TP7 MPSI: Logique

Alexis Saurin
Alexis.Saurin@ens.fr
http://www.eleves.ens.fr/~saurin/tp_caml

4 juin 2003

1 Introduction

Cette séance va être consacrée à l'étude de la logique, et à la mise en application de certaines choses que vous avez vu en cours. On va définir un type pour les formules, programmer une fonction qui détermine si une formule est satisfaisable, si une formule est une tautologie, puis on appliquera cela à quelques exemples de problèmes logiques.

2 Calcul des propositions

Question 1: *Un type pour les formules logiques*

Définir un nouveau type de formules logiques, appelé type `prop`. Il s'agira d'un type somme dans lequel on aura une construction pour les valeurs de vérité, pour les variables de proposition (qui seront paramétrées par un entier), pour les connecteurs logiques.

Question 2: *Axiomes logiques*

Définir quelques formules correspondant à des axiomes logiques : la contraposition, les lois de De Morgan, ... plus quelques formules qui ne sont pas des tautologies et d'autres qui ne sont pas satisfaisables.

Question 3: *Symbole de Sheffer*

Définissez un nouveau type de formules ne comportant que des variables et un connecteur binaire unique qui correspondra au symbole de Sheffer.

Question 4: *Évaluation d'une formule*

On veut maintenant une fonction d'évaluation des formules logiques, qui prendra, comme dans le cas des expressions arithmétiques, un contexte en argument (qui sera un vecteur de booléen, la valeur d'une variable se trouvant à l'indice correspondant du tableau). Le type de retour de la fonction sera évidemment booléen.

Question 5: *Satisfaisabilité d'une formule*

On veut maintenant une fonction qui teste si une fonction est satisfaisable : si la fonction est satisfaisable, elle rend une valuation qui la satisfait, sinon, elle lève une exception que vous aurez définie (réfléchir à une autre manière de donner le résultat de la fonction sans lever d'exception, vous ferez une variante de votre programme qui rendra le résultat de cette manière). Pour cela, on programmera une fonction auxiliaire qui prendra une tableau constitué de `true` et de `false` et qui le modifie de manière à retourner le tableau successeur dans l'ordre lexicographique (on pourra appeler cette fonction `next_valuation : bool vect -> unit`). On pourra utiliser aussi avec profit une fonction qui détermine le plus grand indice de variable apparaissant dans une formule.

Question 6: *Tautologies*
Idem pour les tautologies. Indice : réfléchir à ce qu'est une tautologie par rapport à une formule satisfaisable...

Question 7: *Efficacité*
Vos programmes sont-ils efficaces ? Évaluez la complexité de ces programmes en fonction de la taille de la formule et du nombre de variables intervenant.

3 Un peu de théorie de la démonstration

- Déduction à la Hilbert
- Déduction Naturelle et lambda-calcul
- Calcul des séquents

4 Applications : l'île aux questions

Cette partie est tirée d'un sujet de TP rédigé par Vincent Simonet.

Quelque part au delà des mers se dresse une île étrange appelée l' Île aux Questions. Son nom lui vient de la façon originale dont s'expriment les indigènes qui, pour toutes paroles, se contentent de poser des questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Les habitants se répartissent en deux types : les Positifs et les Négatifs. Les premiers ne peuvent poser que des questions dont la réponse exacte est oui. Quand aux seconds, c'est le contraire, la réponse à leurs questions doit toujours être non.

Question 8:
En arrivant sur l'île, vous rencontrez deux habitants. L'un d'entre-eux demande "L'un de nous est-il négatif ?". Quelle est la nature des deux personnages ?

Ce problème est très simple à résoudre de tête mais nous allons essayer d'utiliser le résultat de la section précédente. Commençons par nommer A le personnage qui parle et B l'autre. On modélise alors le problème de la façon suivante : la variable x_0 correspond à l'affirmation "A est un positif" et x_1 à "B est un positif". Il suffit alors de déterminer si la proposition x_0 équivaut ((non x_0) ou (non x_1)) est satisfaisable.

Question 9: Que pensez-vous d'un indigène qui vous interroge : "Suis-je un positif ?". Et d'un autre qui vous demande s'il est négatif ? Un habitant de l'île nommé Zorn m'a posé la question suivante : "Suis-je de ceux qui peuvent demander s'ils sont négatifs ?". Peut-on en déduire quelque chose concernant Zorn ou bien cette histoire est-elle tout simplement impossible ?

Question 10:
Poursuivant votre chemin, vous rencontrez à nouveau deux personnages, A et B. Le premier demande au second "Suis-je négatif et toi positif ?". Pouvez-vous en déduire ce que sont A et B ?

Question 11:
Vous voilà maintenant face à trois indigènes A, B et C. A vous demande "B est-il négatif ?" alors que B se demande si A et C sont de la même espèce. Peut-on dire ce que sont A, B et C ?

Question 12:
Une femme interroge son mari : "Sommes-nous de types différents ?". Que pouvez-vous en déduire ?