Processus de contact

Erwan Scornet, encadré par Thierry Bodineau

Introduction

Dans cet exposé, on cherche à définir et à décrire le processus de contact. Ce processus est notamment utilisé pour représenter l'évolution d'infection au sein d'une population. On envisage deux modifications de l'état (sain/infecté) d'une personne :

– la contamination par un de ses voisins, si l'individu est sain, et si son voisin est infecté
– la guérison spontanée, si l'individu est contaminé (on considère que la guérison d'un individu sain ne sert à rien !)

La contamination et la guérison sont régies par des variables aléatoires qui déterminent l'instant de guérison ou de contamination. Dans une première partie, on définira ce modèle de manière mathématiques et on énoncera quelques propriétés fondamentales. On verra ensuite que les personnes qui courent assez vite sont immunisées : la vitesse de propagation d'une maladie, dans ce modèle, est finie. Dans une course opposant Ushain Bolt à une maladie infectieuse, cette dernière n'a quasiment aucune chance de gagner ! On énoncera enfin quelques résultats sur les phénomènes de transition de phase : si on laisse le système évolué assez longtemps, aboutira t-on à une configuration où la majorité des gens est infecté ? Cela dépend évidemment du taux de virulence de la maladie.

Table des matières

1 Construction du processus de contact et premières propriétés

1.1 Hypothèses sur la guérison et la contamination

Soit S l'ensemble des individus du panel étudié qu'on suppose fini. On suppose que ces individus sont "rangés" (l'ordre c'est bien) c'est-à-dire qu'ils sont placés sur un réseau, ici $\mathbb{Z}^d$, et qu'un individu ne peut contaminer que ses plus proches voisins. Dans toutes la suite, on considère pour simplifier des individus alignés, i.e. $d = 1$.

Pour définir un processus de contact, on doit définir les variables aléatoires de guérison spontanée et de contamination. Elles doivent posséder certaines propriétés :

- elles sont les mêmes pour chaque individus
- les guérisons d'un individu ne dépendent pas de celles d'un autre individu. De même les contacts (potentielles contaminations) entre un couple d'individu ne dépendent pas des contacts d'un autre couple d'individu

En fait, on demande plus de conditions. On veut que le système oublie le passé, c'est-à-dire que le temps de guérison après une guérison donnée (respectivement le prochain temps de contact entre deux individus donnés après un contact ayant eu lieu)

- ne doit pas dépendre du "passé" de l'individu (invariance temporelle)
- ne doit pas dépendre de l'individu (homogénéité des individus : on est tous égaux !)

Enfin, il faut préciser le nombre d'apparition et de disparition des maladies dans un intervalle de temps : c'est la loi de poisson.

Définition : loi de poisson

Une v.a. N suit une loi de poisson $\mathcal{P}_\lambda$ de paramètre λ si elle vérifie :

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu} \text{ si } k \in \mathbb{N}$$
$$\mathbb{P}(N = k) = 0 \text{ si } k \notin \mathbb{N}$$

On note alors $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Le nombre de guérisons (ou de potentielles contaminations) survenues dans $[t, t + s]$ est donnée par $N(s) \sim \mathcal{P}(\lambda s)$. Tous ces éléments mis bout à bout définissent le processus aléatoire dénombrant les guérisons (ou les potentielles contaminations). C'est un processus de Poisson.

Définition : Processus de Poissons

Un processus de poisson $(N_t, t \geq 0)$ d'intensité λ est un processus

- à accroissements stationnaires

$$\forall t_0, ..., t_n, (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})_{0 \leq i \leq n-1} \text{ sont identiquement distribués}$$

- indépendants

$$\forall t_0, ..., t_n, (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})_{0 \leq i \leq n-1} \text{ sont indépendants}$$

- de loi de poisson

$$N_{t+s} - N_t \sim_{loi} \mathcal{P}(\lambda s)$$

On peut aussi voir les temps de guérison (respectivement de contact) comme des variables aléatoires de loi exponentielle $\mathcal{E}_\lambda$.

