

la création des nombres

Richard DEDEKIND

1854, 1872, 1876, 1887, 1888, 1890, 1876-1890, 1899

éd° Vrin (2008)

coll. Mathesis

introduction, traduction et notes par Hourya BENIS SINACEUR

14 HISTOIRE DU TERME ENSEMBLE

System : ce terme est rendu par le terme “ensemble” dans l'article en français « Sur la théorie des nombres algébriques ». Néanmoins, je traduis par “système” pour respecter le choix préférentiel de Dedekind, qui utilise parfois “Menge” (*Nombre*, 1^{re} préface), et signale, à l'occasion de la définition de “*System*”, les synonymes “*Inbegriff*” (collection), “*Manigfaltigkeit*” (multiplicité) et “*Gesamtheit*” (totalité, tout). Le terme “*Menge*”, utilisé par Bolzano et Cantor, s'imposa par la suite, notamment grâce au manuel de Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).

Introduction à Continuité

23 TROIS DEFINITIONS DES RÉELS

Continuité et nombres irrationnels expose une des trois méthodes conçues à la fin du XIX^e siècle pour une [définition rigoureuse des nombres réels].

La première en date, publiée en 1869, est celle de Charles Méray (1835-1911). Georg Cantor (1845-1918) découvre indépendamment en 1870 une théorie basée sur les mêmes principes. Exposée d'abord par Heinrich Heine (1821-1881) en 1872 dans l'article cité par Dedekind dans sa préface, elle est publiée la même année par Cantor. Dedekind précise que c'est l'article de Heine qui l'a décidé à publier *Continuité* et qu'il a reçu l'article de Cantor tandis que, son achevé, il en rédigeait la préface. Du reste, la première rédaction de *Continuité*, éditée seulement en 1976, ne mentionne que l'article de Heine.

La deuxième théorie est celle de Karl Weierstraß (1815-1897), élaborée en 1863, mais publiée pour la première fois en 1872 par E. Kossak. Ayant été l'élève de Weierstraß, Cantor connaissait cette théorie avant d'en concevoir une similaire à celle de Méray. Dedekind ne fait ici mention ni de Méray ni de Weierstraß, qui sera cependant évoqué en 1887, dans la première préface à *Nombres*. Par ailleurs, Dedekind précise dès les premières lignes de sa préface à *Continuité* qu'il a conçu sa propre théorie dès 1858, c'est-à-dire indépendamment des autres. De fait, elle en est singulièrement différente.

23 FONDEMENT GÉOMÉTRIQUE DES RÉELS ?

Ce n'est pas que [l'intuition géométrique](#) doive être totalement rejetée ; elle peut être une source d'inspiration ou servir un objectif pédagogique, mais elle [est disqualifiée en tant que fondement scientifique de notions arithmétiques](#).

27 THÉORIE DES ENSEMBLES : DEDEKIND AVANT CANTOR

[La contribution de Dedekind à la constitution de la théorie des ensembles est fondamentale, et même antérieure à celle de Cantor](#). Il faut par ailleurs rappeler que des développements importants de cette théorie par Cantor sont indissociables de la rencontre de ce dernier avec Dedekind à Zürich.

33-35 DEDEKIND BAPTISE LES IRRATIONNELS ET RÉELS : NOMBRES

Dedekind est le premier à parler de « nombre irrationnel » et de « nombre réel », même si on peut rétrospectivement faire remonter les premières ébauches, non thématiques et non justifiées, d'arithmétique du continu aux algébristes arabes et notamment à Al-Karajî (≈ 953, ≈ 1029). [Même Weierstraß et Cantor parlent encore de « grandeur irrationnelle » ou de « grandeur numérique » \[Zahlengrösse\], et s'appuient fondamentalement sur le concept de limite](#). L'expression “nombre réel” indique suffisamment par elle-même l'objectif de Dedekind de fonder les procédés de l'analyse réelle sur un concept purement arithmétique, un

concept qui soit logiquement antérieur aux notions de variation, de limite et de convergence, et donc définir indépendamment d'elles et pouvant servir, inversement, à les définir. [...]

[...] La preuve du théorème de la valeur intermédiaire (1817), remarquable mais alors pas ou peu connue, de Bernhard Bolzano, est historiquement le premier emblème de cette entreprise [d'arithmétisation de l'analyse], car on y trouve une définition des notions de limite d'une suite et de continuité d'une fonction en termes de nombres et d'inégalités comme cela se fait aujourd'hui dans les traités d'analyse.

36 GENÈSE DU TERME CORPS

footnote : [Le terme *corps*] est introduit et défini par Dedekind en 1871 dans le § 159 du X^e Supplément à la seconde édition des *Leçons sur la théorie des nombres algébriques* de Dirichlet.

37 PRINCIPE DE CONTINUITÉ EST CRÉÉ, DÉFINI

Ce principe de continuité [qui associe un nombre réel à toute coupure dans les rationnels] « correspond » à la représentation géométrique intuitive de la droite qu'avaient la plupart des analystes ; mais Dedekind lui donne la forme d'un énoncé explicite précisément parce qu'il récuse cette conception d'une continuité intuitive. Pour lui il s'agit d'un *axiome*, donc indémontrable, qui permet de *penser* la continuité *dans* la droite. Le continu mathématique est conçu, et non perçu : on ne *voit pas* la continuité, d'une ligne, on la *pense*, on la *définit* par un principe ou un théorème, et en mathématiques il n'y a, en toute rigueur, rien que des principes et des théorèmes. [...] Il n'est pas davantage l'expression d'une intuition, mais la *création*, la *définition* d'un concept.

