Philosophie des mathématiques – I
Ontologie, vérité et fondements

2013

éd° Vrin
coll. Textes clés de philosophie des mathématiques
textes réunis par Sébastien Gandon et Ivahn Smadja

Ce que les nombres ne peuvent pas être

Paul Benacerraf 1965
trad. Sébastien Maronne

49 « comptiner » vs compter

Il y a deux types de comptage, correspondant aux usages transitifs et intransitifs du verbe « compter ». […] il semble […] possible d'apprendre à compter intransitivement sans apprendre à compter transitivement. Mais pas vice versa. C'est, je pense, un point d'une certaine importance.

70 vaine réification de l'ontologie arithmétique

L'arithmétique est […] la science élaborant la structure abstraite commune à toutes les progressions de par leur nature de progression. Ce n'est pas une science concernée par des objets en particulier – les nombres. Rechercher quels objets particuliers identifiables de façon indépendante les nombres sont censés être en réalité (des ensembles ? Jules César ?), c'est se fourvoyer.

La vérité mathématique

Paul Benacerraf 1973
trad. Brice Halimi

84 vérité & prouvabilité

exiger que n'importe quelle théorie offrant le fait d'être un théorème comme une condition de vérité *explique aussi le rapport entre le fait d'être vrai et le fait d'être une théorème*.

87 dilemme sens-forme

plus justement nous cernons le concept de preuve, et plus intimement nous relions la définition d'une preuve à des caractéristiques combinatoires (plutôt que sémantiques), et plus il devient difficile de la mettre en rapport avec la vérité de ce qui est « prouvé »

L'application des mathématiques aux sciences de la nature

Mark Steiner 1989
trad. Benoît Timmermans

170 étonnement physicien lien réalité-maths

Richard Feynman : « Je trouve absolument étonnant qu'il soit possible de prévoir ce qui va se produire par les mathématiques, c'est-à-dire en suivant simplement des règles n'ayant vraiment rien à voir avec la chose originale. »

Introduction au théorème de FREGE

Richard G. HECK, jr 1998

trad. Lionel PERRIN (révisée)

243 FORMALISME FREGEIEN

Frege eut l'idée de donner les démonstrations dans un système de logique formelle où toute étape déductive acceptable peut être identifiée de façon explicite au moyen de critères purement syntaxiques de sorte qu'il ne soit pas plus difficile de déterminer les présuppositions utilisées dans une démonstration que de vérifier, par exemple, les différentes étapes d'un long calcul.

***L'intuitionnisme de* BROUWER**

Michael DETLEFSEN 1990

trad. Igor LY

282-3/5 MOTIVATIONS INTUITIONNISTES : INFÉRENCES PROPRES, EMPIRIQUES ET *NON* LOGIQUES

nous défendons l'idée qu'une restriction du rôle de l'inférence logique comme celle qui est mentionnée ci-dessus est nécessaire pour rendre compte de la différence qui semble exister entre les conditions dans lesquelles se trouvent ceux qui démontrent à l'aide d'un raisonnement qui s'appuie sur une authentique maîtrise du domaine étudié et ceux dont le raisonnement ne s'appuie pas sur une telle maîtrise, mais plutôt sur des principes d'inférence qui s'appliquent indifféremment à tous les domaines. Ce point, sur lequel Poincaré insista pourtant à maintes reprises, semble avoir été oublié du fait du développement rapide qu'a connu la logique au cours de ce siècle. Nous pensons qu'il mérite plus d'attention qu'il n'en a reçue et que, correctement pris en considération, il fournit une base « nouvelle » pour une épistémologie des mathématiques qui partage de nombreux traits avec l'intuitionnisme de Brouwer.

[...]

