

Relativité Générale et Trou Noir Sphérique

Erwan Scornet

15 juin 2010

Le but de cet exposé est de familiariser l'auteur, ainsi que le lecteur, avec le concept de trou noir. Ces corps mystérieux et impénétrables attisent la curiosité du plus grand nombre : que peut-il donc bien se passer à l'intérieur ?

Si toute la lumière n'a pas été faite sur les trous noirs, c'est parce que ce sont des êtres qui fuient le regard des autres : ils sont le cauchemar de tout bon astrophysicien et même les paparazzis n'ont jamais réussi à capter ne serait-ce que leur reflet.

Pendant un temps sous le feu des projecteurs grâce à la littérature de science-fiction, ils restent désormais dans l'ombre, invisible aux yeux du grand public.

Heureusement malgré leur fâcheuse tendance à refuser de se montrer au grand jour, ils influent sur notre vision du monde par leurs courbes alléchantes qui altèrent l'espace-temps.

Pourquoi un photon, usuellement plutôt austère, ressent le besoin d'aller vers un trou noir quand il en voit un ?

Pour comprendre la vie d'un photon à l'approche d'un trou noir, ce qu'il ressent une fois à l'intérieur, pour savoir s'il va réussir à vivre avec l'idée qu'il ne pourra plus jamais retourner sur Terre ; afin de saisir les techniques qui permettent au trou noir d'attirer irrésistiblement les photons assez audacieux pour tenter une approche, nous allons devoir démythifier ses objets

qui tomberont sous le joug de la relativité générale.

Nous allons d'abord voir les outils fondamentaux nécessaires à la compréhension de la relativité générale, en particulier la manière dont la courbure détermine la trajectoire des particules.

Nous verrons ensuite l'équation d'Einstein qui permet de relier les caractéristiques de l'espace dans lequel on vit à la courbure. Nous appliquerons l'équation d'Einstein à un problème simple (espace temps statique, vide, à symétrie sphérique) pour en déduire une métrique, la métrique de Schwarzschild qui se trouve être la métrique associée à un trou noir sphérique. En effet, on montrera ensuite le théorème de Birkhoff qui affirme que la métrique de Schwarzschild est encore solution d'un espace temps vide à symétrie sphérique (on a supprimé l'hypothèse statique).

Pour finir, on appliquera cette métrique à un trou noir pour en déduire que celui-ci piège les particules et que certaines particules cessent d'exister après un certain temps (fini) passé dans le trou noir. On énoncera à ce sujet deux théorèmes de "singularité" dus à Hawking et Penrose.

Table des matières

I La relativité générale : concepts fondamentaux et bases mathématiques	4
1 Partie de \mathbb{R}^4 : notion de variété et de vecteur	5
1.1 Notion de variété	5
1.2 Système de coordonnées	5
1.3 Courbes et vecteurs sur une variété	6
1.4 Déplacements élémentaires sur une variété	8
2 Physique sur la variété	9
2.1 Tenseur métrique	9
2.2 Vecteurs de la variété	10
3 Trajectoire, distance et temps dans cet espace	11

3.1	Premier postulat de la relativité générale	11
3.2	Trajectoire d'un point matériel	12
3.3	Distance et temps propre	12
3.4	Quelques définitions supplémentaires	13
4	Principe d'équivalence, géodésiques	14
4.1	Géodésique	14
4.2	Principe d'équivalence	14
4.3	Equation des géodésiques	15
II	Équation d'Einstein et théorème de Birkhoff	17
5	Équation d'Einstein	17
5.1	Tenseur d'Einstein	17
5.2	Tenseur énergie-impulsion	18
5.2.1	Cas général	18
5.2.2	Espace-temps vide et fluide parfait	19
5.3	Équation d'Einstein	19
6	Résolution de l'équation d'Einstein dans un cas simple	19
6.1	Métrique de Schwarzschild	19
6.2	Espace-temps statique, vide, à symétrie sphérique	20
7	Théorème de Birkhoff	23
7.1	Énoncé	23
7.2	Démonstration	24
III	Trou noir sphérique et horizon des événements	30
8	Métrique de Schwarzschild pour les trous noirs	30
8.1	Géodésiques de lumière entrantes et sortantes	31
8.2	Coordonnées d'Eddington-Finkelstein	32
8.3	Coordonnées d'Eddington-Finkelstein 3+1	33
9	Trous noirs	34
9.1	Singularités	34
9.2	Horizon des événements	35
9.3	Bilan	36
9.4	Théorème de singularité	37

Première partie

La relativité générale : concepts fondamentaux et bases mathématiques

Une des idées révolutionnaires de la relativité générale a été de cesser de penser l'espace et le temps comme dissociés : au lieu de considérer le déplacement d'une particule dans \mathbb{R}^3 , on considère que cette particule vit dans un espace de dimension 4 comprenant 4 coordonnées, 1 coordonnée temporelle et 3 coordonnées spatiales . La trajectoire s'effectue donc dans \mathbb{R}^4 au lieu de \mathbb{R}^3 .

Ceci provient de l'expérience de Michelson-Morley qui a montré que la vitesse de la lumière était finie et indépendante du référentiel dans lequel on la calcule. Ainsi la notion de simultanéité n'existe plus, la seule notion à garder un sens est la notion d'événements ayant lieu en même temps au même endroit d'où la notion d'espace-temps.

Par soucis d'homogénéité, les quatre coordonnées doivent avoir la même dimension, choisie par convention comme étant celle d'une longueur. La première coordonnées n'est donc pas t mais ct où

$$c = \underline{2.99792458 \times 10^8 m.s^{-1}}$$

Cependant, si en relativité restreinte (c'est-à-dire lorsqu'on considère que l'espace-temps est plat), l'espace est effectivement \mathbb{R}^4 , ce résultat est faux en relativité générale. En effet, on est souvent amené à considérer des parties de \mathbb{R}^4 (portant le nom de variétés), ce qui rend les calculs plus complexes, car ces parties n'ont pas la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^4 . De plus, en relativité restreinte, les coordonnées spatiales et temporelles sont séparées (on parle d'une coordonnée temporelle et de trois coordonnées spatiales) contrairement à la relativité générale comme on le verra plus loin.

1 Partie de \mathbb{R}^4 : notion de variété et de vecteur

1.1 Notion de variété

Variété de dimension n

Une variété de dimension n est un espace topologique localement homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n

Remarque

En pratique, on se contentera d'étudier des variétés de dimension au plus 4 car l'espace dans lequel elles sont plongées est de dimension 4.

Pour mieux comprendre cette définition, on peut se représenter une variété de dimension 4 comme une partie qui ressemble localement à \mathbb{R}^4 , c'est-à-dire que pour tout point x de la variété, on peut trouver un système de 4 coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) qui permet d'identifier un voisinage de x .

1.2 Système de coordonnées

Définition

On appelle système de coordonnées (ou carte) sur une partie ouverte U d'une variété \mathcal{E} tout étiquetage des points de U , c'est-à-dire tout homéomorphisme Φ :

$$\begin{aligned}\Phi : U \subset \mathcal{E} &\longrightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^4 \\ P &\longmapsto (x^0, x^1, x^2, x^3)\end{aligned}\tag{1}$$

Remarque 1

En général, la première coordonnée est *ct* et les trois autres sont les coordonnées habituelles d'espace.

Remarque 2

On adoptera dans toute la suite, la convention de sommation d'Einstein : lorsque un indice $\alpha \in \{0, \dots, n\}$ est répété dans une expression, cette expression représente la somme prise sur toutes les valeurs possibles de α .

