Déformation de courbes planes

Guillaume Charpiat

18 mars 2003

Segmentation d'images

De façon générale, on appelle segmentation le repérage automatique de formes dans une image.

Méthode : minimiser des critères appropriés, par descente de gradient.

Critères habituellement utilisés : basés sur les couleurs, les gradients d'intensité.

Un premier exemple, avec a priori sur la forme

On connaît déjà exactement la forme de la courbe (ou la forme et la texture de l'objet) à chercher, il ne reste que sa position et son orientation à déterminer.

Intuitivement : on déplace l'objet partout et on retient la position-orientation qui maximise la « correspondance » entre ce que l'on connaît de l'objet et ce qui est observé à l'endroit proposé.

En pratique : on ne peut pas tester toutes les orientations et toutes les positions... On choisit arbitrairement une position-orientation quelconque, et on applique la « déformation » rigide locale qui va maximiser le critère.

$\hookrightarrow$ Les déformations forment un groupe à 3 paramètres :

- $\hookrightarrow$ deux pour les coordonnées de la translation,
- $\hookrightarrow$ et une pour l'angle de rotation.

$\hookrightarrow$ on effectue tout simplement une descente de gradient sur les 3 paramètres... soit par la méthode des différences finies, soit en ayant préalablement calculé l'expression théorique du gradient si le critère le permet.

Un autre exemple, sans a priori sur la forme

On n'a aucune idée de la forme a rechercher. On cherche donc la forme qui maximise un certain critère relativement arbitraire (par exemple la courbe qui maximise $\int_{\mathcal{C}} \|\nabla I\| - L$).

Technique utilisée : déplacement d'une liste de points, constituant une courbe, ou évolution d'une fonction définie sur toute l'image, dont le niveau 0 constitue la courbe.

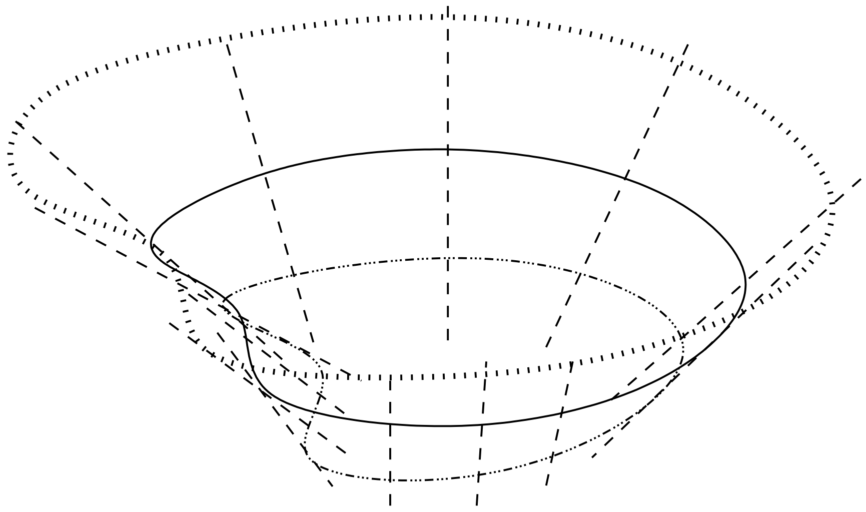
Technique des Level-Sets

Représentation des courbes

Une courbe $\mathcal{C}$ ne sera plus une liste de points, mais le niveau 0 d'une certaine fonction f définie sur le plan.

$\hookrightarrow$ cas standard : on choisit pour f la fonction distance signée à la courbe $\mathcal{C}$, soit $f(x) = -d(x, \mathcal{C})$ si x est à l'intérieur de la courbe, et $f(x) = d(x, \mathcal{C})$ sinon.

Représentation graphique de la distance signée à une courbe



Intérêt et outils

Gestion des changements de « topologie ».

Extraction simple du niveau 0.

Accès direct à la normale $\vec{n}$ et à la courbure κ en tout point de la courbe, ainsi que pour les différentes lignes de niveau.

