Groupe de travail : Modèle d'Ising sur un graphe aléatoire

Erwan Scornet

Table des matières

1 Généralité sur le modèle d'Ising : modèle de Curie-Weiss **1**
1.1 Position du problème : modèle d'Ising 1
1.2 Modèle d'Ising sur un graphe complet : modèle de Curie-Weiss 3
1.3 Calcul de l'aimantation dans le modèle de Curie-Weiss 5

2 Curie-Weiss et équations de champ moyen **6**
2.1 Mise en évidence du point fixe 6
2.2 Méthode de la cavité 7
2.3 Conclusion 8

3 Méthode de la cavité sur un graphe aléatoire **8**
3.1 Graphe aléatoire et simplification du modèle 8
3.2 Graphe 2-régulier 9
3.3 Bilan 11

1 Généralité sur le modèle d'Ising : modèle de Curie-Weiss

Le modèle d'Ising représente un système de particules, chacune possédant deux niveaux d'énergie (on parle en général de spins). Ce modèle d'apparence très simple permet pourtant de rendre compte des effets collectifs des particules : il permet notamment de mettre en évidence des phénomènes de transition de phase.

1.1 Position du problème : modèle d'Ising

On considère dans la suite un système isolé de n particules (on ne s'intéresse qu'aux interactions entre les particules et non à leurs interactions avec l'environnement). À chaque particule, on associe un état (ou spin) -1 ou $+1$.

Une *configuration du système* est la donnée de chacun des spins du système c'est donc un élément $\underline{x} \in \Omega = \{-1, +1\}^n$. On notera dans la suite x_i le spin de la i^{e} particule de sorte que $\underline{x} = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$.

L'hamiltonien du modèle d'Ising dans le cas le plus général s'écrit :

$$H(\underline{x}) = -\sum_{1 \leq i,j \leq n} J_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

où les J_{ij} sont des réels positifs ou nuls. Cependant, cet hamiltonien n'est pas satisfaisant comme nous allons l'expliquer.

Mesure sur Ω

L'hamiltonien $H(\underline{x})$ représente l'énergie du système dans la configuration $\underline{x}$. Plus l'énergie d'un système est élevée, moins le système sera stable. Un système physique préfère se trouver dans un état d'énergie minimale. On définit la mesure de probabilité $\mu(\underline{x})$ qu'a le système de se trouver dans la configuration $\underline{x}$ par :

$$\mu(\underline{x}) = \frac{1}{Z(n,\beta)} \exp(-\beta H(\underline{x}))$$

où $Z(n,\beta)$ est une constante de normalisation (appelée *fonction de partition*) définie par :

$$Z(n,\beta) = \sum_{\underline{x}\in\Omega} \exp(-\beta H(\underline{x})) \ ,$$

et où β est un paramètre proportionnel à l'inverse de la température ($\beta = \frac{1}{kT}$), dite *température inverse.*

Aimantation moyenne

On définit l'*aimantation moyenne* m du matériau comme étant :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{1\leq i\leq n} x_i \ .$$

En effet, chaque spin crée son propre champ magnétique. Le champ magnétique (ou aimantation) créé par l'échantillon n'est autre que la somme des champs magnétiques créés par chaque particule. On verra dans la suite que cette grandeur permet de caractériser la transition de phase ferromagnétique / paramagnétique, et c'est en cela qu'elle va jouer un rôle fondamental.

On remarque que l'hamiltonien H est pair. En effet

$$H(\underline{x}) = H(\underline{-x})$$

où $\underline{-x} = \{-x_i, 1 \leq i \leq n\}$ si $\underline{x} = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$. Autrement dit, puisque la probabilité de se trouver dans un état ne dépend de la configuration que par le hamiltonien, les configurations $\underline{x}$ et $\underline{-x}$ ont la même probabilité avec des aimantations moyennes opposées. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(m) &= \sum_{\underline{x}\in\Omega} m(\underline{x})\mu(\underline{x}) \\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

Quelle que soit la configuration du système, l'aimantation moyenne du matériau est nulle. Ceci nous pose un problème : puisque $\mathbb{E}(m)$ doit nous servir à caractériser la transition de phase, il serait de bon goût que $\mathbb{E}(m)$ dépende de la configuration.