Exemple

$$\sum_{\alpha=0}^n x_{\alpha} y_{\alpha} = x_{\alpha} y_{\alpha}$$

1.3 Courbes et vecteurs sur une variété

Dans \mathbb{R}^n , il est aisé de définir les vecteurs car \mathbb{R}^n est un espace vectoriel. Cependant, dans une variété, notée dans la suite \mathcal{E} , on ne peut pas définir trivialement les vecteurs comme une quantité reliant deux points car il se peut que cette quantité sorte de la variété. On va donc utiliser la notion de courbe pour définir des vecteurs : un vecteur sera défini comme étant tangent à une courbe donnée.

Définition

Une courbe \mathcal{C} est l'image d'une application différentiable

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathcal{E} \\ \lambda &\longmapsto P = \mathcal{P}(\lambda) \in \mathcal{C} \end{aligned} \tag{2}$$

Cette application est appelée un paramétrage de la courbe \mathcal{C}

Définition d'un vecteur

Motivation : vecteurs dans \mathbb{R}^2

Soit une courbe \mathcal{C} dans \mathbb{R}^2 paramétrée par λ , telle que :

$$\begin{aligned} x &= X(\lambda) \\ y &= Y(\lambda) \end{aligned}$$

Le vecteur tangent à la courbe \mathcal{C} au point de coordonnées $(X(\lambda), Y(\lambda))$ est donné par :

$$\vec{v} = (\dot{X}(\lambda), \dot{Y}(\lambda))$$

Soit f un champ scalaire différentiable sur \mathbb{R}^2 . L'accroissement élémentaire de f le long de la courbe \mathcal{C} est donné par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{X} d\lambda + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{Y} d\lambda$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= \frac{\partial f}{\partial x} \dot{X} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{Y} \\ &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \end{aligned} \quad (3)$$

D'après la formule (3), le vecteur \vec{v} peut être vu comme l'application qui à tout champ scalaire fait correspondre la dérivée directionnelle donnée par (3).

Généralisation : vecteur sur une variété

En s'inspirant de la remarque précédente, on généralise la notion de vecteur à une variété.

Etant donné une courbe \mathcal{C} sur une variété \mathcal{E} et un paramétrage \mathcal{P} de \mathcal{C} , on définit le vecteur tangent \vec{v} associé au paramétrage \mathcal{P} en un point $P = \mathcal{P}(\lambda)$ comme l'opérateur qui à tout champ scalaire $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable au voisinage de P fait correspondre la dérivée $\frac{df}{d\lambda}$ de f le long de la courbe

$$\vec{v}(f) = \frac{df}{d\lambda} \quad (4)$$

Espace vectoriel tangent

Si l'on se donne un système de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) , on peut réécrire l'équation précédente :

$$\vec{v}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial \lambda} \quad (5)$$

Il apparaît alors des vecteurs tangents privilégiés, ceux tangents aux courbes de coordonnées constantes :

$$\vec{\partial}_0(f) = \frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^0} \quad (6)$$

De même, on pose pour tout $\alpha \in \{0 \dots 3\}$:

$$\vec{\partial}_\alpha(f) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \quad (7)$$

L'ensemble des vecteurs tangents en un point $P \in \mathcal{E}$ forme un espace vectoriel de dimension 4 appelé espace vectoriel tangent, noté $\tau_P(\mathcal{E})$, dont une base est $(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_1, \vec{\partial}_2, \vec{\partial}_3)$.

Remarque

Il y a autant d'espaces vectoriels tangents que de points sur la variété, ce qui explique l'indice P dans $\tau_P(\mathcal{E})$.

1.4 Déplacements élémentaires sur une variété

On définit également les déplacements élémentaires sur une variété à l'aide des vecteurs tangents. Soient deux points P et P' de la variété \mathcal{E} infiniment proches. Soit \mathcal{C} une courbe de \mathcal{E} passant par P et P' et soit \mathcal{P} un paramétrage de \mathcal{C} de sorte que :

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{P}(\lambda) \\ P' &= \mathcal{P}(\lambda + d\lambda) \end{aligned} \quad (8)$$

On définit alors un vecteur déplacement élémentaire $d\vec{P}$ en posant :

$$d\vec{P} = \vec{v}d\lambda \quad (9)$$

où \vec{v} est le vecteur tangent à la courbe \mathcal{C} au point P et associé au paramétrage \mathcal{P} (car on a vu que l'ensemble des vecteurs tangents à un point de \mathcal{E} est un espace vectoriel de dimension 4 ; pour définir de manière unique un vecteur tangent, il faut préciser la courbe et donc le paramétrage que l'on considère).

$d\vec{P}$ appartient donc à l'espace tangent $\tau_P(\mathcal{E})$. Appliquons ce vecteur à un champ scalaire f en utilisant la définition de \vec{v} :

$$\begin{aligned}
d\vec{P}(f) &= \vec{v}(f)d\lambda \\
&= \frac{df}{d\lambda}d\lambda \\
&= df \\
&= f(\mathcal{P}(\lambda + d\lambda)) - f(\mathcal{P}(\lambda))
\end{aligned} \tag{10}$$

On a donc :

$$d\vec{P}(f) = f(P') - f(P) \tag{11}$$

Ainsi $d\vec{P}$ ne dépend pas du paramétrage de \mathcal{C} (puisque'il ne dépend que des points P et P'). Le nom de déplacement élémentaire est justifié par le fait qu'il associe à chaque fonction scalaire sa différence "élémentaire" entre deux points P et P' .

2 Physique sur la variété

2.1 Tenseur métrique

On a généralisé dans le paragraphe précédent les notions de courbes, de vecteurs et de déplacement élémentaire à une variété . Un autre aspect fondamental en physique relativiste est la notion de distance sur une variété.

Afin de généraliser la notion de produit scalaire à une variété de \mathbb{R}^4 , on va introduire le tenseur métrique g .

Définition

- Une application \mathbf{g} de $\tau_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}) \times \tau_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite
- bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacun de ses arguments
 - symétrique si $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbf{g}(\vec{v}, \vec{u})$ pour tout couple (\vec{v}, \vec{u})
 - non dégénérée si $\nexists \vec{u} \in \tau_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $\forall \vec{v} \in \tau_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}), \mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
 - de signature $(-, +, +, +)$ s'il existe une base de $\tau_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$ telle que la matrice de \mathbf{g} dans cette base soit diagonale, de la forme

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{g} est une forme bilinéaire, symétrique : elle vérifie donc les propriétés d'un produit scalaire si l'on omet l'aspect défini positif. On remarque que si on se restreint à l'espace des coordonnées spatiales (c'est-à-dire si l'on omet la coordonnée x^0), \mathbf{g} est exactement le produit scalaire euclidien. C'est le rajout de la variable ct qui enlève le caractère défini positif de \mathbf{g} . Tout ceci justifie la notation suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v}) \quad (12)$$

\mathbf{g} est appelé tenseur métrique, on parle aussi de métrique sur \mathcal{E} .

Remarque

Il faut bien garder à l'esprit que le "produit scalaire" \cdot est directement relié à \mathbf{g} et n'est en aucun cas le produit scalaire canonique de l'espace \mathbb{R}^4 . Dans la suite, on nommera produit scalaire la loi \cdot .

