

# De la non-certitude en mathématique : sa pratique, sa pédagogie

Marc SAGE

ébauche mémoire M2 LoPhiSC

mercredi 8 avril 2015

# Plan de l'exposé

- 1 Trois dogmes du platonisme
  - Existence
  - Vérité
  - Validité
- 2 Une certitude : la vie
  - action
  - idéalisation
  - formalisation
- 3 Application à la non-prouvabilité
  - Suites de Goodstein
  - Théorème de complétude
  - Théorème d'incomplétude

*La grande égalité des enfants face à l'enseignement, c'est celle des traumatismes qu'on leur inflige. Les inégalités, elles apparaissent dans la possibilité qu'ils ont de les encaisser. Mais est-il bien nécessaire de pratiquer la sélection par la destruction du sens dans l'œuf ?*

Stella BARUK, *L'âge du Capitaine* (1985)

*La lutte contre l'idée fausse, si prompte à se glisser dans un tel enseignement, sera [...] le constant souci du maître.*

Pierre DUHEM, *La théorie physique* (1906)

# Outline

- 1 Trois dogmes du platonisme
  - Existence
  - Vérité
  - Validité
- 2 Une certitude : la vie
  - action
  - idéalisation
  - formalisation
- 3 Application à la non-prouvabilité
  - Suites de Goodstein
  - Théorème de complétude
  - Théorème d'incomplétude

Prétentions de la mathématique enseignée  
(et parfois pratiquée...) :

- traite d'objets purs (détachés du matériel)
- porte la vérité absolue (immuable)
- raisonne de façon parfaite (certaine)

## De quoi parle-t-on ?

Savoir de quoi l'on parle  $\rightarrow$  **définir** ce dont on parle

définition = raccourci de langage = abréviation commode

*Il faut voir les définitions [...] comme des conventions superflues d'**abréviations** notationnelles. [...] La forme dans laquelle on exprime une définition est sans importance, tant qu'elle indique la manière de l'éliminer.*

W. V. QUINE, *Nouveaux fondements pour la logique mathématique* (1980)

# De quoi parle-t-on ?

**définition** (nouvelle) = collections de définitions (anciennes)

Remonter les définitions aboutit à :

- ou bien : descente infinie  
→ pas de fondation !
- ou bien : arrêt au bout d'un nombre fini d'étapes  
→ fondation = des **indéfinissables** !

# On parle d'indéfinissables

Qu'est-ce que :

- un nombre ?
- un point ?
- une droite ?
- l'infini ?
- une fonction ?
- un ensemble ?
- une probabilité ?

# On parle d'indéfinissables

On ne peut pas définir ce dont on parle !

premier dogme

l'**existence** des objets mathématiques

Parallèle physique avec existence de :

- un photon ?
- un quark ?
- une force ?
- un champ ?

## Qu'affirme-on ?

On affirme des vérités  $\rightarrow$  comment accéder au vrai ?

**Prouver** ce qu'on affirme : VRAI + PREUVE  $\rightarrow$  VRAI

**vérité** (nouvelle) = déduction de vérités (anciennes)

# Qu'affirme-on ?

**preuve** (nouvelle) = collection de preuves (anciennes)

Remonter les preuves aboutit à :

- ou bien : descente infinie  
→ pas de fondation !
- ou bien : arrêt au bout d'un nombre fini d'étapes  
→ fondation = des **improuvables** !

# On affirme des improuvables

deuxième dogme :

la **vérité** des énoncés mathématiques

Qu'est-ce que le vrai ? le faux ? l'impossible ?

Quel sens donner à :

*Il est faux qu'on puisse prouver qu'il n'est pas possible de prouver une contradiction ? (Gödel)*

# On affirme des improuvables

deuxième dogme :

la **vérité** des énoncés mathématiques

Parallèle physique avec vérité de :

- l'attraction newtonienne ?
- les équations de Maxwell ?
- la constance de la vitesse de la lumière ?
- la réduction du paquet d'ondes ?

# Comment prouve-t-on ?

On **infère** (des vérités à partir d'autres)  
→ légitimité des inférences ?

on utilise les lois de notre pensée : **la logique**  
→ moyens d'inférence

# Paradoxe de Berry

## Moyen 1

un ensemble  $E$  + une propriété  $P$   
→ les objets de  $E$  vérifiant  $P$

## Moyen 2

des entiers naturels → le plus petit naturel dans cette partie

## Corrélat

→ plus petit entier non définissable en moins de cent mots ?  
*On vient de le définir !*

## Paradoxe de CAROLL

Su :  $E$  implique  $F$ , çàd  $E \implies F$ , noté  $\alpha$ . Légitimité de  $\alpha$ ?

Su :  $\alpha$  et  $E$  impliquent  $F$ , çàd  $\alpha \& E \implies F$ , noté  $\beta$ . Légitimité de  $\beta$ ?