Modification de l'hamiltonien

Le problème vient de la symétrie de l'hamiltonien $\underline{x} \to \underline{-x}$. Pour surmonter ce problème, on va briser cette symétrie en y introduisant un terme supplémentaire. On va supposer que notre échantillon vit dans un champ magnétique B. L'aimantation aura alors tendance à se diriger selon le champ magnétique et préfèrera une direction au détriment d'une autre : c'est la conséquence de la dissymétrie du nouveau hamiltonien qui s'écrit désormais

$$H(\underline{x}) = -\sum_{1\leq i,j\leq n} J_{ij} x_i x_j - B \sum_{1\leq i\leq n} x_i \tag{2}$$

où B est le champ magnétique supposé positif appliqué à l'échantillon.

États à hautes et basses températures

- À haute température – pour un β très faible – l'hamiltonien ne dépend quasiment pas de la configuration et tous les états sont équiprobables. En particulier, $\mu(\underline{x}) = \mu(\underline{-x})$ donc l'aimantation moyenne est nulle.
- À basse température, la probabilité $\mu(\underline{x})$ dépend très fortement de la configuration. La renormalisation par $Z(n, \beta)$ assure que la seule configuration envisageable pour de très grands β est $\underline{x} = 1$. L'aimantation moyenne est alors égale à 1.

Afin de retrouver le modèle d'Ising, on observe le comportement de $\mathbb{E}(m)$ quand B tend vers 0. D'après ce qui précède, on s'attend aux comportements suivants :

1. pour de grandes températures, $\lim_{B\to 0} \mathbb{E}(m) \to 0$ (comportement paramagnétique) ;
2. pour de faibles températures, $\lim_{B\to 0} \mathbb{E}(m) \to \lambda \neq 0$ (comportement ferromagnétique).

L'étude de $\mathbb{E}(m)$ lorsque B tend vers 0 permettra de mettre en évidence une transition de phase. On aimerait montrer qu'il existe β_c tel que :

1. Pour $\beta \leq \beta_c$, le matériau est paramagnétique.
2. Pour $\beta \geq \beta_c$, le matériau est ferromagnétique.

1.2 Modèle d'Ising sur un graphe complet : modèle de Curie-Weiss

Afin de préciser le modèle, il faut choisir la forme des J_{ij} dans l'hamiltonien. Le modèle d'Ising classique sur un réseau (1D, 2D ou 3D) ne prend en compte que les interactions à courte portée, c'est-à-dire que $J_{ij} = 0$ sauf si i est voisin de j. Le calcul de β_c est simple pour un réseau 1D. Il a été fait par Onsager pour le réseau 2D (la méthode mise en œuvre étant beaucoup plus complexe). À ce jour, aucun résultat concluant n'a été établi pour un réseau 3D.

Modèle de Curie-Weiss

Dans le cas qui nous intéresse, nous étudions le modèle d'Ising non pas sur un réseau mais sur un graphe complet : c'est le modèle de Curie-Weiss. On considère ici que chaque spin est relié à tous les autres et que l'interaction entre deux spins ne dépend pas des spins considérés. Ceci se traduit pour l'hamiltonien par :

$$H(\underline{x}) = -\frac{1}{n} \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j - B \sum_{1\leq i\leq n} x_i \tag{3}$$

où on a pris $J_{ij} = \frac{1}{n}$. Le facteur $\frac{1}{n}$ est là pour assurer l'homogénéité en n du résultat. Dans ce modèle, tous les spins interagissent avec tous les autres mais un spin donné x_i perçoit seulement la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}$ de tous les autres spins. Ce modèle porte également le nom de *modèle d'Ising en champ moyen.*

Autre modèle

Comme on l'a dit, d'autres modèles sont possibles en choisissant d'autres modèles pour les J_{ij} . À titre d'exemple, on peut citer :

1. Modèle d'Ising sur un réseau : $J_{ij} = 1$ si i est voisin de j sur le réseau. Ce modèle permet notamment d'étudier les propriétés magnétiques de certains métaux.

2. Modèle d'Edwards-Anderson : on prend pour les coefficients J_{ij} des variables aléatoires i.i.d. gaussiennes centrées réduites. Ce modèle permet d'étudier les verres de spin (matériaux non magnétiques comme le cuivre, dans lesquels on introduit au hasard des impuretés magnétiques comme le manganèse).
3. Et beaucoup d'autres...