La conception de l'épistémologie brouwerienne présentée dans cet article partage la préoccupation de Poincaré au sujet de la possibilité d'une épistémologie des mathématiques qui permettrait un accroissement de la connaissance mathématique ne s'accompagnant pas d'une maîtrise accrue du domaine mathématique particulier concerné. Cette nouvelle (c'est-à-dire : non classique) épistémologie requiert une nouvelle conception de l'inférence selon laquelle, pour qu'une vérité soit démontrée, il faut que, d'une manière ou d'une autre, elle fasse l'objet de quelque « expérience ». En outre, cette nouvelle conception de l'inférence restreint considérablement le rôle de l'inférence logique dans la démonstration. Par l'analyse ou l'inférence logique (classique), on peut tirer toutes sortes de propositions à partir d'une proposition qui a fait l'objet d'une expérience. Mais seules quelques-unes de ces propositions peuvent elles-mêmes être l'objet d'une « expérience » du genre approprié (exactement comme dans le cas des vérités perçues empiriquement, où seules quelques-unes de leurs conséquences logiques sont elles-mêmes perceptibles empiriquement). Ajoutons qu'aucune d'entre elles n'est l'objet d'une expérience du genre approprié du seul fait que l'on montre qu'elle est logiquement reliée aux prémisses.

[...]

Selon Poincaré […], le véritable raisonnement mathématique ne procède pas à l'échelle des pas logiques mais par le biais d'étapes plus importantes – des étapes qui requièrent une véritable compréhension intuitive du sujet mathématique qui est déployé sous la forme d'inférences. Ceci le distingue du raisonnement logique qui, *en vertu de son caractère éminemment neutre eu égard au sujet*, ne requiert et même n'admet aucun usage d'une telle compréhension intuitive dans la production d'inférences. En renonçant ainsi à recourir à toute information qui relève des particularités su sujet particulier examiné, le raisonnement logique renonce aussi à l'agilité de celui qui enjambe les ornières du terrain qui lui est familier, pour adopter le pas hésitant de celui qui, étant aveugle aux accidents de terrain particuliers rencontrées à tel ou tel endroit, doit faire des pas qui sont sûrs en *tout* lieu. Selon Poincaré, la sécurité ainsi obtenue ne saurait pallier la cécité qu'elle reflète. Le savoir-faire logique prévient les chutes, mais l'utilisation d'un canne pour se guider est un piètre substitut à la vue.

286 CONNAISSANCES THÉMATIQUE & MODALE

Conçue thématiquement, la typologie de la connaissance obéit à un schéma de classification qui ordonne la connaissance au sujet qui en constitue le continu. Ainsi, pour qu'une connaissance que p soit considérée comme une κ-connaissance (c'est-à-dire une connaissance de type κ), il suffit que p soit une vérité *au sujet de* κ. Suivant ce modèle, la connaissance mathématique devient simplement connaissance d'une vérité *mathématique* (c'est-à-dire la connaissance d'une vérité qui relève d'un sujet ou d'un thème mathématique).

Selon la conception *modale*, en revanche, la typologie de la connaissance n'est pas ordonnée à la classification des sujets sur lesquels portent les propositions sues. Ce sont au contraire des différences relatives à l'attitude cognitive particulière adoptée qu'elle sanctionne. Aussi bien, la connaissance mathématique devient plus que la simple connaissance d'une proposition mathématique et est distinguée par un certain *mode* ou un certain *type* d'état cognitif.

288-9 Non-extension de la connaissance par inférence logique

Si une connaissance de l'espèce particulière κ doit être étendue par les moyens d'une inférence *logique*, alors l'inférence logique doit préserver les caractères d'un fragment de savoir donné qui font de celui-ci une κ-connaissance. […]

Cette condition n'est ni triviale ni sans effet, car il y a manifestement des types de connaissance qui peuvent être distingués par des caractères qui ne sont pas préservés par inférence logique. Considérons par exemple la connaissance par expérience sensorielle directe. Je regarde l'herbe devant ma fenêtre et je vois qu'elle est verte. En tournant sur ma chaise dans la direction opposée, j'observe le tapis dans le couloir et je vois qu'il est gris. Je peux inférer *logiquement* de la connaissance ainsi acquise que l'herbe devant ma fenêtre est verte et que le tapis dans le couloir est gris. Cependant, en raison des difficultés pratiques relatives à cette situation (par exemple mon incapacité à diriger mes yeux dans des directions opposées au même instant, de voir autour ou à travers des coins, etc.), je ne peux pas produire une expérience sensorielle directe dont le contenu est que l'herbe devant ma fenêtre est verte et que le tapis dans le couloir est gris. Ainsi, étendre logiquement le contenu de la connaissance obtenue par expérience sensorielle directe ne garantit pas que le contenu étendu de cette manière sera accessible au moyen *du même mode cognitif* (dans ce cas, par une expérience sensorielle directe).