2.2 Vecteurs de la variété

Genre des vecteurs

La métrique \mathbf{g} permet de distinguer trois types de vecteurs, dont le sens physique sera précisé ultérieurement :

- les vecteurs \vec{u} vérifiant $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u}) < 0$ sont appelés du genre temps
- les vecteurs \vec{u} vérifiant $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u}) > 0$ sont appelés du genre espace
- les vecteurs $\vec{u} \neq \vec{0}$ vérifiant $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ sont appelés du genre lumière.

Cône isotrope

Afin de mieux se représenter la structure de l'espace temps, on se limitera dans cette partie à une dimension temporelle et à deux dimensions spatiales. On se placera donc dans \mathbb{R}^3 .

On peut se représenter ces trois types de vecteurs de la manière suivante : les vecteurs du genre lumière forment un cône isotrope \mathcal{I} de la forme bilinéaire \mathbf{g} . Ce cône partage l'espace en deux :

- Les vecteurs à l'intérieur de ce cône sont les vecteurs de genre temps.
- Les autres, à l'extérieur du cône sont les vecteurs de genre espace

Remarque

Le cône comprend deux nappes, on choisit d'appeler nappe du futur une de ces deux nappes. Le choix de la nappe du futur correspond au choix d'une flèche du temps.

3 Trajectoire, distance et temps dans cet espace

3.1 Premier postulat de la relativité générale

Énoncé

Les photons et plus généralement les particules de masse nulle sont décrits par des courbes de \mathcal{E} dont les vecteurs tangents sont des vecteurs du cône isotrope de \mathbf{g} .

Vision géométrique

En un point P de \mathcal{E} donné, l'ensemble des courbes représentant les photons a pour support un cône qui est l'empreinte du cône isotrope de l'espace vectoriel tangent $\tau_P(\mathcal{E})$. Ce cône de l'espace \mathcal{E} est appelé cône de lumière.

Remarquons que les cônes de lumière sont une structure intrinsèque à \mathbf{g} (ils ne dépendent pas de l'observateur), ce qui traduit l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport à tous les référentiels inertiels (postulat d'Einstein en 1905).

Remarque

Pour décrire totalement un photon, il faut préciser, en plus de la courbe \mathcal{C} qu'il suit dans l'espace \mathcal{E} , sa quadri-impulsion qui est un quadrivecteur tangent à la courbe \mathcal{C}

3.2 Trajectoire d'un point matériel

On vient de voir que la trajectoire d'un photon dans la variété \mathcal{E} a pour vecteurs tangents des vecteurs de genre lumière : c'est ce qui caractérise la trajectoire d'un photon.

De manière plus générale, la trajectoire de toute particule est décrite par une courbe de \mathcal{E} . Cette courbe est appelée ligne d'univers de la particule matérielle considérée. On suppose que :

Toute courbe qui représente la trajectoire d'un point matériel doit être du genre temps

Les lignes d'univers sont donc, par définition, situées à l'intérieur du cône de lumière local.

3.3 Distance et temps propre

Distance le long d'une courbe de \mathcal{E}

On définit la distance infinitésimale entre deux points P et P' de \mathcal{E} comme étant le nombre ds tel que :

$$ds^2 = \mathbf{g}(d\vec{P}, d\vec{P}) \quad (13)$$

On définit alors la distance entre deux points A et B le long d'une courbe \mathcal{C} comme étant :

$$L_{A \rightarrow B, \mathcal{C}} = \int_A^B \sqrt{\pm ds^2} \quad (14)$$

Remarque

La définition de la distance entre deux points par le forme bilinéaire symétrique \mathbf{g} justifie le nom de métrique pour \mathbf{g} .

Temps propre

Soient P et P' deux points infiniment proches appartenant à la même ligne d'univers \mathcal{L} . On définit le temps propre infinitésimal $d\tau$ le long de la ligne d'univers \mathcal{L} :

$$d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c} \quad (15)$$

Cette quantité est bien définie car $ds^2 = \mathbf{g}(d\vec{P}, d\vec{P})$ est négative le long d'une ligne d'univers. On a donc, en utilisant ce qui précède, la définition de \vec{v} , et en supposant connu un paramétrage \mathcal{P} de \mathcal{L} :

$$d\tau = \frac{\sqrt{-\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v})}}{c} d\lambda \quad (16)$$

De même, on peut définir le temps propre entre deux événements quelconques, le long d'une ligne d'univers \mathcal{L} :

$$\tau(A, B) = \int_A^B d\tau = \frac{1}{c} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{-\mathbf{g}(\vec{v}(\lambda), \vec{v}(\lambda))} d\lambda \quad (17)$$

Remarque

Le temps propre correspond au temps mesuré par une horloge attachée au point matériel qui suit la ligne d'univers \mathcal{L} . Le temps propre ne dépend que du tenseur métrique \mathbf{g} : c'est donc le temps "canonique" associé au mouvement d'une particule de ligne d'univers \mathcal{L} .

3.4 Quelques définitions supplémentaires

Quadrivitesse

On appelle quadrivitesse ou 4-vitesse du point matériel dont la ligne d'univers est \mathcal{L} , le vecteur de $\tau_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$ donné par :

$$\vec{u} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{P}}{d\tau} \quad (18)$$

En utilisant la définition de $d\tau$, on obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = -1 \tag{19}$$

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la quadrivitesse n'est pas homogène à une vitesse mais est sans dimension. De plus, cette quadrivitesse ne dépend pas de l'observateur mais uniquement de la métrique \mathbf{g} .

Quadri-impulsion

On définit la quadri-impulsion d'une particule matérielle de masse (ou masse au repos) m et de quadrivitesse \vec{u} par :

$$\vec{p} = mc\vec{u} \tag{20}$$

La quadri-impulsion contient l'intégralité de la description physique d'une particule matérielle.

4 Principe d'équivalence, géodésiques

4.1 Géodésique

Les géodésiques sont les lignes qui rendent extrémale la distance entre deux points. Il existe trois types de géodésique :

- Les géodésiques du genre espace qui minimisent la distance parmi toutes les courbes du genre espace reliant deux points.
- Les géodésiques du genre temps qui maximisent la distance parmi toutes les courbes du genre temps reliant deux points.
- Les géodésiques de longueur nulle qui assurent une distance nulle entre deux points.

4.2 Principe d'équivalence

Les lignes d'univers des particules massives sont des géodésiques de genre temps de l'espace-temps.

4.3 Equation des géodésiques

Nous allons maintenant déterminer l'équation des géodésiques de genre temps car elles décrivent la trajectoire des particules. D'après ce qui précède, elle doit maximiser le temps entre deux points. On va donc chercher sur l'ensemble des courbes passant par A et par B, celle qui rend $\tau(A, B)$ maximal.