Simplicité du modèle

En général, il est très difficile de faire des calculs exacts sur le modèle d'Ising. Cependant, le modèle de Curie-Weiss est assez simple car la mesure de probabilité ne dépend des spins x_i que par leur moyenne $m = \frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n} x_i$. En effet,

$$\begin{aligned}
\mu(\underline{x}) &= \frac{1}{Z(n,\beta)} \exp\left(\frac{\beta}{n}\sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j + \beta B \sum_{1\leq i\leq n} x_i\right) \\
&= \frac{1}{Z(n,\beta)} \exp\left(\frac{\beta}{2n}\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i\right)\left(\sum_{1\leq j\leq n} x_j\right) + \beta B \sum_{1\leq i\leq n} x_i\right) \\
&= \frac{1}{Z(n,\beta)} \exp\left(\frac{n\beta}{2}\left(\frac{\sum_{1\leq i\leq n} x_i}{n}\right)\left(\frac{\sum_{1\leq i\leq n} x_i}{n}\right) + n\beta B \frac{\sum_{1\leq i\leq n} x_i}{n}\right) .
\end{aligned}$$

On remarque que l'expression (4) ne dépend que de m. D'où

$$\mu(m) = \frac{1}{Z(n,\beta)} \exp\left(n\beta\left(\frac{m^2}{2} + Bm\right)\right) \mathbb{P}\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i = mn\right) . \tag{4}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer $\mathbb{P}\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i = mn\right)$.

Lemme

$$\mathbb{P}\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i = mn\right) \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi(1-m^2)}} \exp\left(nS\left(\frac{m+1}{2}\right)\right)$$

où S est la fonction entropie à deux éléments définie par :

$$S(p) = -p\ln(p) - (1-p)\ln(1-p) .$$

Démonstration

D'après la formule de Stirling, on a :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} .$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{\frac{M+n}{2}} &= \frac{n!}{(\frac{M+n}{2})!(\frac{n-M}{2})!} \\
&\sim \frac{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}}{(\frac{M+n}{2e})^{\frac{M+n}{2}}\sqrt{(\frac{M+n}{2})}(\frac{n-M}{2e})^{\frac{n-M}{2}}\sqrt{2\pi(\frac{n-M}{2})})} \\
&\sim \frac{n^n\sqrt{n}}{(n\frac{m+1}{2})^{n\frac{m+1}{2}}\sqrt{n(\frac{m+1}{2})}(n\frac{1-m}{2})^{n\frac{1-m}{2}}\sqrt{2\pi(n\frac{1-m}{2})})} \\
&\sim \frac{\sqrt{n}}{(\frac{m+1}{2})^{n\frac{m+1}{2}}(\frac{1-m}{2})^{n\frac{1-m}{2}}\sqrt{2\pi n^2(\frac{m+1}{2})(\frac{1-m}{2})})} \\
&\sim \sqrt{\frac{2}{n\pi(m+1)(1-m)}}\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{1-m}{2}\right)^{\frac{1-m}{2}}\right)^{-n} \\
&\sim \sqrt{\frac{2}{n\pi(m+1)(1-m)}}\exp\left(nS\left(\frac{m+1}{2}\right)\right) \ .
\end{aligned}$$

Bilan On obtient finalement une expression simple de la probabilité que le système ait une aimantation m :

$$\mu(m) = \frac{1}{Z_n}\exp\left(-n\beta\left(-\frac{m^2}{2} - Bm - \frac{S}{\beta}\left(\frac{m+1}{2}\right)\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \ . \tag{5}$$

1.3 Calcul de l'aimantation dans le modèle de Curie-Weiss

Posons ϕ la fonction suivante :

$$\phi(m) = -\frac{\beta}{2}m^2 - \beta Bm + \left(\frac{m+1}{2}\right)\ln\left(\frac{m+1}{2}\right) + \left(\frac{1-m}{2}\right)\ln\left(\frac{1-m}{2}\right) \ . \tag{6}$$

D'après la méthode du col, au vu de l'expression de μ, on cherche m qui minimise $\phi(m)$ afin de trouver la configuration du système la plus probable. Calculons la dérivée de ϕ :

$$\phi'(m) = -\beta m - \beta B + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m+1}{1-m}\right) \ . \tag{7}$$

Rappelons que :