[…]

Ainsi, la *manipulation logique* du contenu d'un état mental est une chose et la *manipulation pratique* de son monde cognitif en est une autre. Par conséquent, l'assomption selon laquelle le savoir mathématique peut être étendu au moyen du raisonnement logique n'est pas innocente. La seule capacité manifeste de l'inférence logique est celle d'être un procédé d'abstraction, c'est-à-dire un procédé qui opère la *séparation* du *contenu* d'un état cognitif donné de son *mode d'occurrence*, et qui soumet ce contenu à diverses sortes d'analyses qui conduisent à la production de nouveaux contenus. De la sorte, il ne s'agit pas automatiquement d'une extension ou d'une continuation de l'état cognitif duquel le contenu a été séparé, mais plutôt d'une *réflexion* centrée *sur* son contenu. Dans la mesure où elle est centrée sur le contenu plutôt que sur le mode cognitif, on peut en attendre une préservation du contenu d'un fragment de connaissance donné, mais sans aucune garantie correspondante que le contenu ainsi préservé apparaisse au sein du même mode cognitif que l'original.

292-4 Paradoxe de Poincaré, l'échappatoire classique

Dans la conception classique […], la démonstration ou l'inférence est une procédure de l'espèce suivante : en mathématiques, le sujet connaissant commence avec une connaissance qui relève d'un certain mode cognitif ; il fait alors abstraction de toutes les caractéristiques de ce mode cognitif qu'il considère comme n'étant pas épistémiquement pertinentes, ne prenant plus en considération que des traits comme l'effet de conviction et, disons, la distinction *a priori* / *a posteriori* ; en ayant ainsi étroitement réduit le champ de ses préoccupations épistémiques, il a de manière concomitante élargi l'horizon de l'inférence en rendant possible l'extension de sa connaissance à *toute* nouvelle proposition qui peut être obtenue à partir de celle qui exprime son ancien savoir, par des moyens susceptibles de préserver (dans une mesure suffisante) le noyau étroitement réduit de ses *desiderata* épistémiques (à savoir son effet de conviction de la distinction *a priori* / *a fortiori*). […]

Ainsi, moins (plus) il y a de contraintes sur la préservation des caractéristiques du mode cognitif des prémisses, moins (plus) est restreint le champ des possibilités pour l'inférence. Par conséquent, l'épistémologie classique confère à la justification inférentielle un rôle d'autant plus important qu'il impose à la préservation du mode cognitif des exigences relativement **faibles**. C'est là peut-être le point sur lequel elle contraste le plus significativement avec l'épistémologie brouwerienne. […]

En vertu de l'analyse conduite ci-dessus, **l'inférence logique** (au moyen de laquelle la connaissance mathématique est censée être étendue) **est essentiellement une réflexion comparative sur les *contenus*, au sein de laquelle ceux-ci sont considérés comme relativement indépendants des activités ou des processus épistémiques auxquels ils sont attachés**. Elle ne *reflète* ni n'*exprime* les caractéristiques des activités épistémiques qui sous-tendent ces contenus de manière à impliquer des relations pratiques entre eux. L'idée de base de l'épistémologie classique est donc que les caractéristiques épistémiquement pertinentes d'une expérience donnée ou d'un fragment d'activité intellectuelle en sont séparables ou détachables. […]

L'analyse *logique* « détache » alors les résultats contentuels de ces processus épistémiques eux-mêmes, et les traite comme des entité indépendantes, le résultat étant que l'inférence logique ou la connaissance sont conçues comme consistant davantage en la manipulation de *contenus garantis* qu'en la manipulation de *processus de garantie*.