Su :  $\beta$  et  $E$  impliquent  $F$ , çàd  $\beta \& E \implies F$ , noté  $\gamma$ . Légitimité de  $\gamma$ ?

Impossible de déduire  $F$  de  $E$ !

D'autres moyens controversés :

- induction entière
- tiers-exclu
- axiome du choix
- 1er ou 2e ordre ?
- théorie *ensembliste* des modèles
- indépendance des quantificateurs
- ...

troisième dogme :

la **légitimité** de la logique

Parallèle physique avec la causalité.

premier dogme

l'**existence** des objets mathématiques

deuxième dogme :

la **vérité** des énoncés mathématiques

*Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.*

Bertrand RUSSELL, *Recent work on the principles of mathematics* (1901)

troisième dogme :

la **légitimité** de la logique

→ Où est la *connaissance* mathématique ? sa *certitude* ?

## Paradoxe de POINCARÉ

*La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ?*

Henri POINCARÉ, *La science et l'hypothèse* (1902)

Comment pratiquer/enseigner une mathématique **certaine** et **sensée** ?

# Outline

- 1 Trois dogmes du platonisme
  - Existence
  - Vérité
  - Validité
- 2 Une certitude : la vie
  - action
  - idéalisaton
  - formalisation
- 3 Application à la non-prouvabilité
  - Suites de Goodstein
  - Théorème de complétude
  - Théorème d'incomplétude

*Je veux voir cette certitude [tranquille] non comme quelque chose qui s'apparente à de la précipitation ou à de la superficialité, mais comme une **forme de vie**. [...]*

*Mais cela signifie bien que je veux la concevoir comme quelque chose qui se trouve en dehors de ce qui est justifié ou non justifié ; et donc, pour ainsi dire, comme quelque chose d'**animal**.*

Ludwig WITTGENSTEIN, *De la certitude* (1949-51)

*On peut définir la vie, mais la vie rejette toute définition.*

Itsuo TSUDA, *Le non-faire* (1973)

*Il est de l'essence du raisonnement de nous enfermer dans le cercle du donné. Mais l'**action** brise le cercle.*

Henri BERGSON, *L'évolution créatrice* (1907)

L'intelligence émane de la vie (comme l'instinct et la torpeur)

Nous connaissons pour **agir** et (primitivement) **par** l'agir.

→ la connaissance primitive s'ancre dans l'**expérience**.

## Géométrie primitive

*antérieurement à la géométrie savante, il y a une **géométrie naturelle** dont la clarté et l'évidence dépassent celles des autres déductions.*

Henri BERGSON, *L'évolution créatrice* (1907)

*Malgré l'appareil logique qu'elle emploie, et son renom de science exacte, la géométrie fut longtemps et presque jusqu'à nos jours, la **géométrie expérimentale** que nous venons d'esquisser.*

Ferdinand GONSETH, *Les fondements des mathématiques*  
(1926)

## Arithmétique primitive

*Numbering is a procedure based upon our finding ourselves capable of retaining, in our memory, the sequence in which **acts** of consciousness **successively occurred** in time.*

Hermann L. F. VON HELMHOLTZ, *Numbering and measuring*  
(1887)

L'action peut s'**itérer**  $\longrightarrow$  nombre **ordinal**

$\longrightarrow$  arithmétique primitive récursive des petits ordinaux

Quel rapport avec les nombres cardinaux ?

## Arithmétique primitive

Origine : un "nombre" primitif est un ensemble !

*Un nombre (arithmos) est une **multitude** composée d'unités.*

EUCLIDE, *Éléments* (livre VII)

"faire partie **du nombre** des survivants"

"There is **a five** of horses in the field" (arabe)

John P. MAYBERRY, *The foundation of mathematics in the theory of sets* (2000)

# Arithmétique primitive

*il y a un fait d'expérience. [...] Les collections finies possèdent [...] un **caractère invariant** vis-à-vis de toutes les permutations possibles : ce caractère est leur nombre.*

*[...] Le nombre, dans sa signification primitive et dans son rôle intuitif, est une **qualité physique** des groupes d'objets.*

Ferdinand GONSETH, *Les fondements des mathématiques* (1926), *Les mathématiques et la réalité* (1936)

L'action (itérative) permet la mise en correspondance biunivoque : l'**ordinal** est au service du **cardinal**.