Définition : loi exponentielle

Une v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue $f(t)dt$ est donnée par

$$f(t) = 0 \text{ si } t \leq 0$$
$$f(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \tag{1}$$

D'après ce qui précède, on a défini les processus de guérison (et de contamination) pour un individu (et un couple d'individus). Définir un processus de contact c'est se donner un ensemble de processus de ce type, pour chaque individu ou couple d'individus :

Définition : Processus de contact

Un processus de contact de virulence λ est la donnée de processus de Poissons de deux types :
- les $(N_x)_{x \in S}$ de paramètre 1 définis pour chaque sommet de S
- les $(N_{(x,y)})_{(x,y) \in S^2, x \sim y}$ de paramètre λ définis pour chaque paire orientée de sommets de S reliés par une arête.

Tous ces processus étant indépendants les uns des autres.

Autrement dit, les contacts entre deux individus surviennent à une fréquence λ alors que les guérisons surviennent à une fréquence de 1.

Interprétation

Le plus simple pour visualiser cette construction est de se la représenter par un graphique. On place en abscisse les points de S et en ordonnée l'échelle temporelle.
- Pour chaque site x, la variable N_x fournit la position temporelle des guérisons spontanées du site x. On les place sur le graphique $S \times [0, +\infty[$ aux emplacements correspondants. Elles sont repérées par " $*$ ".
- Pour chaque paire (x, y), la variable $N_{(x,y)}$ fournit les instants auxquels une connexion est faite entre les sites x et y. Une flèche est alors placée aux instants correspondants, reliant x à y.

Finalement, on obtient une construction de la forme suivante :

Il suffit de lire le graphique de bas en haut, de commencer là où les sites sont infectés, de les propager grâce aux flèches (en prenant bien garde de laisser l'infection sur le site de départ, le patient ne guérit pas parce qu'il a infecté son voisin !), et de transformer le patient infecté en patient sain lorsqu'il rencontre une étoile (guérison miracle grâce à sa bonne étoile !).

1.2 Notation et Première propriété

Avant de poursuivre, il convient de donner quelques notations.

Configuration initiale

On note η une configuration initiale du système, c'est-à-dire une application de $S \to \{0, 1\}$ qui, à chaque élément de S associe 1 s'il est infecté, 0 sinon. On observe deux configurations remarquables :
- celle où tous les individus sont sains, qu'on note η_0, et qui vérifie par définition

$$\eta_0(x) = 0, \ \forall x \in S$$

- celle où tous les individus sont infectés, qu'on note η_1, et qui vérifie par définition

$$\eta_1(x) = 1, \ \forall x \in S$$

Dans la suite, on appelle indifféremment configuration initiale une application de $S \to \{0,1\}$ et la donnée des individus infectés au temps 0 (i.e. une partie de S).

Définition : Évolution d'infection

Soit $A_0 \subset S$ une configuration initiale. On note A_t les individus infectés au temps t lorsqu'on a effectué un tirage de tous les processus de Poissons.

Cependant, on ne sait pas avec certitude quels individus sont infectés au départ : on ne part donc pas d'une configuration initiale mais d'un ensemble de configurations initiales auxquelles on attache un poids différent selon qu'elles sont plus ou moins probables. On part donc d'une mesure de probabilité sur l'ensemble des configurations initiales.

Définition : État initial

Un état initial est la donnée d'une mesure de probabilité μ sur l'ensemble des configurations initiales η. On notera μ_t la mesure obtenue en faisant évolué le système pendant un temps t, partant de la mesure initiale μ

Définition : mesures remarquables

On associe aux configurations η_0 et η_1 les mesures δ_0 et δ_1 définies par :
- $\delta_0(\eta_0) = 1$
- $\delta_1(\eta_1) = 1$

C'en est fini avec les définitions. Revenons à notre processus de contact. L'avantage de la construction faite précédemment est qu'on peut, partant d'une configuration initiale $A \subset S$ trouver la configuration A_t pour tout temps t. Ceci permet d'en déduire une première propriété du processus de contact : la monotonie.