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x} \ .$$

Les extrema de ϕ sont donnés par la condition $\phi'(m) = 0$, soit :

$$m = \tanh\left(\beta\left(m+B\right)\right) \ . \tag{8}$$

Les points fixe de la fonction $f : x \to \tanh(\beta x + B)$ sont donc les candidats pour la valeur de l'aimantation m. Calculons ϕ'' :

$$\phi''(m) = \frac{\beta m^2 - (\beta - 1)}{1-m^2} \ . \tag{9}$$

En étudiant les solutions de l'équation $\phi''(m) = 0$, on remarque deux comportements de ϕ' :

1. si $\beta \leq 1$, ϕ' est strictement croissante.
2. si $\beta \geq 1$, ϕ' est croissante/décroissante/croissante.

Dans le premier cas, l'équation $\phi'(m) = 0$ n'admet qu'une seule solution : comme on s'y attendait, pour β assez petit, c'est-à-dire pour une température assez grande, le système a une aimantation m nulle si $B = 0$. Il n'y a qu'un seul état d'équilibre possible.

Dans le deuxième cas, deux équilibres stables sont possibles. Les aimantations correspondantes sont :

$$\begin{aligned} m_+ &= \sqrt{1 - \frac{1}{\beta}} \ ; \\ m_- &= -\sqrt{1 - \frac{1}{\beta}} \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Afin de voir si un état est plus stable que l'autre, comparons $\phi(m_-)$ et $\phi(m_+)$.

- Si $B \geq 0$, on a $\phi(m_+) \leq \phi(m_-)$.
- Si $B \leq 0$, on a $\phi(m_+) \geq \phi(m_-)$.

Le champ magnétique B a donc pour effet d'orienter l'aimantation du système, l'état m_+ est plus probable.

2 Curie-Weiss et équations de champ moyen

2.1 Mise en évidence du point fixe

On peut essayer de retrouver l'équation (8) par une méthode autre que le calcul direct. Cette méthode servira dans la suite à établir l'expression de l'aimantation dans le cas de graphes plus complexes que celui de Curie-Weiss. Pour ce faire, on exprime l'hamiltonien comme une somme de deux hamiltoniens, dont l'un ne dépend pas de x_1 :

$$\begin{aligned} H(\underline{x}) &= -\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j - B \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i \\ &= -\frac{1}{n} \left(x_1 \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + \sum_{2 \leq i,j \leq n} x_i x_j \right) - B \left(x_1 + \sum_{2 \leq i \leq n} x_i \right) \\ &= -x_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B \right) - \frac{1}{n} \sum_{2 \leq i,j \leq n} x_i x_j - B \sum_{2 \leq i \leq n} x_i \\ &= -x_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B \right) + \tilde{H}_{n-1}(\underline{x}_{n-1}) \ . \end{aligned}$$

On remarque que le deuxième terme peut se voir comme le hamiltonien d'un système à $n-1$ particules. En revenant à l'expression de la mesure μ, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_n(\underline{x}) &= \frac{1}{Z_n} \exp \left(\beta x_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B \right) - \beta \tilde{H}_{n-1}(\underline{x}_{n-1}) \right) \\ \mu_n(\underline{x}) &= \exp \left(\beta x_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B \right) \right) \frac{\exp \left(-\beta \tilde{H}_{n-1}(\underline{x}_{n-1}) \right)}{Z_n} \ . \end{aligned}$$

D'où, en posant $Z = \frac{Z_n}{Z_{n-1}}$,

$$\mu_n(\underline{x}) = \frac{1}{Z} \exp\left(\beta x_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B\right)\right) \tilde{\mu}_{n-1}(\underline{x}_{n-1}) \ .$$

Or on peut également voir que :

$$\mu_n(\underline{x}) = \mu_1(x_1 \| \underline{x}_{n-1}) \tilde{\mu}_{n-1}(\underline{x}_{n-1}).$$

Donc par identification :

$$\mu_1(x_1 \| \underline{x}_{n-1}) = \frac{1}{Z} \exp\left(\beta x_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B\right)\right).$$

D'où

$$Z = \exp\left(\beta \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B\right)\right) + \exp\left(-\beta \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B\right)\right).$$

Donc

$$\mu_n(\underline{x}) = \frac{\exp\left(\beta x_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B\right)\right)}{2 \cosh\left(\beta \left(\frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B\right)\right)} \tilde{\mu}_{n-1}(\underline{x}_{n-1})$$

