Wittgenstein et Poincaré: une nouvelle philosophie des mathématiques ? Le point de la preuve

Ramzi KEBALI
2010

mémoire de M2 LOPHISS, Université Paris VII
sous la direction de Marco PANZA

20 Conception globale de la preuve

demander qu'une preuve soit « dominable du regard », ce n'est que demander qu'elle soit mathématique. […] Or cette vision synoptique de la preuve conduit immédiatement à l'une des remarques capitales de Wittgenstein : il n'y a plus de place pour une surprise en mathématiques. En effet si un résultat « te surprend, c'est que tu ne le comprends pas ».

21-22 Illusion d'*un seul* théorème pour *plusieurs* preuves

les théorèmes mathématiques sont souvent démontrés de différentes manières. Et le propos de Wittgenstein n'est pas de contester un fait aussi élémentaire, mais simplement de mettre en garder le mathématicien : à trop vouloir considérer les théorèmes mathématiques à l'image des faits empiriques que nous pouvons connaître par une multitude de chemins différents (car eux sont justement indépendants de note moyen de les connaître), on perd de vue ce qui fait la spécificité des mathématiques. Et cette illusion peut s'expliquer aisément : quand on est à l'école, et que l'on n'est pas encore familier avec les objets mathématiques étudiés, on apprend souvent un théorème sans sa preuve, et on se laisse facilement persuader qu'il y en a plusieurs possibles lorsqu'on ne saisit pas ce qu'elles ont en commun. La thèse de Wittgenstein est donc une audacieuse généralisation:de la même manière qu'un collégien peut être dupé par une rédaction différente (par exemple une preuve par l'absurde au lieu d'une contraposée), un étudiant en mathématiques peut avoir l'impression de disposer de plusieurs démonstrations d'un même fait alors qu'elles disent exactement la même chose. Il lui manquerait en effet une vue d'ensemble des preuves en question par manque d'expérience. Présenté ainsi, ce phénomène est somme toute banal.

[…] On voit au passage combien il est important d'avoir une vision synoptique et globale des preuves considérées afin d'éviter l'approche confuse qui réussit à la fois à trop distinguer certaines preuves quasiment identiques et à trop assimiler d'autres radicalement différentes !

23 Monter sur les murs du labyrinthe

Wittgenstein a une très jolie image pour décrire cela : tandis que l'étudiant doit avancer dans le labyrinthe à la recherche du trésor caché (sans même savoir s'il pourra le trouver), le chercheur peut monter sur un arbre pour le voir directement.

23 Sens & usage

une proposition mathématique ne prend sens que ramenée à sa preuve en reprécisant que ce qui compte vraiment, c'est l'usage que l'on fait de cette proposition ; ainsi les axiomes ne sont pas exclus des mathématiques, bien au contraire.

39 Mathématiques cantoriennes : métaphysiques ?

A ce stade là, la critique de Wittgenstein se borne à constater que le calcul cantorien n'a rien de profond ni de mystérieux, qu'il s'agit simplement d'une manipulation technique à laquelle on a donné des nomes qui nous font « tourner la tête ». L'infini exerce un certain charme, pourtant quand on regarde le calcul, « infini ne signifie rien d'immense ». Mais il y a pire ; car la théorie des alephs n'a jamais fait preuve de la moindre « utilité », de la moindre « application ». Il faut être clair sur ce sujet, car Wittgenstein a pu laisser penser par cette remarque qu'il se désintéressait des « mathématiques pures » pour ne s'intéresser qu'à l'application en physique. Or, outre que Wittgenstein ne se situe pas dans le cadre de cette distinction, les exemples qu'il prend montrent bien que ce qu'il appelle l'utilité ou l'application concernent également le champ des mathématiques. Par exemple, le nombre imaginaire i, ou les infiniment petits dx, peuvent paraître charmants et mystérieux à première vue. Pourtant ni le calcul des complexes ni le calcul infinitésimal n'ont été créés dans le but de découvrir les secrets de i ou de dx, mais au contraire ceux-ci étaient à l'origine vus comme des constructions fictives qui allaient permettre de résoudre bien des problèmes d'Algèbre ou d'Analyse. En fait il pouvait bien y avoir des grands débats sur la nature de i ou de dx, mais personne n'a jamais considéré qu'il s'agissait là d'entités remarquables dont il serait intéressant d'étudier les propriétés en tant que telles. Or c'est là précisément ce qui se passe avec c, sans parler de la célèbre question « est ce qu'il a un infini strictement compris entre aleph zéro et c ? ». A ce stade on sort de la mathématique pour entrer dans la métaphysique la plus dangereuse, celle qui s'ignore elle-même.

