangle \pi^{-1}(\pi(X))) = 0$.

Dans le cas où tous les ensembles définissables vérifient (6.1), on dit que G est *compactement dominé* (par G/G^{00}). On a ainsi la proposition suivante :

Proposition 6.1.1. *Si* G *est compactement dominé, il existe une unique mesure invariante sur* G.

De plus, G *est* fsg.

Preuve. L'unicité découle de ce qui précède.

Pour l'existence, il suffit de vérifier qu'en posant, pour X ensemble définissable, $\mu(X) = \nu(\pi(X))$, on obtient une mesure invariante. Seul l'additivité est à voir. Soient donc X_1 est X_2 deux ensembles définissables disjoints. On veut voir que $\nu(\pi(X_1) \cap \pi(X_2)) = 0$, mais ceci découle de l'hypothèse de domination compacte.

Montrons que G est fsg.

Montrons d'abord que pour tout X définissable, $\mu(X) > 0$ si et seulement si X est générique. Un sens a déjà été montré dans le cas général. Pour l'autre, supposons $\mu(X) > 0$. Il existe alors $b \in G/G^{00}$ tel que $\pi^{-1}(b) \subseteq X$. Ainsi X contient une classe latéral de G^{00}. L'ensemble X a donc un nombre borné de translatés, par compacité, X est générique.

On obtient ainsi que si $X_1 \cup X_2$ est générique (à gauche), alors X_1 ou X_2 l'est aussi. Ceci implique l'existence d'un type générique p.

Soit M_0 un modèle borné contenant au moins un élément par classe à gauche de G^{00}. Par ce qui précède, tout ensemble générique intersecte M_0. En particulier, p, ainsi que tous ses translatés qui sont tout autant génériques, est finiment satisfaisable dans M_0. Le groupe G est donc bien fsg. □

En fait, c'est surtout des formes de réciproque à cette proposition qui sont utilisées en pratique. Cependant, nous n'aborderons pas ce problème ici.

Exemple 6.1.2. *Reprenant l'exemple précédent, le groupe* $\mathcal{U}$ *est compactement dominé. Il admet donc une unique mesure invariante, qui est la mesure naturelle. Il est aussi* fsg.

Comment faire lorsque G n'est pas compactement dominé pour relever la mesure de Haar de G/G^{00} à G ? En regardant les choses dans l'espace des types $S(G)$, il s'agit de prendre, par exemple, de manière naturelle un type dans chaque classe latérale de G^{00}. Dans le cas où G est fsg, l'ensemble des conjugués d'un type générique est un bon candidat. C'est effectivement ce qu'on fait pour prouver la proposition suivante.

Proposition 6.1.3. *(NIP) Soit* G *un groupe définissable* fsg*, alors* G *admet une mesure globale invariante.*

Preuve. On considère p un type global générique. On définit alors $\mu_p(\phi(x)) = \nu(\{g \in G/G^{00} \mid g.p \vdash \phi(x)\})$ où ν désigne la mesure de Haar sur G/G^{00}.

On peut montrer que cette définition a un sens, c'est-à-dire que l'ensemble dont on prend la mesure est un borélien. Il est alors clair qu'on obtient une mesure invariante. □

La mesure construite comme expliqué ci-dessus est générique, au sens où un ensemble définissable est de mesure non nul si et seulement s'il est générique. Le support de cette mesure est exactement l'ensemble des types génériques.

§6.2 Unicité de la mesure invariante pour G fsg

Comme suggéré par le titre de cette section, nous allons expliquer la preuve du résultat suivant.

Théorème 6.2.1. *(NIP) Soit* G *un groupe* fsg*, alors* G *admet une unique mesure globale invariante à gauche qui est aussi l'unique mesure globale invariante à droite.*

Lemme 6.2.2. *(NIP) Soit* G *un groupe définissable sur un modèle* M_0 *et* μ *une mesure de Keisler de* G *sur* M_0 *qui est* G*-invariante (à gauche). Alors il existe une mesure globale* μ' G*-invariante qui étend* μ *et un modèle* M *tel que* μ' *est l'unique mesure* G*-invariante qui étend* $\mu'|_{M_0}$*. La mesure* μ' *est de plus définissable et finiment satisfaisable.*

Preuve. Ce lemme se prouve comme la proposition 3.0.24. □

On a maintenant tous les éléments pour prouver le théorème.