[…]

Ce qui motive cette épistémologie classique de l'inférence est une certaine conception du langage et de l'entreprise épistémologique en général, que nous appellerons : « conception *logico-intensive* ou *représentationnelle-intensive* »? En arrière-plan de cette conception se trouve l'idée de base selon laquelle, bien que la connaissance commence peut-être par « l'intuition » ou par quelque espèce d'expérience, elle peut néanmoins – et le doit ou devrait en de nombreux cas – être étendue en l'absence d'une extension correspondante de cette intuition ou de cette expérience. Ainsi, bien que l'expérience puisse être nécessaire pour que le savoir *commence*, elle a une valeur strictement limitée en tant que moyen d'*extension* du savoir.

295 Vers Duhem[2] !

[footnote] […] la conception classique des mathématiques subordonnées à la logique peut être articulée aux mathématiques authentiques *de la même manière que* […] les mathématiques sont dites être articulées (ou en quelque façon articulables) aux sciences naturelles. Ainsi, le raisonnement logico-intensif classique est au raisonnement mathématique authentique ce que la manipulation à l'aide de représentations mathématiques dépouillées des éléments qualitatifs est à l'enquête empirique.

296 Échappatoire brouwerienne

[Brouwer] considère comme […] l'une des erreurs fondamentales […] d[u point de vue classique] […] la croyance « […] en la possibilité d'étendre sa connaissance de la vérité par le processus mental de la pensée, et **en particulier la pensée accompagnée d'opérations de nature linguistique indépendantes de l'expérience – ce que l'on appelle « le raisonnement logique »** – grâce à laquelle on parvient à adjoindre, à un stock limité d'assertions « évidemment » vraies fondées sur l'expérience et parfois appelées axiomes, une abondance de vérités supplémentaires. » [Brouwer, 1955]

297-8 Vers Hume !

Les lois logiques ne sont pas des « directives pour des actes de construction mathématique » […] mais **dérivent** plutôt **des régularités** du langage (éventuellement mental) utilisé pour exprimer ou représenter de telles constructions. Et si les régularités d'un tel système de représentation peuvent se montrer utiles lorsque nous essayons de nous rappeler d'authentiques expériences mathématiques, et pour les communiquer aux autres, elles ne doivent pas être confondues ou identifiées aux moyens qui permettent d'étendre effectivement cette expérience.

299 Évolution d'un vécu démonstratif

Ce qui est crucial et fondamental est la création d'une nouvelle expérience démonstrative. En effet, une fois qu'une telle expérience existe, la connaissance peut être étendue à son contenu, quel qu'il soit. C'est une question secondaire de savoir quelle relation logique le contenu de cette expérience nouvellement créée pourrait entretenir avec celui de l'ancienne car **l'extension de la connaissance** ne **procède** pas par extraction logique de nouvelles propositions à partir d'autres propositions déjà connues, mais **plutôt comme par transformation phénoménologique d'une expérience démonstrative en une autre** – le contenu nouveau émergeant comme *contenu de* la nouvelle expérience produite par cette transformation. L'inférence ou la démonstration mathématique suit ainsi le chemin des possibilités relatives aux activités mathématiques davantage que la chaîne des connexions déterminées par quelque analyse logico-linguistique des contenus (propositionnels) de telles activités, comme le soutient l'épistémologie classique.

301 Vers Hanh !

[footnote] si, pour le brouwerien, les activités démonstratives peuvent être structurées, il n'est pas évident que les éléments de cette structure correspondent à ceux de la structure des sous-démonstrations d'une démonstration axiomatique, car il n'y a apparemment pas de raison que ce qui structure une activité complexe en tant que telle doive suivre les lignes induites par déformation contentuelle.