On a :

$$\tau(A, B) = \frac{1}{c} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{X}_\alpha \dot{X}_\beta} \quad (21)$$

On pose :

$$L(\dot{X}^\alpha, \dot{X}^\beta) = \sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{X}_\alpha \dot{X}_\beta} \quad (22)$$

Où L à la structure d'un Lagrangien. Il vérifie donc l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial X^\alpha} = 0 \quad (23)$$

Explicitons chaque terme de cette équation :

$$\frac{\partial L}{\partial X^\alpha} = -\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\alpha} = -\frac{1}{L} g_{\alpha\mu} \dot{X}^\mu \quad (25)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\alpha} \right) = \frac{1}{L^2} \frac{dL}{d\lambda} g_{\alpha\mu} \dot{X}^\mu - \frac{1}{L} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{X}^\nu \dot{X}^\mu - \frac{1}{L} g_{\alpha\mu} \ddot{X}^\mu \quad (26)$$

En remplaçant dans l'équation d'Euler-Lagrange (23), on obtient :

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{d\lambda} g_{\alpha\mu} \dot{X}^\mu - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - g_{\alpha\mu} \ddot{X}^\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = 0 \quad (27)$$

Comme le tenseur g est symétrique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\mu} \dot{X}^\nu \dot{X}^\mu + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \right) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \end{aligned} \quad (28)$$

On peut injecter (28) dans (27) :

$$g_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = \kappa(\lambda) g_{\alpha\mu} \dot{X}^\mu \quad (29)$$

où l'on a posé

$$\kappa(\lambda) = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\lambda} \quad (30)$$

On obtient alors, en multipliant par la matrice inverse $g^{\alpha\beta}$, l'équation des géodésiques :

$$\ddot{X}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = \kappa(\lambda) \dot{X}^\alpha \quad (31)$$

où l'on a défini les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ par la relation :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (32)$$

Remarque 1

On vient d'utiliser le fait que la matrice de g est inversible. En effet, $\text{Kerg} \neq 0$ contredit le fait que la métrique doit être non dégénérée.

Remarque 2

Si on choisit de paramétrer la ligne d'univers géodésique par le temps propre τ , on a :

$$\dot{X}^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\tau} = cu^\alpha \quad (33)$$

Donc, d'après (22) et comme $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$, on a :

$$\begin{aligned} L &= c \\ \Rightarrow \frac{dL}{d\lambda} &= 0 \\ \Rightarrow \kappa(\lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Finalement, on obtient l'équation des géodésiques simplifiées :

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} = 0 \quad (35)$$

Deuxième partie

Équation d'Einstein et théorème de Birkhoff

Dans cette partie, on cherche à déterminer la métrique \mathbf{g} en fonction de ce que contient l'espace-temps. Pour ce faire, on explicite l'équation d'Einstein qui nous fournira une relation pour déterminer \mathbf{g} .

Cependant le calcul de \mathbf{g} est dans la plupart des cas très difficile (car il faut résoudre un système d'EDP non linéaire cf équation d'Einstein). On doit donc faire quelques hypothèses quant à la nature de l'espace-temps pour pouvoir déterminer complètement \mathbf{g} . Le théorème de Birkhoff, dont on proposera une démonstration, permettra non seulement de trouver une solution à l'équation d'Einstein dans un cas particulier mais prouvera son unicité.

5 Équation d'Einstein

5.1 Tenseur d'Einstein

On définit tout d'abord le tenseur de courbure, ou tenseur de Riemann qui dépend de la géométrie de la variété via les symboles de Christoffel :

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\partial\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \quad (36)$$

On définit le tenseur de Ricci, obtenu par contraction des premier et troisième indices du tenseur de Riemann :

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\sigma\beta}^{\sigma} \quad (37)$$

Trace d'un tenseur par rapport à la métrique \mathbf{g}

On définit la trace d'un tenseur $T_{\alpha\beta}$ d'ordre 2 par la formule suivante

$$Tr(T) = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$$

On définit alors le scalaire de courbure (ou scalaire de Ricci) comme la trace du tenseur de Ricci prise à l'aide de la métrique g :

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (38)$$

Pour finir, on définit le tenseur d'Einstein comme étant :

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \quad (39)$$

5.2 Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion \mathbf{T} décrit ce que contient l'espace-temps. C'est un champ tensoriel symétrique d'ordre 2. La définition générale de ce tenseur étant trop compliquée à introduire ici, on se contentera de donner l'expression générale du tenseur énergie-impulsion lorsque ce dernier ne prend en compte qu'un contenu en matière de l'espace-temps (en particulier, on suppose ici qu'il n'y a aucune énergie électromagnétique, seule l'énergie propre à la matière est prise en compte)

5.2.1 Cas général

Le tenseur \mathbf{T} doit vérifier les propriétés suivantes :

- La densité de la matière mesurée par un observateur \mathcal{O} est

$$\epsilon = \mathbf{T}(\vec{u}_0, \vec{u}_0) \quad (40)$$

- la composante p^i de la densité d'impulsion ($i = 1..3$) de la matière mesurée par \mathcal{O} est :

$$p^i = -\frac{1}{c} \mathbf{T}(\vec{u}_0, \vec{e}_i) \quad (41)$$

où \vec{e}_i constitue une base de l'hyperplan orthogonal à \mathcal{O} .

- Le tenseur des contraintes mesuré par \mathcal{O} est :

$$S_{ij} = \mathbf{T}(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \quad (42)$$

5.2.2 Espace-temps vide et fluide parfait

Espace-temps vide

Dans ce cas, le tenseur énergie-impulsion se réduit à 0. En effet, l'espace-temps ne contient rien, il n'y a donc pas d'énergie.

Fluide parfait

Ici, on obtient

$$\begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

5.3 Équation d'Einstein

Voici l'équation d'Einstein (que nous admettons) qui relie le tenseur d'Einstein \mathbf{G} au tenseur énergie-impulsion :

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (43)$$

où Λ est la constante cosmologique et $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

6 Résolution de l'équation d'Einstein dans un cas simple

6.1 Métrique de Schwarzschild

On définit la métrique de Schwarzschild de la façon suivante :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (44)$$

Remarque 1

On va voir que c'est l'unique métrique qui correspond à un espace temps vide à symétrie sphérique. Elle sera par la suite utilisée pour décrire l'espace-temps contenant un trou noir sphérique.

Remarque 2

Il convient de préciser ce que représente le paramètre M dans l'expression précédente. Dans le cas général, c'est simplement une constante d'intégration. Cependant, on peut montrer qu'en ce qui concerne les trous noirs, M s'interprète comme la masse du trou noir : ceci s'établit par exemple en regardant la trajectoire de particule massique assez loin du trou noir et en identifiant ces trajectoires au cas classique (l'espace-temps asymptotique correspond à la métrique de Minkowski qui est la métrique de la relativité restreinte).

6.2 Espace-temps statique, vide, à symétrie sphérique

On considère dans cette partie un espace-temps statique vide à symétrie sphérique. On va établir l'expression de la métrique dans cet espace appelée métrique de Schwarzschild. On verra dans la partie suivante que cette métrique décrit l'espace-temps même lorsqu'on ne le suppose plus statique : c'est le théorème de Birkhoff. Mais commençons par une petite définition.

Espace-temps statique

On dit qu'un espace temps (\mathcal{E}, g) est statique si :

- $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0$ (ie la métrique ne dépend pas du temps)
- le vecteur $\vec{\partial}_0$ est du genre temps.