On sait que G admet une mesure globale invariante à gauche. Soient μ et λ deux telles mesures. Nous allons montrer que $\mu = \lambda^{-1}$. Soit X un sous-ensemble définissable de G. Soit M_0 un modèle au-dessus duquel G et X sont définis. Soient μ'' et M comme en 6.2.2 ; on peut supposer que $M_0 = M$. Puisqu'on ne s'intéresse qu'à la mesure de X, on peut supposer que $\mu = \mu''$. En particulier, μ est définissable et finiment satisfaisable, donc génériquement stable. De même, on peut supposer λ définissable (invariant est en fait suffisant). Par 5.5.3, on a $\mu \ltimes \lambda = \mu \rtimes \lambda$.

Soit $Z = \{(x,y) \in G \times G \mid x \in yX\} = \{(x,y) \in G \times G \mid y \in xX^{-1}\}$. On a $(\mu \ltimes \lambda)(Z) = \int \mu(yX) d\lambda = \mu(X)$ car μ est invariante. De même, on a $(\lambda \ltimes \mu)(Z) = \int \lambda(xX^{-1}) d\mu = \lambda(X^{-1})$.

On a donc bien montré que $\lambda = \mu^{-1}$. Ceci est vrai en particulier pour $\mu = \lambda$, d'où on déduit que μ est invariante à droite. Le théorème en découle immédiatement.

Chapitre 7

Exemple des corps valués

Nous montrons ici les divers résultats annoncés en 2.1.15 sur les théories de corps valués. Ces faits sont habituellement montrés à partir d'une analyse des types, en comptant les cohéritiers. Nous employons ici une méthode plus directe, mais qui a le défaut de ne rien nous dire d'autre.

On pourra trouver des démonstrations des théorèmes cités dans [Del] ou [Bel].

Plusieurs langages sont utiles pour étudier les théories de corps valués. Le langage naturel L_{nat} est composé de trois sortes : le corps valué $(K, 0, 1, +, -, \cdot)$, le corps résiduel $(\mathbf{k}, 0, 1, +, -, \cdot)$ et le groupe de valeur $(\Gamma, 0, +, \leq)$, avec une application valuation $v : K^\times \to \Gamma$ et res : $\mathcal{O}_K \to \mathbf{k}$ où $\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$.

Un langage plus simple, mais ayant le même pouvoir d'expression est le langage à une sorte $L_{div} = \{0, 1, +, -, \cdot, |\}$ où $|$ est interprété par : $a \mid b \leftrightarrow v(a) \leq v(b)$.

Définition 7.0.3. Une application coefficient angulaire est une application ac : $K \to \mathbf{k}$, morphisme de groupes multiplicatifs et telle que $\mathrm{ac}(x) = \mathrm{res}(x)$ dès que $v(x) = 0$.

Tout corps valué suffisamment saturé admet une application coefficient. On supposera donc toujours que le corps dans lequel on travaille en est muni.

Lemme 7.0.4. *Soit* $P(X) = \Sigma a_k.X^k$ *un polynôme et* (x_i) *une suite d'éléments de* K *telle que* $(v(x_i))$ *soit strictement monotone, alors il existe* r *tel que, à partir d'un certain rang,* $v(P(x_i)) = v(a_r x_i^r) < v(a_k x_i^k)$ *pour* $k \neq r$. *En particulier,* $\mathrm{ac}(P(x_i)) = \mathrm{ac}(a_r).\mathrm{ac}(x_i)^r$.

Preuve. Pour $k > k'$, on a :

$$(v(a_k x_i^k) < v(a_{k'} x_i^{k'})) \leftrightarrow (v(x_i) < \frac{v(a_{k'}) - v(a_k)}{k - k'}).$$

La suite $v(x_i)$ étant strictement monotone, il existe i_0 à partir duquel ces inégalités ne changent plus de valeur de vérité. De même, pour $k \neq k'$, l'égalité $v(a_k x_i^k) = v(a_{k'} x_i^{k'})$ n'est possible que pour au plus une valeur de i. □

Lemme 7.0.5. *Soit* $(x_i)_{i<\omega}$ *une suite indiscernable d'éléments de* K *et* $P \in K[X]$. *Alors, soit il existe* $(\alpha_i) \in \Gamma^\omega$ *une suite indiscernable ne dépendant que de* (x_i), $r < \omega$, *et* $\gamma \in \Gamma$ *tels que, à partir d'un certain rang,* $v(P(x_i)) = \gamma + r.\alpha_i$.