Propriété : Monotonie

Soit A_0 et B_0 deux parties de S telles que $A_0 \subset B_0$. Alors

$$A_t \subset B_t$$

2 Théorème sous additif : vitesse de croissance des maladies

Dans cette partie, on se place sur $\mathbb{Z}^1$ et on s'intéresse à la vitesse de croissance d'une interface. Une interface correspond à une configuration initiale où tous les états infectés sont d'un côté et tous les états sains de l'autre. En d'autre terme, on a, à translation près,

soit

$$\eta_0^+(x) = 1 \text{ ssi } x \geq 0 \tag{2}$$

soit

$$\eta_0^-(x) = 1 \text{ ssi } x \leq 0 \tag{3}$$

A la configuration (2), respectivement (3), on associe la position de l'interface l_t, respectivement r_t définie par :

$$l_t = \min\{x, \eta_t^+(x) = 1\}$$

et

$$r_t = \max\{x, \eta_t^-(x) = 1\}$$

L'étude de ces interfaces est motivé par le fait qu'on retrouve ces configurations notamment à l'équilibre dans un modèle d'Ising (interaction de type plus proche voisin qui tend un point à prendre la même valeur que ceux qui l'entoure). Mais elle permet également de comprendre comment grandit un processus de contact. En effet, la croissance de ces interfaces est reliée à celle d'un singleton. Autrement dit, l'évolution de la configuration

$$\eta_0(x) = 1 \text{ ssi } x = 0$$

peut se comprendre avec l'évolution des interfaces r_t, l_t associées aux configurations initiales (**??**) et (**??**). Ceci est fourni par le théorème suivant :

Théorème : Évolution d'un singleton, lien avec les interfaces l_t et r_t

Soit A_t et η_t deux processus définis par leurs configurations initiales $A_0 = \{0\}$ et $\eta_{t=0} = \eta_1$. Alors

$$\{A_t \neq \emptyset\} = \{l_s \leq r_s, \forall s \leq t\}$$

et sur cet événement,

$$\begin{aligned} \eta_t(x) &= \eta_t^+(x) = \eta_t^-(x), \quad \forall l_t \leq x \leq r_t \\ A_t &= \{x/\ l_t \leq x \leq r_t,\ \eta_t(x) = 1\} \end{aligned}$$

Preuve

La preuve de ce résultat se déduit de la construction graphique : les trois propriétés sont invariantes graphiquement et sont trivialement vérifiées à $t = 0$

L'étude de r_t permettra donc de savoir comment se propage une maladie portée, au départ, par un seul individu. Nous allons maintenant nous intéresser à la vitesse de croissance. Pour cela nous allons utiliser le **théorème sous additif** dont la démonstration est donnée en annexe.

Théorème sous additif : croissance d'une suite de v.a. sous additives

Soit $\{X_{m,n}, m \leq n\}$ une suite de v.a. vérifiant :

1. $X_{0,0} = 0, X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n},\ \forall m \leq n$
2. Pour tout $k \geq 1$, $\left(X_{nk,(n+1)k}\right)_{n\geq 0}$ est i.i.d.
3. $\left(X_{n+1} - X_n\right)_{n\geq 0}$ est i.i.d.
4. $\mathbb{E}X_{0,1} < \infty$

Soit $\alpha_n = \mathbb{E}X_{0,n} < \infty$. Alors,

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \in [-\infty, +\infty[\tag{4}$$

$$X_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{X_{0,n}}{n} \text{ existe p.s.} \tag{5}$$

$$\text{avec } -\infty \leq X_\infty < \infty$$

De plus, $\mathbb{E}X_\infty = \alpha$. Si $\alpha > -\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}|\frac{X_{0,n}}{n} - X_\infty| = 0$$

et

$$X_\infty = \alpha \ p.s.$$

On va maintenant appliquer ce théorème à l'interface r_t pour en déduire une croissance linéaire.

Théorème : Croissance de l'interface

Soit $\alpha_t = \mathbb{E}r_t$. Alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha_t}{t} = \inf_{t>0} \frac{\alpha_t}{t} = \alpha \in [-\infty, \infty[\tag{6}$$

Et l'interface croit alors selon la relation :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{r_t}{t} = \alpha, \text{ p.s. , avec} \tag{7}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}|\frac{r_t}{t} - \alpha| = 0, \text{ si } \alpha > -\infty \tag{8}$$

Preuve Posons, pour $0 \leq s \leq t$,

$$r_{s,t} = \max\{x \in \mathbb{Z}^1, \text{il existe un chemin de } (y,s) \text{ à } (x,t) \text{ pour un } y \leq r_s\} - r_s$$

et

$N_t = \max\{x \in \mathbb{Z}^1,$ il existe un chemin de $(y,0)$ à (x,t) pour $y \leq 0$où les guérisons ne sont pas pris en compte dans la