Démonstration

La métrique peut donc se mettre sous la forme (la démonstration est la même que dans le théorème de Birkhoff, cf plus loin) :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -N(r, t)^2 c^2 dt^2 + A(r, t)^2 dr^2 + B(r, t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (45)$$

où l'on a, par stationnarité de l'espace-temps :

$$\begin{aligned}
N(r, t) &\equiv N(r) \\
A(r, t) &\equiv A(r) \\
B(r, t) &\equiv B(r)
\end{aligned} \tag{46}$$

On peut donc réécrire la métrique, en supposant de plus que $B(r) = r$ (cf section 7.2) :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{2\alpha(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{47}$$

Notons que la matrice inverse de $g_{\alpha\beta}$ notée $g^{\alpha\beta}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
-\frac{e^{-2\nu(r)}}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & e^{-2\alpha(r)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}
\end{bmatrix}$$

On peut donc calculer les symboles de Christoffel selon la formule (32) :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0r}^0 &= \Gamma_{r0}^0 = \nu' \\
\Gamma_{00}^r &= e^{2(\nu-\alpha)} \nu' \\
\Gamma_{rr}^r &= \alpha' \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\alpha} \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2\theta e^{-2\alpha} \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\cos\theta \sin\theta \\
\Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned} \tag{48}$$

et tous les autres symboles de Christoffel sont nuls. On peut ainsi calculer le tenseur de Ricci grâce à (37) :

$$\begin{aligned}
R_{00} &= e^{2(\nu-\alpha)}(\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{2}{r}\nu') \\
R_{rr} &= -\nu'' - (\nu')^2 + \nu'\alpha' + \frac{2}{r}\alpha' \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\alpha}(r(\alpha' - \nu') - 1) + 1 \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta(e^{-2\alpha}(r(\alpha' - \nu') - 1) + 1)
\end{aligned} \tag{49}$$

Le scalaire de Ricci s'obtient grâce à (38) :

$$\begin{aligned}
R &= -e^{-2\nu}R_{00} + e^{-2\alpha}R_{rr} + \frac{1}{r^2}R_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \\
R &= 2e^{-2\alpha}(-\nu'' - (\nu')^2 + \nu'\alpha' + \frac{2}{r}(\alpha' - \nu') + \frac{1}{r^2}(e^{2\alpha} - 1))
\end{aligned} \tag{50}$$

On peut ainsi calculer le tenseur d'Einstein d'après (39) :

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}R(-e^{2\nu}) = \frac{e^{2(\nu-\alpha)}}{r^2}(2r\alpha' + e^{2\alpha} - 1) \tag{51}$$

$$G_{rr} = R_{rr} - \frac{1}{2}Re^{2\alpha} = \frac{1}{r^2}(2r\nu' + 1 - e^{2\alpha}) \tag{52}$$

$$G_{\theta\theta} = R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Rr^2 = \frac{e^{-2\alpha}}{r^2}(\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{1}{r}(\nu' - \alpha')) \tag{53}$$

$$G_{\phi\phi} = R_{\phi\phi} - \frac{1}{2}Rr^2 = \frac{e^{-2\alpha}}{r^2}(\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{1}{r}(\nu' - \alpha')) \sin^2\theta \tag{54}$$

D'où les 3 équations non triviales résultants de l'équation d'Einstein (en prenant $\Lambda = 0$ et pour $T=0$) :

$$2r\alpha' + e^{2\alpha} - 1 = 0 \tag{55}$$

$$2r\nu' + 1 - e^{2\alpha} = 0 \tag{56}$$

$$\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{1}{r}(\nu' - \alpha') = 0 \tag{57}$$

On résout l'équation (55) en posant $f(r) = e^{-2\alpha(r)}$ et on obtient :

$$rf' + 1 - f = 0 \tag{58}$$

Dont la solution s'écrit :

$$f(r) = 1 + \frac{K}{r} \quad (59)$$

et donc

$$\alpha(r) = -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{K}{r}\right) \quad (60)$$

En reportant dans l'équation (56), il vient :

$$\nu' = \frac{1}{2} \frac{\frac{-K}{r^2}}{1 + \frac{K}{r}} \quad (61)$$

donc

$$\nu(r) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{K}{r}\right) \quad (62)$$

On obtient donc l'expression de la métrique :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 + \frac{K}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{K}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (63)$$

qui coïncide avec la métrique de Schwarzschild si $K = \frac{-2GM}{c^2}$

Rayon de Schwarzschild

On remarque qu'il existe une valeur critique $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ appelée rayon de Schwarzschild, telle que la solution précédente n'est valide que sur les domaines $r \in]0, R_s[$ et $r \in]R_s, +\infty[$.

7 Théorème de Birkhoff

7.1 Énoncé

La métrique de Schwarzschild est l'unique solution à l'équation d'Einstein dans le vide si l'on considère des corps à symétrie sphérique.

Commentaire La métrique de Schwarzschild ne dépend pas du temps. En particulier, il est remarquable qu'un corps ayant une structure variant au cours du temps, s'il demeure à tout instant à symétrie sphérique ne peut produire qu'un champ gravitationnel statique. En fait, un résultat analogue est présent en électromagnétisme : le théorème de Gauss stipule qu'un ensemble de charge à symétrie sphérique ne peut produire un champ électrique dépendant du temps. Dans le premier cas, la création d'onde gravitationnelle est exclue. Dans le deuxième cas, ce sont les ondes électromagnétiques qui ne peuvent être créées.

7.2 Démonstration

On considère un espace-temps vide à symétrie sphérique.

D'après la symétrie sphérique, il semble naturel de considérer qu'il existe une ligne d'univers \mathcal{L} telle que pour chaque point p de cette ligne, tous les points des sphères \mathcal{S}_d de centre p et de rayon d quelconque sont équivalents. Cependant ceci suppose qu'il existe bien, à tout instant, un point de l'espace-temps qui soit centre de symétrie ce qui n'est pas toujours le cas : en particulier dans la métrique de Schwarzschild, $r=0$ est le centre de symétrie naturel de l'espace-temps mais ce point n'appartient pas à la variété. On convient donc de considérer que l'hypothèse à symétrie sphérique équivaut à la définition suivante :

Définition Un espace-temps est à symétrie sphérique s'il admet le groupe des rotations noté $SO(3)$ pour isométries et si les orbites de ce groupe sont des surfaces de genre espace. (Ce sont alors des surfaces de courbure constante strictement positive)

Soit q un point d'une orbite $\mathcal{S}(q)$. Il existe un sous-groupe I_q de $SO(3)$ de dimension 1 qui laisse stable q .

Soit $\mathcal{C}(q)$ l'ensemble des géodésiques orthogonales à $\mathcal{S}(q)$ en q . $\mathcal{C}(q)$ forme localement une surface laissée invariante par I_q . En effet, I_q est de dimension 1 et agit déjà par définition sur $\mathcal{S}(q)$, I_q laisse donc invariante les directions orthogonales à $\mathcal{S}(q)$ et donc $\mathcal{C}(q)$ en particulier.

Soit r un autre point de $\mathcal{C}(q)$, puisque I_q doit agir sur $\mathcal{S}(r)$ et que $\mathcal{C}(q)$ est laissée invariante par I_q , alors $\mathcal{C}(q)$ est orthogonal à $\mathcal{S}(r)$.

D'après le théorème de Schmidt (1967), les orbites du groupe \mathcal{S} sont orthogonales aux surfaces \mathcal{C}

De plus, ces surfaces définissent localement des cartes 1-1 entre les orbites :

$$f : q \in \mathcal{S}(q) \longrightarrow f(q) \in \mathcal{C}(q) \cap \mathcal{S}(r) \quad (64)$$

Comme tout élément de I_q commute avec f , deux vecteurs de même norme dans $\mathcal{S}(q)$ en q sont transformés en deux vecteurs de même norme dans $\mathcal{S}(r)$ en $f(q)$.

Et puisque tous les points de $\mathcal{S}(q)$ sont équivalents (par invariance sous l'action de $SO(3)$), c'est le même facteur multiplicatif qui intervient pour transformer la norme d'un vecteur de $\mathcal{S}(q)$ en celle d'un vecteur de $\mathcal{S}(r)$.

D'après le théorème de Schmidt (1967), les surfaces \mathcal{C} transforment conformément les surface \mathcal{S} .