De même, il existe $(b_i) \in \mathbf{k}^\omega$ *indiscernable ne dépendant que de* (x_i), $Q \in \mathbf{k}[X]$, *tels que, à partir d'un certain rang* $\mathrm{ac}(P(x_i)) = Q(b_i)$.

Preuve. On distingue quelques cas.

a) La suite $(v(x_i))$ est strictement monotone.
C'est immédiat par le lemme 7.0.4.

b) La suite $(v(x_i))$ est constante.

Il existe un polynôme DP tel que $\mathsf{P}(a+x) = \mathsf{P}(a) + \mathsf{DP}(x)$. Notons $y_i = x_i - x_0$. On a pour tout i : $\mathsf{P}(x_i) = \mathsf{P}(x_0) + \mathsf{DP}(y_i)$.

b1) La suite $(\nu(y_i))$ est strictement monotone.

On conclut par le lemme 7.0.4 appliqué à $\mathsf{P}(x_0) + \mathsf{DP}$ et (y_i).

b2) La suite $(\nu(y_i))$ est constante, égale à un ν_0.

Par indiscernabilité, $\nu(x_i - x_0) = \nu_0$ pour tout i et même $\nu(x_j - x_i) = \nu_0$ pour tout $i \neq j$. On écrit :

$$\mathsf{P}(x_i) = \mathsf{P}(x_0) + \mathsf{DP}(y_i) =: \Sigma a_k.y_i^k.$$

On a alors $\nu(y_j - y_i) = \nu_0 = \nu(y_i)$ donc $\mathrm{ac}(y_i) \neq \mathrm{ac}(y_j)$ pour tout $i \neq j$.

Montrons que la suite $\nu(\mathsf{P}(x_i))$ est stationnaire égale à $\min(\nu(a_k + k.\nu_0)) =: \nu(a_r) + r.\nu_0$. Si ce n'était pas le cas, il existerait une infinité d'indices pour lesquels des simplifications auraient lieu. Plus précisément, supposons pour simplifier les notations que les $\nu(a_k.y_i^k)$ pour $a_k \neq 0$ sont tous égaux, alors pour une infinité de i, on a $\Sigma_k \mathrm{ac}(a_k)\,\mathrm{ac}(y_i)^k = 0$. Mais ceci est impossible car les $\mathrm{ac}(y_i)$ sont tous distincts. □

§7.1 ACVF

On appelle ACVF la théorie des corps valués algébriquement clos (de caractéristique quelconque). On rappelle le résultat suivant.

Théorème 7.1.1. *La théorie ACVF élimine les quantificateurs dans le langage* L_{div}.

On va montrer :

Proposition 7.1.2. *La théorie ACVF est NIP.*

Preuve. Nous devons montrer que toute formule de la forme $\phi(x, y)$ où x est une seule variable, est NIP. Au vue des résultats 2.1.6, 2.1.8 et compte tenu de 7.1.1, il suffit de le montrer pour les formules atomiques sans quantificateurs dans L_{div}. Il suffit donc de le faire pour les formules suivantes :

$$\mathsf{P}(x, y) = 0, \text{ pour } \mathsf{P} \in \mathsf{K}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}],$$

$$\nu(\mathsf{P}(x, y)) \geq 0 \text{ pour } \mathsf{P} \in \mathsf{K}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}].$$

On utilise pour cela la caractérisation donnée par 2.1.7.

Soit (x_i) une suite indiscernables d'éléments de K, il s'agit de montrer que la formule $\nu(\mathsf{P}(x_i)) \geq 0$ a une valeur de vérité stationnaire. Or ceci découle directement du lemme 7.0.5.