Calculons maintenant l'aimantation moyenne du spin 1 :
Et finalement

$$\mathbb{E}_n(x_1) = \tilde{\mu}_{n-1}\left(\tanh\left(\beta\left(\sum_{2 \leq i \leq n} x_i + B\right)\right)\right) \tag{11}$$

On remarque que le terme $\sum_{2 \leq i \leq n} x_i$ ressemble fortement à l'aimantation au terme x_1 près. Puisqu'on ne peut pas faire apparaître x_1 dans la tangente hyperbolique, on va essayer de transformer l'espérance sur un système à n particules $\mathbb{E}_n(m)$ en une espérance sur un sous système à $n-1$ particules $\mathbb{E}_{n-1}(m)$. Bien sûr, ces espérances ne seront pas égales mais on espère qu'elles seront assez proches quand n sera grand.

2.2 Méthode de la cavité

Dans cette partie, on va montrer le lemme suivant qui permet de quantifier ce que l'on cherchait dans la partie précédente :

Lemme

Soit $\beta' = \beta(1 + \frac{1}{n})$ et $\underline{X} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$. Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$|\mathbb{E}_{n+1,\beta'}(X_i) - \mathbb{E}_{n,\beta}(X_i)| \leq \beta \sinh(B + \beta) \sqrt{Var_{n,\beta}(\underline{X})} \ . \tag{12}$$

Preuve

Soit $F : \{-1,+1\} \to \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{n+1,\beta'}(F(\underline{X})) &= \frac{1}{Z_{n+1}(\beta')} \sum_{\underline{X}} F(\underline{X}) e^{-\beta' H_{n+1}(\underline{X})} \\
&= \frac{1}{Z_{n+1}(\beta')} \sum_{\underline{x}} F(\underline{x}) e^{\frac{\beta}{n}\sum_{i,j\neq n+1} x_i x_j} e^{\beta B \sum_{i\neq n+1} x_i} e^{\frac{\beta x_{n+1}}{n}\sum_{i\neq n+1} x_i} e^{\beta B x_{n+1}} \\
&= \frac{2}{Z_{n+1}(\beta')} \sum_{\underline{x}} F(\underline{x}) e^{\frac{\beta}{n}\sum_{i,j\neq n+1} x_i x_j} \cosh(B+\beta\bar{x}) \\
&= \frac{2Z_n(\beta)}{Z_{n+1}(\beta')} \mathbb{E}_{n,\beta}(F(\underline{X})\cosh(B+\beta\bar{X}))\ .
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{n+1}(\beta')}{2Z_n(\beta)} &= \frac{\sum e^{\frac{\beta}{n}\sum_{i,j\in\{1,\dots,n+1\}} x_i x_j} e^{B\sum_{i\in\{1,\dots,n+1\}} x_i}}{\sum e^{\frac{\beta}{n}\sum_{i,j\in\{1,\dots,n\}} x_i x_j} e^{B\sum_{i\in\{1,\dots,n\}} x_i}} \\
&= \mathbb{E}_{n,\beta}(\cosh(B+\beta\bar{X})\ ,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}_{n+1,\beta'}(F(\underline{X})) = \frac{F(\underline{X}\cosh(B+\beta\bar{X})}{\mathbb{E}_{n,\beta}(\cosh(B+\beta\bar{X})}\ .$$

D'après le théorème de Cauchy-Schwarz : $\mathrm{Cov}\,(X,Y) \leq \sqrt{\mathrm{Var}\,X}\sqrt{\mathrm{Var}\,Y}$, il vient :

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}_{n+1,\beta'}(F(\underline{X})) - \mathbb{E}_{n,\beta}(F(\underline{X}))| \\
=&\frac{\left|\mathbb{E}_{n,\beta}\left(F(\underline{X})\cosh\left(\beta\left(B+\bar{X}\right)\right)\right) - \mathbb{E}_{n,\beta}(F(\underline{X}))\mathbb{E}_{n,\beta}\left(\cosh\left(\beta\left(B+\bar{X}\right)\right)\right)\right|}{\mathbb{E}_{n,\beta}\left(\cosh\left(\beta\left(B+\bar{X}\right)\right)\right)} \\
\leq& \left|\mathrm{Cov}_{\,n,\beta}\left(F(\underline{X}),\cosh\left(\beta\left(B+\bar{X}\right)\right)\right)\right| \\
\leq& ||F||\sqrt{\mathrm{Var}_{n,\beta}\ \left(\cosh\left(\beta\left(B+\bar{X}\right)\right)\right)} \\
\leq& ||F||\beta\sinh\left(\beta\left(B+1\right)\right)\sqrt{\mathrm{Var}_{n,\beta}\left(\bar{X}\right)}\ .
\end{aligned}$$

En prenant $F(\underline{x}) = x_i$, on obtient le résultat voulu.