Évolution par EDP

On considère l'EDP suivante, où la courbe $\mathcal{C}(t)$ est paramétrée spatialement par s, et $\vec{h}$ renvoit un vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$\partial_t \, \mathcal{C}(t,s) = \vec{h}(s, \mathcal{C}(t))$$

$$\partial_t \mathcal{C} = \vec{h}$$

La correspondance entre l'évolution de $\mathcal{C}$ et celle de f s'établit par dérivation de $f(\mathcal{C}(t))$ et donne :

$$\partial_t f = -\vec{\tilde{h}} \cdot \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}$$

où $\vec{\tilde{h}}$ est une extension de $\vec{h}$ au plan.

$\hookrightarrow$ extension par valeur au point de la courbe le plus proche ;

$\hookrightarrow$ extension en remplaçant $\mathcal{C}$ par la courbe de niveau.

Problème du morphing

On considère deux courbes, A et B, et on souhaiterait déformer continûment A en B :

$\hookrightarrow$ de façon relativement esthétique,

$\hookrightarrow$ sans problème de convergence.

Exemple de solution simple : moyenner les valeurs des fonctions distances.

$\hookrightarrow$ les étapes intermédiaires ne sont pas des fonctions distances, et cette méthode ne survit pas à la reprojection à chaque pas de temps sur une fonction distance ;

$\hookrightarrow$ les points communs restent systématiquement fixes.

Espace des courbes, dérivation, distance de Hausdorff

On considère l'espace $\mathcal{X}$ des courbes $\mathcal{C}^2(\mathbb{S}_1, \mathbb{R}^2)$ paramétrées par un multiple de leur abscisse curviligne.

Champs de déformation en une courbe donnée A : déformations élémentaires que l'on peut appliquer à A

$\hookrightarrow$ éléments δA de $\mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{R}^2)$, par l'association intuitive $A(p) \mapsto A(p) + \delta A(p)$.

$\hookrightarrow$ déplacements normaux β de $\mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{R})$, par l'association $A(p) \mapsto A(p) + \beta(p)\, \vec{n}(p)$.

$\hookrightarrow$ produit scalaire dans l'espace tangent :

$$\langle \beta_1 \,|\beta_2 \rangle = \int_A \beta_1 \beta_2 d\sigma$$

Distance naturelle géodésique :

$$d_G(A,B) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{F}(A,B)} \int_\Gamma \|\Gamma'(t)\| dt$$

où $\mathcal{F}(A,B)$ est l'ensemble des chemins $\mathcal{C}^1$ reliant A à B.

Distance de Hausdorff :

$$d_H(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B) + \sup_{y \in B} d(y,A)$$

Critère dérivable ?

Dérivée d'une fonction E par rapport à une courbe : forme linéaire L vérifiant, pour tout champ de déformation v :

$$Lv = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(E(A + \varepsilon v) - E(A))$$

$\hookrightarrow$ gradient : champ de déformation $\nabla E(A)$ vérifiant, pour tout v,

$$Lv = \langle \nabla E(A) \,|v\rangle$$

$\hookrightarrow$ descente de gradient sur E :

$$\partial_t \mathcal{C} = \nabla E(\mathcal{C}(t))$$

ou

$$\partial_t \mathcal{C} = \frac{\nabla E(\mathcal{C}(t))}{\|\nabla E(\mathcal{C}(t))\|}$$

Version régularisée de Hausdorff, notations

On a besoin d'une fonction régulière pour effectuer une descente de gradient, et proche de la distance de Hausdorff.

Idée de régularisation : si f est une fonction positive et continue :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(\int_A (f(y))^\alpha \, dy \right)^{1/\alpha} = \sup_{y \in A} f(y)$$

$\hookrightarrow$ approximation régulière de $\sup_A$:

$$\left(\int_A (f(y))^\alpha \, dy \right)^{1/\alpha}$$

pour un α arbitrairement choisi.

Notation d'une moyenne :

$$\langle f\rangle_A = \frac{1}{|A|}\int_A f$$

$\hookrightarrow$ pour toute fonction φ mesurable injective convenable :

$$\langle f\rangle_A^{\varphi} = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\int_A \varphi\circ f\right)$$

$\hookrightarrow$ si Ψ croît vite :

$$\langle f\rangle_A^{\Psi} \simeq \sup f$$

$\hookrightarrow$ si φ décroît vite :

$$\langle f\rangle_A^{\varphi} \simeq \inf f$$

$\hookrightarrow$ approximation de la distance de Hausdorff :

$$\max\left(\left\langle \langle d(\cdot,\cdot) \rangle_B^{\varphi} \right\rangle_A^{\Psi},\ \left\langle \langle d(\cdot,\cdot) \rangle_A^{\varphi} \right\rangle_B^{\Psi} \right)$$