De plus, il est évident que toute formule de la forme $\mathsf{P}(x) = 0$ a une valeur de vérité stationnaire lorsqu'on l'évalue sur les x_i. □

§7.2 Corps Henséliens de caractéristique nulle

On se place ici dans le langage $\mathsf{L}_{Pas} = \mathsf{L}_{nat} \cup \{\mathrm{ac}\}$. On considère T_1 une théorie de groupes abéliens ordonnés et T_2 une théorie de corps de caractéristique nulle.

Théorème 7.2.1. *La théorie* T *des corps Henséliens munis d'une application coefficient dont la théorie du groupe de valeur est* T_1 *est celle du corps résiduel* T_2 *élimine les quantificateurs de corps dans le langage* L_{Pas}.

Proposition 7.2.2. *La théorie* T *définie ci-dessus est NIP si et seulement si* T_2 *l'est.*

Nous utiliserons le fait que toute théorie de groupe abélien ordonné est NIP.

Preuve. Avec les résultats précédents, la preuve est un jeu d'enfant. On suppose que T_2 est NIP. Il s'agit de montrer que les formules suivantes sont NIP (x est toujours une seule variable) :

$$P(x,y)=0,$$

$$g(x,t(y)) \text{ où } g \text{ est une formule du langage de } \mathbf{k}, t \text{ un terme,}$$

$$f(x,t(y)) \text{ où } f \text{ est une formule du langage de } \Gamma, t \text{ un terme,}$$

$$g(\mathrm{ac}(P_1(x,y_1)),\dots,\mathrm{ac}(P_n(x,y_1)),y_2) \text{ où } g \text{ est une formule du langage de } \mathbf{k},$$

$$f(\nu(P_1(x,y_1)),\dots,\nu(P_n(x,y_1)),y_2) \text{ où } f \text{ est une formule du langage de } \Gamma.$$

Pour les trois premières, c'est évident. Pour la quatrième, soit (x_i) une suite indiscernable d'éléments de K. Le lemme 7.0.5 nous dit que $g(\nu(P_1(x_i,y_1)),\dots,\nu(P_n(x_i,y_1)),y_2)$ est équivalente à $g(Q_1(b_i),\dots,Q_n(b_i),y_2)$ pour des polynômes $Q_1,\dots,Q_n$ et une suite indiscernable (b_i) d'éléments de $\mathbf{k}$. On est ainsi ramené au cas 2. On ramène de même le quatrième cas au deuxième. □

§7.3 $\mathbf{Q}_p$

On suppose ici $K \equiv \mathbf{Q}_p$.

Pour étudier $\mathrm{Th}(\mathbf{Q}_p)$, il est nécessaire d'introduire des applications coefficient angulaire d'ordre supérieur. On définit ainsi une application coefficient d'ordre n comme étant une application $\mathrm{ac}_n : K \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$, morphisme multiplicatif. Si des ac_n sont définit pour tout n, on demande bien sûr des compatibilités : $\pi_n(\mathrm{ac}_n(x)) = \mathrm{ac}_{n-1}(x)$ où π_n est la projection $\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/p^{n-1}\mathcal{O}_K$.

On définit le langage étendu L_{ac_ω} comme étant $L_{nat} \cup \{\mathrm{ac}_n\}_{n<\omega}$.

Théorème 7.3.1. *La théorie* $\mathrm{Th}(\mathbf{Q}_p)$ *élimine les quantificateurs dans* L_{ac_ω}.

Proposition 7.3.2. *La théorie* $\mathrm{Th}(\mathbf{Q}_p)$ *est NIP.*

Preuve. On fait comme pour les preuves précédentes. Il nous faut affiner les lemmes 7.0.4 et 7.0.5 pour montrer que si (x_i) est une suite indiscernable, et P un polynôme, alors $\mathrm{ac}_n(P(x_i))$ est stationnaire (les ac_n prennent leurs valeurs dans un ensemble fini).

La remarque principale qui va faire marcher les choses est la suivante : si α_i est une suite indiscernable de $\Gamma \equiv \mathbf{Z}$, alors soit elle est constante, soit $|\alpha_i - \alpha_{i+1}|$ est infini pour tout i (une suite vérifiant cette dernière condition sera dite *fortement monotone*). En effet, les éléments de la suite sont congrus les uns avec les autres modulo n pour tout n.