Alors $r_{0,t} = r_t$ et $X_{m,n} = r_{m,n}$ satisfont les hypothèses (1), (2) et (3) du théorème sous additif d'après les propriétés des processus de Poissons. Pour vérifier (4), remarquons que

$$r_t \leq N_t \text{ p.s.}$$

où N_t est un processus de Poisson de paramètre λ. Pour prouver ce théorème à partir du théorème sous additif il suffit donc de passer de la convergence sur les entiers à la convergence sur les réels. Ceci est fait grâce au lemme de Borel Cantelli ainsi que grâce aux inégalités suivantes :

$$\mathbb{P}(\max_{n \leq t \leq n+1}(r_t - r_n) \geq \epsilon n) \leq \mathbb{P}(N_1 \geq \epsilon n)$$
$$\mathbb{P}(\max_{n-1 \leq t \leq n}(r_n - r_t) \geq \epsilon n) \leq \mathbb{P}(N_1 \geq \epsilon n)$$

3 Mesures invariantes, convergence et paramètre critique

3.1 Mesures invariantes

Un des objectifs de l'étude des processus de contact est de réussir à déterminer le comportement asymptotique d'une configuration initiale. Autrement dit, partant d'une configuration initiale, on aimerait déterminer la probabilité qu'un site donné soit infecté au bout d'un temps très long. On cherche alors à trouver des mesures invariantes par rapport au temps.

Un premier exemple est fourni par δ_0 car si aucun individu n'est infecté au départ, il n'y en aura aucun à l'arrivée. Le système ne crée pas de maladie.

Cependant, on peut montrer qu'il existe une autre mesure invariante "naturelle" : on prend $A_0 = S$ comme ensemble de départ et on pose μ_t la mesure associée à l'ensemble A_t. On a alors

$$\mu_t \leq \mu_0$$

Donc, par la propriété de Markov, on en déduit que pour tout s,

$$\mu_{t+s} \leq \mu_s$$

μ_t est donc décroissante et du fait de la compacité de l'ensemble des mesures de probabilité sur S, la distribution limite

$$\bar{\nu} = \lim_{t \to +\infty} \mu_t$$

existe. De plus, c'est la plus grande mesure invariante sur S au sens où, pour toute mesure invariante ν, $\bar{\nu} \geq \nu$.

A ce stade, on a donc l'existence de deux mesures invariante δ_0 et $\bar{\nu}$.

3.2 Convergence de la mesure μ_t

Dans toute notre analyse, on a laissé de côté la dépendance en λ. En effet, plus λ est grand, plus le processus de contact a de chance de faire se propager la maladie. On montre, par des arguments de couplage, que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \implies \bar{\nu}_{\lambda_1} \leq \bar{\nu}_{\lambda_2}$$

De plus, on a que $\bar{\nu}_\lambda(\emptyset) = 0$ ou 1.

Tous ces éléments, mis bout à bout, fournissent l'existence d'un paramètre critique λ_c tel que

– si $\lambda < \lambda_c$ $\bar{\nu}_\lambda(\emptyset) = 1$ et alors, quelle que soit l'état initial μ, on a

$$\mu_t \to \delta_0$$

– si $\lambda > \lambda_c$, $\bar{\nu}_\lambda(\emptyset) = 0$, et on ne sait pas ce que devient μ_t

En fait, dans le deuxième cas, on peut montrer que la mesure limite μ_t est une combinaison convexe des mesures $\{\delta_0, \bar{\nu}\}$:

Théorème : comportement asymptotique d'une mesure lorsque $\lambda > \lambda_c$

Soit μ un état initial et Δ_0 et $\bar{\nu}$ définies comme précédemment.

– Si μ est homogène (invariante par translation), on a

$$\mu_t \to \gamma\delta_0 + (1-\gamma)\bar{\nu}$$

avec $\gamma = \mu(\{\eta_0\})$

– Dans le cas général, on a

$$\mu_t \to \gamma\delta_0 + (1-\gamma)\bar{\nu}$$

avec $\gamma = \int \mathbb{P}^\eta(\tau < \infty)\mu(d\eta)$ où τ est le premier temps d'atteinte de la configuration η_0

Preuve
Pour une démonstration de ces résultats c.f. ....
On a de plus des estimations sur la vitesse de convergence dans les trois cas possibles.