## Logique primitive

*Logique et géométrie s'engendrent réciproquement l'une l'autre [...]. C'est de l'extension d'une certaine géométrie naturelle, suggérée par les propriétés générales et immédiatement aperçues des solides, que la **logique naturelle** est sortie. C'est de cette logique naturelle, à son tour, qu'est sortie la géométrie scientifique, qui étend infiniment la connaissance des propriétés extérieures des solides.*

Henri BERGSON, *L'évolution créatrice* (1907)

*la logique devra prendre l'aspect d'une science naturelle de caractère très primitif, qu'on pourrait peut-être appeler la **physique de l'objet quelconque**.*

Ferdinand GONSETH, *Les mathématiques et la réalité* (1936)

La connaissance primitive s'idéalise :

- point *infiniment* précis
- nombre naturel *arbitrairement* grand
- tiers exclu pour énoncé *non* existentiel

Parallèle physique : mesure de longueurs ou temps  
*astronomiques* ou *quantiques*

## Danger ontologique

*If one wants to speak, all the same, of numbers as concepts or ideal objects, **one must at any rate refrain from giving them independent existence** ; their being exhausts itself in the functional role which they play and their relations of more or less*

Hermann WEYL, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1926)

*La science est un prolongement du sens commun, et utilise la même tactique que lui : **gonfler l'ontologie** pour simplifier la théorie.*

Willam von Orman QUINE, *Deux dogmes de l'empirisme* (1980)

## Danger ontologique

*It cannot be denied that a theoretical **desire**, incomprehensible from the merely phenomenal point of view, is **alive** in us which urges toward totality. Mathematics shows that with particular clarity.*

Hermann WEYL, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1926)

L'objet idéal est notre **visée**, notre "intented model" (Hintikka).  
Il nous porte, nous conduit, nous **anime**.  
Être dispensable, il est une **indispensable fiction**.

# Vider le sens

signifiant signifié : ne garder que la coquille.

- langage = données sensibles (graphèmes...)
- règles de grammaire
- énoncés = phrases grammaticalement correctes
- règles de validité
- preuve = suite valide d'énoncés
- théorie = choix d'énoncés (axiomes)
- théorèmes = énoncés prouvés par une théorie

→ Jeu combinatoire ! ("finitisme" de David HILBERT)

Tombe sous la mathématique primitive de l'action

## Finies les bagarres métaphysiques !

*Philosophe plus profond que Laplace, Ampère voit avec une parfaite clarté l'avantage qu'il y a à rendre une théorie physique indépendante de toute explication métaphysique ; par là, en effet, on la soustrait aux querelles qui divisent les diverses écoles cosmologiques ; on la rend acceptable, en même temps, à des esprits qui professent des opinions philosophiques incompatibles*

*[...] Que de discussions scientifiques où chacun des deux tenants prétend écraser son adversaire sous le témoignage irrécusable des faits ! On s'oppose l'un à l'autre dans des observations contradictoires. **La contradiction n'est pas dans la réalité, toujours d'accord avec elle-même ; elle est entre les théories par lesquelles chacun des deux champions exprime cette réalité.***

Pierre DUHEM, *La théorie physique* (1906)

# Finies les bagarres métaphysiques !

Querelles sur 5e postulat, axiome du choix, tiers exclus...

*Une fois prononcé le seul mot d'axiomatique, il est malaisé de comprendre que la question même ait pu se poser ; nous n'en saisissons plus le sens. Mieux encore, elle n'a pour nous **plus de sens du tout***

Ferdinand GONSETH, *Les fondements des mathématiques*  
(1926)

## En guise de conclusion

GONSETH : *Dans son essence, la mathématique n'est qu'un ensemble de vues et de procédés schématiques de notre esprit, réplique consciente de l'activité inconsciente qui crée en nous une image du monde et un ensemble de normes selon lesquelles nous agissons et réagissons. Non pas édifice ancré quelque part avec une solidité absolue, mais construction aérienne, qui tient comme par miracle : la plus audacieuse et la plus invraisemblable aventure de l'esprit.*

WEYL : *It cannot be denied that a theoretical desire [...] is alive in us which urges toward totality. Mathematics shows that with particular clarity; but it also teaches us that that desire can be fulfilled on one condition only, namely, that we are satisfied with the symbol and renounce the mystical error of expecting the transcendent ever to fall within the lighted circle of our intuition.*

# Outline

- 1 Trois dogmes du platonisme
  - Existence
  - Vérité
  - Validité
  
- 2 Une certitude : la vie
  - action
  - idéalisation
  - formalisation
  
- 3 Application à la non-prouvabilité
  - Suites de Goodstein
  - Théorème de complétude
  - Théorème d'incomplétude

## vrai et non prouvable

On dit que leur convergence est vraie mais non prouvable.  
→ ???

Prouvable dans ZF (grâce à l'infini actuel)  
= "vrai" (car Peano catégorique dans ZF)

Il a une interprétation (ensembliste) de Peano où elles ne  
convergent pas  
= "non prouvable" (sinon ZF contradictoire)

blabla

blabla

ENCADRE EN BLEU

encadré en bleu

blabla

ENCADRE EN BLEU

encadré en bleu

ENCADRE EN VERT

encadré en vert

blabla

ENCADRE EN BLEU

encadré en bleu

ENCADRE EN ROUGE

encadré en rouge