302-3 Critique tiers-exclu, archétype de critique logique classique

La critique brouwerienne du principe du tiers exclu n'avait […] pas le statut d'un argument visant à montrer que ce principe ne pouvait pas jouer un rôle significatif dans la construction d'une démonstration, alors que d'autres principes logiques le pouvaient. Il s'agissait plutôt de la critique d'un dispositif de « calcul » : d'un dispositif qui, même s'il était parfait, ne pouvait jouer aucun rôle sérieux dans la production de véritables démonstrations, mais **pouvait seulement permettre d'identifier les propositions susceptibles d'être démontrées**. La critique de Brouwer consiste à dire que, utilisé comme (partie d'un dispositif) pour déterminer quelles propositions sont susceptibles d'être les contenus d'expériences démonstratives intuitionnistes, le tiers exclu conduirait à identifier certaines propositions comme possédant cette propriété alors qu'en fait elles ne la possèdent pas. Ce principe est par conséquent insatisfaisant comme (partie d'un) dispositif instrumental pour « calculer » quelles propositions sons susceptibles de devenir les contenus d'expérience démonstratives intuitionnistes.

[…]

Brouwer pouvait ainsi résumer sa critique de la logique classique comme instrument de détermination des propositions susceptibles de constituer les contenus d'une expérience démonstrative intuitionniste en disant qu' « il y a des structures intuitionnistes que l'on ne peut faire entrer dans aucun cadre logique classique et [qu']il y a des arguments classiques qui ne s'appliquent à aucune image introspective. » […] Cependant, un tel dispositif ne servirait toujours qu'à *identifier* les propositions susceptibles d'une justification intuitionniste – ce qui diffère considérablement de (et est épistémiquement inférieur à) l'obtention effective d'une telle justification.

[…]

[…] cette critique ne doit être vue que comme un volet d'une critique en deux parties de plus grande portée ; celle-ci ne concerne pas uniquement la correction du dispositif de rappel mnémotechnique et d'identification, mais aussi sa complétude. La critique du tiers exclu est fondamentalement une critique de la **correction** et contribue peu, sinon pas du tout, à l'examen de la question de la complétude, en dépit du fait que cette dernière compte autant pour l'exactitude du dispositif de rappel mnémotechnique et d'identification que la question de la correction.

306 Toujours la même confusion

[footnote] Pourquoi ne pas considérer aussi la maîtrise logique d'un schème d'implications comme un type de savoir pratique ? Ce n'est certainement pas l'idée de l'intuitionniste de nier que l'extraction d'implications logique est en un certain sens une forme d'activité mentale. Il doit par conséquent défendre l'idée qu'il y a une différence fondamentale entre l'activité mentale qui constitue le procès de construction mathématique et l'activité mentale qui constitue l'extraction d'implications logiques.

306 Irréductibilité du vécu mathématique

On peut concevoir que les activités mentales de l'intuitionniste ont des contenus propositionnels au même titre que les attitudes ou les « admissions » de l'épistémologie conventionnelle. Mais, en *vivant* ces contenus ou en *en faisant l'expérience*, on les « enregistre » épistémiquement **d'une façon qui n'est réductible** – tout au moins sans perte épistémique – **à aucune espèce de saisie purement intellectuelle**.

316 De la conjonction syntaxique à la « conjonction » mentale ?

on ne peut pas considérer que l'opération syntaxique qui justifie l'introduction de la conjonction en *logique intuitionniste formalisée* justifie l'introduction de la conjonction comme règle des *démonstrations intuitionnistes authentiques*, puisque si la « concaténation » peut apparaître claire en tant qu'opération portant sur des entités syntaxiques, elle ne fournit pour autant aucune indication sur ce que pourrait être son homologue au niveau de la démonstration mentale.

[…]

[…] Il y a ainsi une différence entre maîtriser séparément une démonstration de A et une démonstration de B et les maîtriser ensemble sous la forme d'une certaine sorte d'unité (autrement dit les maîtriser « simultanément »), et c'est cette dernière situation qui est requise par les prémisses de l'introduction de la conjonction.

[…]

[…] pour être une authentique forme d'inférence, l'introduction de la conjonction doit être considérée comme transformant la maîtrise « simultanée » de A et de B en une construction démonstrative ayant $A \wedge B$ pour contenu. Pour cette raison, la conception de la conjonction intuitionniste qui soutient qu'il est équivalent d'être en possession d'une construction démonstrative de $A \wedge B$ et d'être en possession d'une construction démonstrative de A et d'une construction démonstrative de B est intenable.