On a ainsi l'expression suivante de la métrique :

$$ds^2 = d\tau^2(t, r, \theta, \phi) + Y^2(t, r, \theta, \phi)d\Omega^2(r, t, \theta, \phi) \quad (65)$$

Or, par invariance conforme, Y ne dépend que de t et de r . De plus, l'espace est invariant par rotation donc $d\tau$ ne dépend que de t et de r . Enfin, puisque les orbites sont des surfaces de courbure constante strictement positive, on a :

$$d\Omega^2(r, t, \theta, \phi) = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\Phi^2 \quad (66)$$

D'où l'expression de la métrique (les signes proviennent de la signature de la métrique qui doit être $(-, +, +, +)$) :

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{F^2(t, r)} + X^2(t, r)dr^2 + Y^2(t, r)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\Phi^2) \quad (67)$$

Utilisation de l'équation d'Einstein

L'espace temps étant vide, le tenseur énergie-impulsion \mathbf{T} est nul.

Adoptons les notations suivantes pour alléger les formules :

$$\frac{\partial f}{\partial r} \longleftrightarrow f' \quad (68)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \longleftrightarrow \dot{f} \quad (69)$$

L'équation d'Einstein nous fournit donc les relations suivantes (en prenant $\mathbf{T} = 0$ et $\Lambda = 0$) :

$$\frac{2X}{F} \left(\frac{\dot{Y}'}{Y} - \frac{\dot{X}Y'}{XY} + \frac{\dot{Y}F'}{YF} \right) = 0 \quad (70)$$

$$\frac{1}{Y^2} + \frac{2}{X} \left(-\frac{Y'}{XY} \right)' - 3 \left(\frac{Y'}{XY} \right)^2 + 2F^2 \left(\frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} \right) + F^2 \left(\frac{\dot{Y}}{Y} \right) = 0 \quad (71)$$

$$\frac{1}{Y^2} + 2F \left(\frac{F\dot{Y}}{Y} \right)' + 3 \left(\frac{\dot{Y}}{Y} \right)^2 F^2 + \frac{2}{X^2} \frac{Y'F'}{YF} - \left(\frac{Y'}{XY} \right)^2 = 0 \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \left(-\frac{F'}{FX} \right)' - F \left(F \frac{\dot{X}}{X} \right)' - 2F \left(F \frac{\dot{Y}}{Y} \right)' - F^2 \left(\frac{\dot{X}}{X} \right)^2 - 2F^2 \left(\frac{\dot{Y}}{Y} \right)^2 \\ + \frac{1}{X^2} \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)^2 - \frac{2}{X^2} \frac{Y'F'}{YF} = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

Afin de trouver les fonctions X, Y et F, il convient d'étudier les hypersurfaces $Y = \text{constante}$

Etude des surfaces $Y = \text{constante}$

Cas où $Y = \text{Cte}$ est de genre lumière

Supposons que l'on ait $Y^{;a}Y_{;a} = 0$ sur un ouvert \mathcal{U} . Ceci est vérifiée si Y est constant ou si les surfaces $Y = \text{Cte}$ sont de genre lumière.

On a alors :

$$\frac{Y'}{X} = F\dot{Y} \quad (74)$$

Cependant, quand (74) est vérifiée, la valeur de \dot{Y}' déterminée à partir de (70) n'est pas compatible avec l'équation (71).

On est donc ramené à considérer un point tel que $Y^{;a}Y_{;a} > 0$ ou $Y^{;a}Y_{;a} < 0$ et ces inégalités doivent être vraies sur un voisinage ouvert de p.

Cas où $Y = \text{cte}$ est une surface de genre temps

On suppose que les surfaces $Y = \text{constante}$ sont du genre temps. On peut donc choisir Y comme étant la coordonnées r.

On a donc :

$$Y' = 1 \quad (75)$$

$$\dot{Y} = 0 \quad (76)$$

D'après (70) :

$$\begin{aligned} \frac{2X}{F} \left(-\frac{\dot{X}}{XY} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{X} &= 0 \end{aligned} \quad (77)$$

D'après (72) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} + \frac{2}{X^2} \frac{F'}{rF} - \left(\frac{1}{Xr} \right)^2 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} + \frac{1}{X^2 r} \left(\frac{2F'}{F} - \frac{1}{r} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{F'}{F} = -\frac{X^2}{2r} + \frac{1}{2r} \\ \Rightarrow \left(\frac{F'}{F} \right)' &= 0 \\ \Rightarrow F &\equiv F(r) \end{aligned} \quad (78)$$

Bilan :

$$\begin{aligned} F &\equiv F(r) \\ X &\equiv X(r) \\ Y &= r \end{aligned} \quad (79)$$

La solution est donc nécessairement statique.

(71) fournit également la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} + \frac{2}{X} \left(-\frac{1}{Xr} \right)' - 3 \left(\frac{1}{Xr} \right)^2 &= 0 \\ \frac{1}{r^2} + \frac{2}{X} \frac{X'r + X}{(Xr)^2} - \frac{3}{X^2 r^2} &= 0 \\ \frac{2X'r}{X} - 1 &= -X^2 \\ \left(\frac{r}{X^2} \right)' &= 1 \\ X^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (80)$$

Récrivons (39) :

$$\begin{aligned}
\frac{F'}{F} &= \frac{1}{2r}(1 - X^2) \\
\frac{F'}{F} &= -\frac{m}{r^2} \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \\
\ln F &= -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\
F^2 &= X^2
\end{aligned} \tag{81}$$

On a donc l'expression de la métrique, dite métrique de Schwarzschild, nécessairement statique d'après ce qui précède :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2) \tag{82}$$

Cas où $Y=cte$ est une surface de genre espace

On suppose ici que les surfaces $Y=$ constante sont du genre espace et on procède de la même manière que précédemment. De ce fait, on peut choisir Y comme étant la coordonnées t . Alors :

$$\begin{aligned}
Y' &= 0 \\
\dot{Y} &= 1
\end{aligned} \tag{83}$$

D'après (70) :

$$\begin{aligned}
\frac{2XF'}{tF^2} &= 0 \\
\dot{F} &= 0
\end{aligned} \tag{84}$$

On peut donc choisir la coordonnées r telle que $X \equiv X(t)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
X &\equiv X(t) \\
F &\equiv F(t) \\
Y &= t
\end{aligned} \tag{85}$$

D'après (72) :

$$\begin{aligned}(F^2)t + F^2 &= -1 \\ F^2 &= \frac{2m}{t} - 1\end{aligned}\tag{86}$$

D'après (85), on obtient donc une solution qui ne dépend pas des variables d'espace : elle est dite spatialement homogène. Plus précisément :

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{\frac{2m}{t} - 1} + \left(\frac{2m}{t} - 1\right)dr^2 + t^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\tag{87}$$

Ceci correspond à la solution de Schwarzschild à l'intérieur du rayon de Schwarzschild si on considère la transformation $t \rightarrow r'$ et $r \rightarrow t'$.

Bilan On a donc montré le théorème de Birkhoff.

Troisième partie

Trou noir sphérique et horizon des événements

8 Métrique de Schwarzschild pour les trous noirs

D'après ce qui précède, on sait que la seule métrique qui convient à l'étude des trous noirs sphériques est la métrique de Schwarzschild donnée par :

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (88)$$

où M correspond à la masse du corps central (admis)

On adopte dans la suite les définitions suivantes.