3.3 Vitesse de convergence

Suivant la valeur de λ par rapport au paramètre critique λ_c, on a les inégalités suivantes.

Théorème : vitesse de convergence dans le cas sous-critique
Si si $\lambda < \lambda_c$, il existe des constantes C_λ, K_λ dépendant uniquement de λ telles que

$$\mathbb{P}^A(A_t \neq \emptyset) \leq K_\lambda |A| e^{-C_\lambda t}$$

et

$$\mu_t(\{\eta,\ \exists x \in A, \eta(x) = 1\}) \leq K_\lambda |A| e^{-C_\lambda t}$$

Théorème : vitesse de convergence dans le cas critique
Si $\lambda = \lambda_c$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} t\mathbb{P}^{\eta_1}\left(\exists x,\ \eta_t(x) = 1\right) = \infty$$

et

$$\mathbb{P}^{\eta_1}\left(\exists x, \eta_t(x) = 1 \text{ pour } t \text{ assez grand}\right) = 1$$

Théorème : vitesse de convergence dans le cas sur-critique
Si $\lambda > \lambda_c$ alors il existe des constantes positives K_λ, C_λ dépendant seulement de λ telles que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}^A\left(t < \tau < \infty\right) \leq K_\lambda |A| e^{-C_\lambda t}$$

et

$$\mathbb{P}^A\left(\tau < \infty\right) \leq K_\lambda e^{-C_\lambda |A|}$$

3.4 Dimension supérieure

Toute notre analyse a été faite en dimension 1. On peut se demander ce qu'il se passe en dimension plus grande. On a, de manière générale, une estimation de la valeur du paramètre critique :

Théorème : inégalités sur la paramètre critique
Quelle que soit d, on a :

$$\frac{1}{2d-1} \leq \lambda_c \leq \frac{2}{d}$$

Cependant, cette inégalité n'est pas satisfaisante car on peut montrer que

$$\lim_{d \to \infty} 2d\lambda_d = 1$$

En ce qui concerne la convergence des mesures, on a toujours le résultat du théorème précédent mais seulement dans le cas où la mesure est homogène.

4 Annexe

4.1 Preuve du théorème sous additif

Etape 1 : Montrer que $\lim \frac{\alpha_n}{n} = \inf \frac{\alpha_n}{n}$

Pour montrer (4), prenons l'espérance de

$$X_{0,m+n} \leq X_{0,m} + X_{m,m+n}$$

En utilisant (2), on obtient

$$\alpha_{m+n} \leq \alpha_m + \alpha_n$$

Posons

$$\alpha = \inf_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \in [-\infty, \infty[$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $n = km + l$ la division euclidienne de n par m. D'après (4.1),

$$\alpha_n \leq k\alpha_m + \alpha_l$$

Donc

$$\limsup \frac{\alpha_n}{n} \leq \limsup \frac{k\alpha_m}{km + l} + \frac{\alpha_l}{n}$$

or

$$\frac{k}{n} \to \frac{1}{m}$$

D'où

$$\limsup \frac{\alpha_n}{n} \leq \frac{\alpha_m}{m}$$

Et comme m est arbitraire,

$$\limsup \frac{\alpha_n}{n} \leq \alpha.$$

Puisque, par définition,

$$\liminf \frac{\alpha_n}{n} \geq \alpha$$

on a finalement

$$\limsup \frac{\alpha_n}{n} \leq \alpha \leq \liminf \frac{\alpha_n}{n}$$

ce qui entraine

$$\alpha =_{def} \lim \frac{\alpha_n}{n} = \liminf \frac{\alpha_n}{n}$$

Notons dès à présent,

$$\bar{X} = \limsup \frac{X_{0,n}}{n} \tag{9}$$

$$\underline{X} = \liminf \frac{X_{0,n}}{n} \tag{10}$$

Étape 2 : Montrer que $\bar{X} \leq \alpha$

Supposons $\alpha > -\infty$ et fixons $k \geq 1$. En appliquant n fois (1), on obtient

$$X_{0,kn} \leq \sum_{j=1}^{n} X_{k(j-1),kj}$$

D'après (2), la loi des grands nombres s'applique et donne

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{k(j-1),kj} \to \alpha_k \ p.s.$$