Cas particulier : approximation du max entre deux nombres :

$$\langle a, b \rangle^{\Psi} = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\Psi(a) + \frac{1}{2}\Psi(b)\right)$$

$\hookrightarrow$

$$E_H(A,B) = \left\langle \left\langle \langle d(\cdot,\cdot) \rangle_B^{\varphi} \right\rangle_A^{\psi}, \left\langle \langle d(\cdot,\cdot) \rangle_A^{\varphi} \right\rangle_B^{\psi} \right\rangle^{\Psi}$$

$\hookrightarrow$ Max de deux longueurs :

$$E_L(A,B) = \langle |A|, |B| \rangle^{\Psi}$$

$\hookrightarrow$ Énergie mixte :

$$E_M = \langle E_H, \eta E_L \rangle^{\Phi}$$

où η est un rapport des longueurs caractéristiques (distance entre les courbes, différence des longueurs).

Inconvénients de E_H :

- $\hookrightarrow$ ce n'est pas une distance sur l'espace des courbes $\mathcal{X}$,
- $\hookrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{X}, \;\; E_H(A, A) \neq 0$,
- $\hookrightarrow$ on peut avoir A et B telles que $E_H(A, A) > E_H(A, B)$,
- $\hookrightarrow$ une descente de gradient en C sur $E_H(C, B)$ partant de A n'aboutit pas nécessairement en $C = B$,
- $\hookrightarrow$ une descente de gradient de B vers A ne suit donc pas la même trajectoire que de A vers B.

Mais : E_H est proche de d_H au sens où, pour un choix convenable des fonctions ψ, Ψ et Φ, on a, pour toutes courbes A et B de $\mathcal{X}$:

$$d_H(A,B) - \left(\alpha_\Psi + \alpha_\psi + \Delta_\Phi \frac{|A|+|B|}{2}\right)$$

$$\leqslant$$

$$E_H(A,B)$$

$$\leqslant$$

$$d_H(A,B) + \left(\alpha_\Phi + \Delta_\Psi \frac{|A|+|B|}{2}\right)$$

où α_Ψ, α_ψ et Δ_Φ sont des constantes.

Réglages et exemples d'évolution

En pratique, on prend des fonctions croissantes de la forme $x \mapsto x^\alpha$ et les fonctions décroissantes de la forme $(x+\varepsilon)^{-\alpha}$.

$\hookrightarrow$ on choisit α aux alentours de 4...

Moyenne de courbes, déformations caractéristiques

On dispose de n courbes A_i, dont on cherche la « moyenne » M :

$\hookrightarrow$ on cherche à minimiser $\sum_i E(M, A_i)^\alpha$, où $\alpha = 1$ ou 2,

$\hookrightarrow$ on croise les doigts pour que le résultat de la convergence ne dépende pas trop de l'initialisation (minima locaux),

$\hookrightarrow$ et en pratique ça marche bien dans les cas raisonnables.

On dispose des A_i et de leur moyenne, M. On voudrait définir et connaître les « déformations caractéristiques », l'équivalent de l'écart type pour les courbes.

On note $\delta_i = \nabla_M E(M, A_i)^2$

On construit la matrice des corrélations :

$$\Delta_{i,j} = \left\langle \delta_i \middle| \delta_j \right\rangle$$

et en la diagonalisant, on obtient des « combinaisons des déformations » propres, d'où des déformations caractéristiques β_k.

Application standard : segmentation avec a priori.

$\hookrightarrow$ connaissance d'une forme moyenne et de déformations caractéristiques autorisées.

Autre application : notion d'appartenance.

On retient les m premiers modes de déformation. Pour une courbe quelconque Y, la « distance » à l'ensemble (courbe M + déformations β_k) :

$$\sum_{k \leqslant m} \frac{\left\langle \nabla_M E(M,Y)^2 \,\middle|\, \beta_k \right\rangle^2}{\sigma_k^2} + \frac{\left\| R(\nabla_M E(M,Y)^2) \right\|^2}{\sigma_R^2}$$

où

$$R(\beta) = \beta - \sum_{k \leqslant k} \langle \beta | \, \beta_k \rangle \, \beta_k$$

et

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{C \in \mathcal{H}} \| R(C) \|^2$$