Paramètre de compacité

Le paramètre de compacité Ξ d'un corps sphérique de masse M et de rayon R est

$$\Xi = \frac{GM}{c^2 R} \quad (89)$$

Remarque

En utilisant l'expression du rayon de Schwarzschild, on obtient :

$$\Xi = \frac{1}{2} \frac{R_s}{R} \quad (90)$$

Trou noir

Un trou noir sphérique est un corps de paramètre de compacité $\Xi = \frac{1}{2}$.

Remarque

Cette dernière définition n'est que provisoire. Ce qui suit a pour but d'établir qu'un trou noir est caractérisé par un horizon des événements, notion que l'on définira par la suite.

8.1 Géodésiques de lumière entrantes et sortantes

On cherche à déterminer l'équation des géodésiques lumière radiale. Par définition, elles vérifient :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= 0 \\
 -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 &= 0 \\
 c^2 dt^2 &= dr^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-2}
 \end{aligned} \tag{91}$$

Géodésique de lumière sortante On a, par définition, $dr > 0$ pour $dt > 0$. D'où

$$\begin{aligned}
 c dt &= \frac{dr}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \\
 \Rightarrow ct &= \int_{r_0}^r \frac{dr'}{1 - \frac{2GM}{c^2 r'}} \\
 &= R_S \int_{x_0}^x \frac{dx'}{1 - \frac{1}{x'}}
 \end{aligned} \tag{92}$$

où l'on a posé $x = \frac{c^2 r}{2GM} = \frac{r}{R_S}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
 ct &= \int_{x_0}^x \frac{dx'}{1 - \frac{1}{x'}} \\
 &= \int_{x_0}^x \frac{x'}{x' - 1} dx' \\
 &= \int_{x_0}^x \frac{x' - 1 + 1}{x' - 1} dx' \\
 &= \int_{x_0}^x \left(1 + \frac{1}{x' - 1}\right) dx' \\
 &= x + \ln(x - 1) - x_0 - \ln(x_0 - 1) \\
 ct &= r + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) + Const.
 \end{aligned} \tag{93}$$

La dernière équation est appelée équation des géodésiques lumières sortantes

Géodésiques de lumière entrante

De la même manière, on établit l'équation des géodésiques de lumière entrante (en prenant garde au fait qu'on a maintenant $dr \leq 0$ si $dt \geq 0$) :

$$ct = -r - R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) + Const. \quad (94)$$

8.2 Coordonnées d'Eddington-Finkelstein

On cherche à exprimer la métrique de Schwartzchild dans des coordonnées plus adaptées à l'étude des rayons lumineux sortants et entrants. Posons :

$$u = ct - r - R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) \quad (95)$$

$$v = ct + r + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) \quad (96)$$

D'après ce qui précède, u (respectivement v) est constante le long des géodésiques de lumière radiales sortantes (resp. entrantes). On appelle coordonnées d'Eddington-Finkelstein sortantes (resp. entrantes), le jeu de coordonnées (u, r, θ, ϕ) (resp. (v, r, θ, ϕ)).

On va maintenant chercher l'expression du tenseur métrique g dans ces nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned}
du &= cdt - dr - \frac{1}{\frac{r}{R_S} - 1} dr \\
du &= cdt - \frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}} \\
du^2 &= c^2 dt^2 - 2 \frac{cdt dr}{1 - \frac{R_S}{r}} + \frac{dr^2}{(1 - \frac{R_S}{r})^2} \\
(1 - \frac{R_S}{r}) du^2 &= (1 - \frac{R_S}{r}) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} - 2cdt dr \\
(1 - \frac{R_S}{r}) du^2 &= (1 - \frac{R_S}{r}) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} - 2(\frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}}) dr \\
(1 - \frac{R_S}{r}) du^2 &= (1 - \frac{R_S}{r}) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} - 2dudr \\
-(1 - \frac{R_S}{r}) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} &= -(1 - \frac{R_S}{r}) du^2 - 2dudr \tag{97}
\end{aligned}$$

En revenant à l'expression de la métrique de Schwarzschild, on voit que le membre de gauche n'est autre que les deux premiers termes de cette métrique. Il s'ensuit l'expression de la métrique de Schwarzschild dans les coordonnées d'Eddington-Finkelstein sortantes :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -(1 - \frac{2GM}{c^2 r}) du^2 - 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{98}$$

De la même manière, on établit l'expression de la métrique de Schwarzschild dans les coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -(1 - \frac{2GM}{c^2 r}) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{99}$$

8.3 Coordonnées d'Eddington-Finkelstein 3+1

On remarque que les hypersurfaces $v = \text{Const}$ induisent une métrique dégénérée, comme le montre l'absence de terme en dr^2 dans (99). Pour revenir au cas où les hypersurfaces x^0 sont de type espace, on pose :

$$\tilde{t} = \frac{1}{c}(v - r) \quad (100)$$

On obtient l'expression de \tilde{t} en fonction de t grâce à (96) et (100) :

$$\tilde{t} = t + \frac{R_S}{c} \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) \quad (101)$$

Les nouvelles coordonnées $(c\tilde{t}, r, \theta, \phi)$ sont appelées coordonnées d'Eddington-Finkelstein 3+1.

En différentiant (101) et en reportant l'expression dans (99), on obtient l'expression de la métrique dans ces nouvelles coordonnées :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 d\tilde{t}^2 + 2\frac{R_S}{r} c d\tilde{t} dr + \left(1 + \frac{R_S}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (102)$$

Remarque

On se ramène, grâce à ses nouvelles coordonnées, à une métrique plus proche de celle qu'on a l'habitude de manipuler.

9 Trous noirs

9.1 Singularités

Avec l'expression (88), on constate que la métrique possède 2 singularités :

- une singularité en $r=0$
- une singularité en $r = R_S$

En pratique, le rayon des corps centraux est beaucoup plus grand que R_S . Donc ces deux singularités ne sont pas observables dans la plupart des cas. Il n'en va pas de même avec les trous noirs pour lesquels la singularité en $r = R_S$ va jouer un rôle fondamental.

Singularité en $r = R_S$

L'expression (88) montre effectivement une divergence de la métrique pour $r = R_S$. Cependant l'expression (99) ne montre aucune divergence de

la métrique en $r = R_S$. En particulier, g n'est pas dégénérée en $r = R_S$ car son déterminant vaut

$$\det(g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}) = -r^4 \sin^2 \theta \quad (103)$$

et est, par conséquent, non nul en $r = R_S$.

La singularité est en $r = R_S$ est donc appelée singularité de coordonnées et ne représente pas une singularité du tenseur \mathbf{g} mais plutôt une singularité des coordonnées de Schwarzschild.

Singularité centrale

A contrario, on peut montrer que la singularité en $r=0$ est une singularité du tenseur \mathbf{g} . Ceci montre la limite de la théorie de la relativité générale. Cependant, pour les trous noirs, cette singularité est masquée par l'horizon des événements. D'un point de vue strictement photonique, la zone $r \leq R_s$ ne peut pas communiquer avec l'extérieur. La singularité en $r=0$ n'a donc pas d'influence sur notre monde.

9.2 Horizon des événements

On cherche maintenant l'équation des géodésiques lumière radiales. On se place en coordonnées d'Ellington-Finkelstein 3+1.