2.3 Conclusion

Grâce au lemme précédent et à l'équation (11), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{n-1,\beta}(m) &= \mathbb{E}_{n,\beta'}(m) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \tanh\left(\beta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=2\dots n} x_i + B\right)\right) \\
&= \tanh\left(\beta\left(m+B\right)\right)\ , \qquad (13)
\end{aligned}$$

d'où l'équation (8) trouvée précédemment.

3 Méthode de la cavité sur un graphe aléatoire

Dans cette partie, on applique la méthode de la cavité vue précédemment sur un graphe aléatoire possédant de bonnes propriétés. On établit une équation du type point fixe permettant de déterminer l'aimantation moyenne.

3.1 Graphe aléatoire et simplification du modèle

Soit $\mathbb{G}$ un graphe aléatoire. On cherche à se ramener à l'étude d'un arbre car ce cas est beaucoup plus simple à traiter. On considère donc les graphes suivants.

Notation Soit deux arbres T_1 et T_2. On note $T_1 \simeq T_2$ si les arbres T_1 et T_2 sont identiques à un à un ré-étiquetage près.

Définition Soit $\mathbb{P}_n$ la loi de la boule $B_i(t)$ pour $i \in V_n$ un sommet choisi uniformément. On dit que G_n converge localement vers l'arbre aléatoire T si, pour tout t et pour tout arbre T de profondeur au plus t :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n\{B_i(t) \simeq T\} = \mathbb{P}\{T(t) \simeq T\} \ , \tag{14}$$

où $T(t)$ est le sous-arbre composé des t premières générations de T.

On voudrait, en plus du fait que le graphe converge vers un arbre, que l'arbre n'explose pas (que la loi donnant les degrés des sommets de l'arbre soit assez sympathique).

Définition On dit que G_n est uniformément modéré si

$$\lim_{l\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{i\in V_n} d_i \not\Vdash_{d_i \leq l} = 0 \tag{15}$$

Enfin, on voudrait que l'arbre obtenu, possède de bonnes propriétés, notamment celle de l'indépendance (dans un sens à préciser) des sous-arbres.

Définition Un arbre infini T ayant pour racine x_0 est dit *conditionnellement indépendant* si pour tout entier $k \leq 0$, conditionnellement à l'arbre $T(k)$, le nombre de fils δ_i pour $i \in \partial T(k)$ sont indépendants les uns des autres (où $\partial T(k)$ désigne la k-ième génération de l'arbre T).

En particulier, les graphes aléatoires d'Erdos-Renyi verifient toutes ces hypothèses. Dans la suite, on étudie seulement le modèle d'Ising sur un arbre T particulier.

3.2 Graphe 2-régulier

On considère dans cette partie un graphe G régulier dont tous les sommets sont de degrés $k = 2$. On verra dans la suite que la généralisation à k quelconque est immédiate. Soit x_0 la racine de l'arbre et x_1 et x_2 les fils de x_0. On a, d'après l'expression de μ :

$$\mu(x_0) = \frac{1}{Z_n} \sum_{x_1 x_2} e^{\beta B x_0 - \beta(x_0 x_1 + x_0 x_2)} e^{-\beta H_1(\underline{x}) - \beta H_2(\underline{x})}$$

où $H_1(\underline{x})$ et $H_2(\underline{x})$ représentent les hamiltoniens associés aux sous arbres $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ ayant respectivement x_1 et x_2 pour racine.