À la lumière de cette remarque, on adapte le lemme 7.0.4 en :

(7.0.4 bis) : Soit $P(X) = \Sigma a_k.X^k$ un polynôme et (x_i) une suite d'éléments de K telle que $(\nu(x_i))$ soit fortement monotone, alors il existe r tel que, à partir d'un certain rang, $\nu(P(x_i)) = \nu(a_r x_i^r) < \nu(a_k x_i^k) - n$ pour $k \neq r$ et tout n. En particulier, $\mathrm{ac}_n(P(x_i)) = \mathrm{ac}_n(a_r).\mathrm{ac}_n(x_i)^r$ à partir d'un certain rang.

En effet, par 7.0.4, on voit que la valuation de $\nu(x_i)$ est donnée à partir d'un certain rang, par un terme "dominant" $a_r.x_i^r$. Quitte à prendre i un peu plus grand, la valuation de ce terme est infiniment plus petite que les valuations des autres termes. En particulier, $\mathrm{ac}_n(P(x_i)) = \mathrm{ac}_n(a_r.x_i^r)$.

Reprenons maintenant la preuve de 7.0.5 pour étendre la conclusion de ce résultat à tous les ac_n. Les cas a) et b1) marchent de la même manière en changeant partout "strictement monotone" par "fortement monotone".

Pour le cas b3), remarquons que, étant donné une somme $s = \Sigma_{i\in I} a_i$ d'éléments de K, si $\nu(s) = \min(\nu(a_i))$, alors tous les ac_n se calculent facilement. En effet, supposons par exemple $\nu(s) = 0$ et posons $k_i = \nu(a_i)$. Alors $\mathrm{ac}_n(s) = \Sigma_i p^{k_i}\,\mathrm{ac}_n(a_i)$.

En appliquant ceci au polynôme $\Sigma a_k.z_i^k$ du cas b3), on obtient que $\mathrm{ac}_n(P(x_i))$ s'écrit comme un polynôme en les $\mathrm{ac}_n(z_i)$. □

Bibliographie

[Adl] H. Adler, Introduction to theories without the independence property, to appear in Archive Math. Logic.

[Bel] L. Belair, Types dans les corps valués munis d'applications coefficients, Illinois J. of Math. 43 (1999), Nr 2, 410-425

[Del] F. Delon, Types sur $\mathbf{C}((X))$, Groupes d'études de Théories stables (Bruno Poizat)1978/79.

[Hru03] E. Hrushovski, Valued fields, metastable groups, draft 2003.

[HasHruMac1] D. Haskell, E. Hrushovski, and D. Macpherson, Definable sets in algebraically closed valued fields. Part I : elimination of imaginaries, J. Reine und Angew. Math.

[HasHruMac2] D. Haskell, E. Hrushovski, and D. Macpherson, *Stable domination and independence in algebraically closed valued fields*, to appear in Lecture Notes in Logic.

[HruPetPil] E. Hrushovski, Y. Peterzil, and A. Pillay, Groups, measures and the NIP, Journal AMS, 2007.

[HruPil] E. Hrushovski and A. Pillay, On NIP and invariant measures, preprint.

[Kei] H. J. Keisler, Measures and forking, Annals of Pure and Applied Logic 45 (1987), 119-169.

[LasPil] D. Lascar and A. Pillay, Hyperimaginaries and automorphism groups, Journal of Symbolic Logic, 66(2001), 127-143.

[Pil88] A. Pillay, On groups and fields definable in o-minimal structures, J. Pure and Applied algebra 53 (1988), 239-255.

[Pil96] A. Pillay, *Geometric Stability Theory*, Oxford University Press 1996.

[Poiz] B. Poizat, *A Course in Model Theory*, Springer 2000.

[Rod] C. C. Rodriguez, Uniform Laws of Large Numbers. http ://omega.albany.edu :8008/

[She715] S. Shelah, Classification theory for theories with NIP - a modest beginning, Sci.Japon. 59 (2004), 265-316.

[She783] S. Shelah, Dependent first order theories, continued, to appear in Israel J. Math.

[She] S. Shelah, Minimal bounded index subgroup for dependent theories, Proc. AMS,

[Wag] F. O. Wagner, *Simple theories*, Dordrecht 2000.