Par définition, on a :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0 \quad (104)$$

$$d\theta = 0 \quad (105)$$

$$d\phi = 0 \quad (106)$$

ce qui donne, une fois reportée dans l'expression (102) :

$$\left(1 + \frac{R_S}{r}\right) \frac{V^2}{c^2} + 2 \frac{R_S V}{r c} - 1 + \frac{R_S}{r} = 0 \quad (107)$$

où l'on a posé $V = \frac{dr}{dT}$. L'équation (107) admet deux solutions :

$$V = -c \tag{108}$$

$$V = c \frac{1 - \frac{R_S}{r}}{1 + \frac{R_S}{r}} \tag{109}$$

La solution (108) correspond à l'équation classique d'un rayon lumineux provenant de $+\infty$.

La solution (109) correspond aux géodésiques sortantes. On voit que

$$r \leq R_S \Leftrightarrow V \leq 0 \tag{110}$$

Un photon émis depuis la position $r \leq R_S$ voit sa coordonnée radiale décroître. Les photons de la zone $r \leq R_S$ en sont prisonniers.

L'hypersurface $r = R_S$ sépare ainsi l'espace en deux régions distinctes :

- celle où les photons peuvent atteindre $+\infty$ s'ils sont émis dans la bonne direction
- et celle où les photons sont piégés, quelle que soit leur direction d'émission.

Cette hypersurface, appelée horizon des événements, est caractéristique des trous noirs.

9.3 Bilan

On vient de montrer que les photons et autres particules matérielles ne peuvent pas sortir du trou noir une fois qu'ils y ont pénétré. De plus, ils sont attirés par le centre du trou noir (la singularité $r=0$) et l'atteignent en un temps fini (car leur vitesse est minorée d'après (109)). Enfin, au voisinage de la singularité, le tenseur de courbure explose.

D'un point de vue physique, ceci signifie qu'il existe des particules matérielles qui ne peuvent sortir du trou noir et qui cessent d'exister au bout d'un temps fini (car elles atteignent la singularité qui n'appartient pas à l'espace-temps). De plus, vers la fin de leur vie, elles subissent des forces qui tendent vers l'infini (le tenseur de courbure remplace les forces gravitationnelles dans la théorie de la relativité générale).

Ces prédictions qui semblent pour le moins étonnantes ont été mises en doute par des physiciens qui pensaient que la symétrie sphérique était à l'origine de prédictions peu réalistes. Ceci a conduit Hawking et Penrose à établir, dans des cas beaucoup plus généraux, l'existence de géodésiques de

type lumière incomplètes sans toutefois réussir à montrer la divergence du tenseur métrique en 0.

9.4 Théorème de singularité

Nous citons ici deux théorèmes à propos de l'existence de courbes de type temps incomplètes sans chercher à en donner une démonstration. Il convient auparavant de donner quelques définitions.

Hypothèse de chronologie faible

Il n'existe pas de courbe de type temps fermée.

Remarque

Une courbe de type temps représente la trajectoire d'une particule massive. En particulier, cette hypothèse signifie qu'une particule ne peut revenir dans son passé (on ne peut donc pas sous cette hypothèse inventer une machine à remonter le temps viable).

On impose parfois une hypothèse un peu plus forte (appelée logiquement hypothèse de chronologie forte) : on interdit à la particule de revenir "infiniment près" d'elle-même. Autrement dit :

Hypothèse de chronologie forte

Soit p un point de l'espace-temps. Il existe un voisinage ouvert U arbitrairement petit tel que toute courbe de type temps qui sort de U n'y revient plus

Surface de Cauchy

Définition

Une surface de Cauchy est une hypersurface σ de type espace telle que toute courbe causal inextensible intersecte σ en un point et un seul.

Remarque

Par application d'un théorème de Cauchy pour les systèmes d'équations différentielles (les équations d'Einstein), la donnée de la métrique et de sa

dérivée sur l'hypersurface de Cauchy suffit à la déterminer dans tout l'espace (car on peut alors la déterminer sur chaque géodésique traversant cette surface, c'est-à-dire sur toutes les géodésiques).

En particulier, la métrique de Minkowski admet une hypersurface de Cauchy (toutes les hypersurfaces du type $t = \text{Cte}$). De même, la métrique de Schwarzschild admet des hypersurfaces de Cauchy.

En particulier, l'existence d'une hypersurface de Cauchy implique l'hypothèse de chronologie forte.

Surface piégée

Définition

Une surface piégée est une surface compacte σ de type espace telle que les deux familles de type lumière orthogonales à σ ont une divergence négative en chaque point de σ .

Remarque

Qualitativement, toutes les courbes de types lumières sont dirigées vers l'intérieur de σ ce qui signifie qu'aucune particule (massive ou non) ne peut sortir de σ . De plus, toute particule située au voisinage de σ est attirée vers l'intérieur.

Après toutes ces définitions, on peut énoncer les deux théorèmes suivant.

Théorème (Penrose, 1965)

On suppose que l'espace temps (\mathcal{E}, g) vérifie :

1. \mathcal{E} satisfait la positivité de l'énergie : $R_{\alpha\beta}K^\alpha K^\beta \geq 0$ pour tout \vec{K} causal
2. il existe une surface piégée σ dans \mathcal{E}
3. \mathcal{M} admet une hypersurface de Cauchy S non-compacte

Alors \mathcal{E} a une géodésique de type lumière incomplète.

Positivité de l'énergie

L'hypothèse de positivité de l'énergie se traduit, d'après l'équation d'Einstein, par :

$$T(\vec{v}, \vec{v}) \leq \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^4 T(\vec{e}_i, \vec{e}_i) \right) - \frac{\Lambda}{8\pi} \right) g(\vec{v}, \vec{v}) \quad (111)$$

Cette hypothèse semble vérifiée pour les tenseurs énergie-impulsion classique; c'est pour cela que cette hypothèse est appelée positivité de l'énergie.

En fait, on peut aller plus loin en montrant que cette hypothèse traduit l'attractivité de la gravitation. En effet, si \vec{v} est un vecteur tangent à une géodésique γ donnée alors la positivité de $R(\vec{v}, \vec{v})$ entraîne que les géodésiques assez proches de γ se rapprochent de γ . Comme une géodésique peut être interprétée comme le mouvement d'une particule massive, ceci traduit l'attractivité de la gravitation créée par la particule.

Remarque

L'hypothèse (3) est impossible à vérifier en pratique : car il faudrait construire toutes les géodésiques de l'espace temps. Le théorème suivant ne mentionne plus cette hypothèse.

Théorème (Hawking et Penrose (1970))

L'espace-temps (\mathcal{E}, g) possède au moins une géodésique de type temps ou de type lumière incomplète si :

1. $R_{\alpha\beta}K^\alpha K^\beta \geq 0$ pour tout \vec{K} causal
2. La condition générique suivante est vérifiée : toute géodésique de genre temps ou de genre lumière possède un point en lequel $K_{[a}R_{b]cd[e}K_{f]}K^cK^d \neq 0$ où \vec{K} est un vecteur tangent à la géodésique.
3. \mathcal{E} vérifie l'hypothèse de chronologie faible.
4. il existe une surface piégée σ dans \mathcal{E}

Le lecteur attentif désireux de trouver une preuve de ces deux théorèmes pourra se reporter à l'ouvrage d'Hawking et d'Ellis.

Bibliographie

- Cours de relativité générale d'Éricourgoulhon **<http://luth.obspm.fr/luthier/gourgoulhon/fr/master/relatM2.pdf>**
- Notes de cours de François Béguin [Une introduction aux aspects géométriques de la relativité générale](#)
- Hawking, Ellis. [the large scale structure of space-time](#), 1973
- **<http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/lehman/RelativiteGenerale.pdf>**
- Cours de relativité restreinte d'Alain Comtet