$$\mu(x_0) = \frac{1}{Z'_n} e^{\beta B x_0} \left(\sum_{x_1} e^{\beta x_0 x_1} \frac{e^{-\beta H_1(\underline{x})}}{Z_1} \right) \left(\sum_{x_2} e^{\beta x_0 x_2} \frac{e^{-\beta H_2(\underline{x})}}{Z_2} \right)$$

où l'on a choisi les constantes Z_1 et Z_2 de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\beta H_1(\underline{x})}}{Z_1} &= \mu_1(\underline{x}) \\ \text{et } \frac{e^{-\beta H_2(\underline{x})}}{Z_2} &= \mu_2(\underline{x}) \ . \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mu(x_0) = \frac{1}{Z'_n} e^{\beta B x_0} \left(\sum_{x_1} e^{\beta x_0 x_1} \mu_1(\underline{x}) \right) \left(\sum_{x_2} e^{\beta x_0 x_2} \mu_2(\underline{x}) \right) \ .$$

Or les sous arbres $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ sont indépendants et ont même loi, donc :

$$\mu(x_0) = \frac{1}{Z} \exp(\beta B x_0) \left(\sum_{x_1} \exp\left(\beta x_0 x_1\right) \mu_1(x_1) \right)^2 \ .$$

Notons :

$$\begin{aligned} \mu_+ &= \mu_1(x_1 = 1) \\ \mu_- &= \mu_1(x_1 = -1) \ . \end{aligned}$$

On a les relations suivantes entre μ_+, μ_- et $\mathbb{E}(x_1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x_1) &= \mu_+ - \mu_- \\ 1 &= \mu_+ + \mu_- \ . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mu_+ &= \frac{1 + \mathbb{E}(x_1)}{2} \\ \text{et } \mu_- &= \frac{1 - \mathbb{E}(x_1)}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit alors l'expression de :

$$\begin{aligned} \sum_{x_1} \exp(\beta x_0 x_1) \mu_1(x_1) &= \exp(\beta x_0) \mu_+ + \exp(-\beta x_0) \mu_- \\ &= \cosh(\beta x_0)(1 + \mathbb{E}(x_1) \tanh(\beta x_0)) \ . \end{aligned}$$

En intégrant le terme $\cosh(\beta)$ dans le facteur $\frac{1}{Z}$ (la fonction cosh étant paire), on obtient :

$$\mu(x_0) = \frac{1}{Z} e^{\beta B x_0} \left(1 + \mathbb{E}(x_1) \tanh\left(\beta x_0\right)\right)^2 \ .$$

Posons

$$Ce^{hx_0} = 1 + \mathbb{E}(x_1)\tanh(\beta x_0)\ .$$

où on a choisi C et h un peu comme on voulait. On a donc :

$$\begin{aligned} Ce^{h} &= (1 + \mathbb{E}(x_1)\tanh(\beta)) \\ Ce^{-h} &= (1 - \mathbb{E}(x_1)\tanh(\beta))\ . \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} e^{2h} &= \frac{1 + \mathbb{E}(x_1)\tanh(\beta)}{1 - \mathbb{E}(x_1)\tanh(\beta)} \\ C &= \sqrt{1 - (\mathbb{E}(x_1)\tanh(\beta))^2}\ . \end{aligned}$$

On trouve finalement la valeur de h :

$$h = \operatorname{argth}\left(\mathbb{E}(x_1)\tanh(\beta)\right)\ . \tag{16}$$

En reprenant le calcul précédent, on obtient

$$\mu(x_0) = \frac{1}{Z}\exp((2h + B)x_0)\ ,$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x_0) &= \tanh(\beta B + 2h) \\ &= \tanh(\beta B + 2\operatorname{argth}\left(\mathbb{E}(x_1)\tanh(\beta)\right))\ . \end{aligned}$$

3.3 Bilan

Comme pour l'inégalité de la cavité, on suppose ici, sans le démontrer que $\mathbb{E}(x_0) \sim \mathbb{E}(x_1)$, c'est-à-dire que le fait de considérer l'arbre total ou un sous-arbre, n'a que peu d'importance dans le calcul de l'aimantation moyenne.

L'aimantation moyenne peut être considérée comme étant le point fixe de la fonction

$$f : x \longmapsto \tanh(\beta B + 2\operatorname{argth}\left(x\tanh(\beta)\right))\ .$$

Plus généralement, l'aimantation moyenne d'un arbre de degré k est donnée par la formule :

$$f : x \longmapsto \tanh(\beta B + k\ \operatorname{argth}\left(x\tanh(\beta)\right))\ .$$