40 « platonisme » forgé par Poincaré

selon Jacques Bouveresse, c'est Poincaré qui a forgé ce terme de « platonisme mathématique » (sans jamais prétendre qu'il s'agissait là d'une stricte application des idées de Platon) justement pour décire l'attitude typiquement cantorienne et ensembliste consistant à considérer les objets mathématiques comme donnés, et non construits.

50 Gödel || Russell : paradoxe ou théorème ?

on a vu que [Wittgenstein] rejoignait complètement la position pragmatique de Poincaré selon laquelle l pratique quotidienne du mathématicien est le meilleur des fondements possibles. Or précisément, le théorème de Gödel n'est ancré dans aucune pratique, et n'a eu aucun impact mathématique […]. N'ayant été réemployé nulle part, on peut en douter sans pour autant remettre en cause l'édifice mathématique. Plus précisément, ce doute consisterait à lire le théorème de Gödel comme un paradoxe semblable à celui de Russell, plutôt que comme une mise en évidence d'une distinction entre prouvabilité et vérité. En effet si l'on refuse cette distinction et *si* on accord malgré tout que P a un sens dans S, alors on a vu que P conduisait à une contradiction. On sortirait alors de ce paradoxe simplement en disant que P n'est pas une proposition de S (de la même manière que la *classe* de tous les ensembles n'est pas une ensemble au sens de Zermelo). Cette comparaison est intéressante car la force du paradoxe de Russell repose sur la confusion entre la notion d'ensemble au sens mathématique et au sens usuel (que l'on peut désigner par le terme de *classe*), de la même manière que la force du théorème de Gödel repose sur une confusion entre la vérité au sens mathématique et au sens usuel.

51 effectivité des preuves

Ce qui est visé ici, c'est l'idée selon laquelle la démonstration de l'impossibilité d'une proposition tiendrait lieu de démonstration de son contraire (d'où l'importance de *l'effectivité*). Par exemple avec Cantor, on a vu qu'il lui suffisait que IR n'ait pas le cardinal de IN (et donc que tous les ensembles non finis n'ont pas le même cardinal) pour démontrer qu'il existe une cardinal supérieur à celui de IN. Alors que par exeple, IR pourrait ne pas avoir de cardinal.

52 preuve de non-contradiction ?

« Mon but est de modifier l'attitude envers la contradiction et la preuve de non-contradiction. (*Non pas* de montrer que cette preuve me montre une chose dénuée d'importance. Comment pourrait-il en être ainsi !). Si l'on me donnait pour tâche de créer des contradictions dans des buts esthétiques, j'admettrais alors sans hésiter la preuve inductive de la non contradiction, et je dirais : il est sans espoir de vouloir créer une contradiction dans ce calcul ; la preuve montre que cela ne marche pas ». Toutefois ce recul n'est qu'apparent car Wittgenstein ne fait que révéler l'unique fonction de la preuve hilbertienne : non pas rassurer nos calculs (même d'un « epsilon ») et encore moins enrichir les mathématiques, mais uniquement réfréner les ardeurs des sophistes en quête de paradoxes.