On a, d'après (4.1),

$$\limsup_n \frac{X_{0,kn}}{kn} \leq \frac{1}{k} \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{k(j-1),kj} = \frac{\alpha_k}{k}$$

Considérons maintenant le cas général, soit $m = kn + j$ la division euclidienne de m par k. D'après (1), on a :

$$X_{0,kn+j} \leq X_{0,kn} + X_{kn,kn+j}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{X_{0,kn+j}}{kn+j} &\leq \frac{X_{0,kn}}{kn+j} + \frac{X_{kn,kn+j}}{kn+j} && (11) \\ &\leq \frac{X_{0,n}}{kn} + \frac{X_{kn,kn+j}}{n} && (12) \end{aligned}$$

Or,

$$\limsup \frac{X_{kn,kn+j}}{n} =_{loi} \limsup \frac{X_{0,j}}{n} = 0 p.s. \text{ car } X_{0,j} \text{ est fini } p.s.$$

En prenant la $\limsup$ de (12) et en utilisant (4.1), on obtient

$$\limsup_m \frac{X_m}{m} \leq \limsup_n \frac{X_{0,kn}}{kn} \leq \frac{\alpha_k}{k}$$

Comme ceci est vrai pour tout k, en prenant la $\liminf_k$, on obtient

$$\bar{X} \leq \alpha$$

Étape 3 : Montrer que $\mathbb{E}\underline{X} \geq \alpha$

Supposons toujours $\alpha > -\infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons, pour tout j,

$$Y_j = X_{0,k+j+1} - X_{0,k+j}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} Y_j\right) &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(X_{0,k+n+1} - X_{0,k+1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\alpha_{k+n+1} - \alpha_{k+1}\right) \\ &= \frac{\alpha_{k+n+1}}{k+n+1}\frac{k+n+1}{n} - \frac{\alpha_{k+1}}{n} \\ &\geq \alpha \end{aligned}$$

Or, les Y_j étant i.i.d., on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y_1\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} Y_j\right) \\ &\geq \alpha\end{aligned}$$

De plus, d'après (1) et (3),

$$(X_{0,k+1} - X_{0,k}, ..., X_{0,k+l} - X_{0,k}) \leq (X_{k,k+1}, ..., X_{k,k+l}) =_{loi} (X_{0,1}, ..., X_{0,l})$$

Donc, pour toute fonction croissante sur $\mathbb{R}^l$, et pour tout k, on a

$$\mathbb{E}f(X_{0,k+1} - X_{0,k}, ..., X_{0,k+l} - X_{0,k}) \leq \mathbb{E}f(X_{0,1}, ..., X_{0,l})$$

ce qui donne, d'après la définition des Y_j,

$$\mathbb{E}f(Y_0, Y_0 + Y_1, ..., Y_0 + Y_1 + ..., +Y_{l-1}) \leq \mathbb{E}f(X_{0,1}, ..., X_{0,l})$$

Prenons $f(x_1, ..., x_l) = \inf_{k\leq l} \frac{x_k}{k}$, on a alors, pour tout l

$$\mathbb{E}\inf_{k\leq l}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} Y_j \leq \mathbb{E}\inf_{k\leq l}\frac{1}{k}X_{0,k}$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\underline{X} \geq \alpha$$

Etape 4 : conclure Supposons toujours $\alpha > -\infty$. D'après ce qui précède, on a :

$$\bar{X} \leq \alpha \tag{13}$$
$$\mathbb{E}\underline{X} \geq \alpha \tag{14}$$
$$\underline{X} \leq \bar{X} \tag{15}$$

Par conséquent,

$$\underline{X} \leq \bar{X} \leq \alpha$$

et d'après (14), on a

$$\underline{X} = \alpha$$

ce qui donne d'après (13) et (15),

$$\bar{X} = \alpha$$

ce qui prouve (5).

Bibliographie

Liggett, *Interacting Particle Systems*, 2005