53-56 Cantor-Bernstein : imprédicatif pour Poincaré

si l'on veut définir le nombre à partir des ensembles, en munissant ceux-ci de la relation d'ordre d'inclusion, le théorème [de Cantor-Bernstein] garantit l'antisymétrie de cette relation. Mais il se trouve que la démonstration de ce théorème requiert un raisonnement inductif, et donc présupposer l'arithmétique déjà constituée ! Poincaré met alors Couturat au défi de trouver une démonstration qui n'emploie pas le raisonnement par récurrence ; ce qui est chose faite par Zermelo dès 1906. Dans son deuxième article publié la même année, Poincaré signale qu'il a bien reçu la nouvelle preuve de Zermelo, mais la rejette catégoriquement comme étant imprédicative. Pourtant en 1908 Zermelo publie sa preuve inchangée et répond à Poincaré que Cauchy a utilisé un procédé comparable dans sa preuve du Théorème Fondamental de l'Algèbre ! Or quand Poincaré regroupe ses articles dans son ouvrage Science et Méthode, tous les paragraphes mentionnant le théorème de Cantor-Bernstein ont disparu...

Il apparaît en fait que Poincaré est allée trop loin dans son rejet des définitions imprédicatives […]. D'ailleurs le procédé incriminé est devenu aujourd'hui assez courant dans les mathématique : supposons que l'on dispose de tous les ensembles ayant une certaine propriété P bien définie. Supposons également que cette propriété P soit stable par intersection. Alors il semble impossible de considérer l'intersection A de tous ces ensembles sans « cercle vicieux » ! En effet A est déjà compris dans nos ensembles que l'on intersectés, puisqu'om possède également la propriété P. Ainsi l'objection de Poincaré semble au premier abord pertinente : comme on avait en fait déjà A au départ, A a été défini comme intersection de lui-même et des autres ensembles ! […] la position anti-platonicienne dissout proprement ce problème : Wittgenstein dirait que ce n'est plus le même ensemble, une fois qu'on lui a attribué la propriété d'être l'intersection de tous les autres. On a donc bien construit A, et cela n'a pas de sens de se demander si un ensemble que l'on pourrait appeler A était déjà là, car de toute manière il n'aurait pas la propriété caractéristique de A « d'avoir été construit en prenant l'intersection de tous ». Cet exemple illustre assez bien la pertinence de l'anto-platonisme : mm^me celui-ci ne tranche pas en définitive sur la question de la licité de cette démonstration, il dissipe le trouble philosophique qui peut éventuellement l'accompagner.

[…]

le rejet de Poincaré des définitions imprédicatives doit bel et bien se comprendre comme un rejet de manipulations cantoriennes qu'il juge illicite, et rien de plus.

[parallèle avec la validité de l'existence de la borne inf dans le continu de Weyl, qui serait définie ensemblistement comme une intersection mais logiquement par une propriété d'ordre supérieur]

60 Preuve eulérienne de l'infinité des nombres premiers

La preuve d'Euler fait […] l'erreur de supposer un ensemble de nombres premiers qu'elle ne construit pas, ou plus exactement qu'elle définit *de fait* comme étant l'ensemble d'indexation du produit eulérien égal à la série harmonique. Il est important de préciser que cette caractérisation des nombres premiers pourra éventuellement être réemployée à profit dans d'autre calculs, qu'elle n'est pas intrinsèquement fallacieuse, mais qu'elles définit un type de nombre premiers radicalement différent de ceux définie par Euclide.

65 Conclusion

Au lieu de se focaliser comme Poincaré sur la réfutation des calculs des logiciens, Wittgenstein pousse ses réflexions plus loin : si la preuve est synthétique, elle ne révèle plus une propriété cachée d'un objet mathématique mais la crée, et il n'y a donc plus de sens à parler de faits mathématiques qui préexisteraient à cette preuve. Ce caractère *dans une certaine mesure* arbitraire garantit la liberté du mathématicien mais disqualifie toute interprétation philosophique de ses résultats.