39-40 CONTINUITÉ N'EST PAS GÉOMÉTRIQUE

toute la Géométrie d'Euclide demeure sans lacune si, ayant choisi un système de coordonnées et une unité, on ne considère comme existant que les points dont les coordonnées sont des nombres algébriques [...]. Dans la géométrie euclidienne, si longtemps tenue pour refléter l'espace réel, la discontinuité est donc partout présente, bien qu'elle ne soit pas *perçue*. Rien dans les axiomes ni dans les assumptions implicites d'Euclide ne nous conduit logiquement à la continuité. L'idée est d'autant plus importante qu'elle paraît contre-intuitive.

Il est donc vain d'espérer trouver dans la géométrie euclidienne un concept rigoureux de la continuité.

44 NOMBRES & RAPPORTS

Observant judicieusement qu'Euclide n'emploie jamais comme synonymes les termes “*λόγος*” et “*ἀριθμός*”. Dedekind soutient qu'Euclide ne visait d'ailleurs *pas* à fonder les nombres irrationnels sur les rapports de grandeurs, comme l'ont fait, au XIX^e siècle, nombre de ses contemporains.

50 CANTOR ANTICIPE LES MÉTRIQUES

ce n'est pas seulement le bon enchaînement mais aussi les notions utilisées ou définies par Cantor pour caractériser le continu arithmétique qui sont d'ordre métrique. Elles s'appliquent à des espaces sur lesquels on a implicitement admis, comme c'était le cas dans l'Analyse réelle classique, ou explicitement défini, comme il l'a fit lui-même, une distance. [*footnote* : Cantor a donc anticipé le concept générale d'espace métrique, formellement introduit par Maurice Fréchet (1878-1973) en 1906 ; la désignation est due à Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914.]

51-52 DEUX PREMIÈRES : PRINCIPE DE MAXIMALITÉ & REVERSE MATHEMATICS

Dedekind désigne sa complétude comme propriété d'une structure algébrique ordonnée inextensible. Les réels sont l'extension maximale (unique à un isomorphisme près) du corps des nombres rationnels préservant la structure de corps et l'ordre total familier de ce corps. Cette définition est conceptuellement tout à fait remarquable, car elle présente, pour la première fois dans l'histoire des mathématiques, un argument en termes de maximalité ou d'inextensibilité d'une certaine structure et permet de discerner dans le corps des nombres réels une structure d'ordre total *indépendante* de sa structure métrique. Ou encore, on peut traiter algébriquement de l'ordre sans recours à la métrique.

[...] pour emprunter les termes d'une perspective récente, en prouvant l'équivalence de son principe de continuité avec le théorème sur la limite de toute suite croissante majorée de nombres rationnels, Dedekind a fourni le premier exemple de la démarche caractéristique de ce que l'on appelle les « *reverse mathematics* ». Cette démarche consiste à remonter d'un théorème habituel aux axiomes ensemblistes d'existence *nécessaires* à sa preuve, puis à « renverser » le cours du processus en prouvant, avec les moyens offerts par les seuls axiomes dégagés, que ledit théorème est équivalent à l'ensemble de ces axiomes, c'est-à-dire en prouvant que ceux-ci sont *suffisants* à la démonstration du théorème. Il s'agit, en fait, d'une forme moderne, avec considération de la théorie des ensembles, de l'analyse et de la synthèse des Anciens.

c'est Dedekind qui détecte que la bijection qui applique un continu à deux dimensions (une surface) sur un continu linéaire n'est pas continue, c'est-à-dire en termes actuels que ce n'est pas un homéomorphisme.

Continuité et nombres irrationnels (1872)

59/65 INTUITION GÉOMÉTRIQUE DES RÉELS

notamment pour démontrer le théorème selon lequel toute grandeur constamment croissante, mais pas au-delà de toute limite, approche certainement et nécessairement une valeur limite, je chercherai refuge dans les évidences géométriques. Aujourd'hui encore, un tel appel à l'intuition géométrique dans les premières leçons de Calcul différentiel me semble extrêmement utile du point de vue didactique, et même indispensable si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais personne ne le niera, cette manière d'introduire au Calcul différentiel ne peut prétendre à la scientificité. [...]

[...] le système R constitue un domaine totalement ordonné, unidimensionnel, infini dans les directions opposées. Ce que l'on veut dire par là est suffisamment indiqué par le choix des expressions empruntées à des représentations géométriques ; aussi est-il d'autant plus nécessaire de mettre en relief les caractéristiques purement arithmétiques correspondantes, afin qu'il ne subsiste pas la moindre apparence que l'arithmétique aurait besoin de ce genre de représentations, qui lui sont étrangères.

62-63 CRÉATION DE L'ARITHMÉTIQUE VIA L'ITÉRATION

compter même n'est rien d'autre que la création successive de la suite infinie des nombres entiers positifs, dans laquelle chaque individu est défini par son prédécesseur immédiat ; l'acte le plus simple est la passage d'un individu déjà créé au nouvel individu, à créer, qui le suit. [...] L'addition est la contraction en un acte unique de la répétition *ad libitum* de l'acte le plus simple évoqué plus haut, et la multiplication naît de la même manière à partir de l'addition.

64/80 CORPS DES RATIONNELS (NOTE \mathbb{R}) ET DES RÉELS (NOTE \mathbb{R} GOTHIQUE)

Ce système [de tous les nombres rationnels], que je noterai R , est avant tout complet et fermé, propriétés que j'ai désignées ailleurs [...] comme la caractéristique d'un *corps de nombres* [...]

[...] le système [R gothique] de tous les nombres réels constitue un domaine totalement ordonné unidimensionnel

69 LES ALGÈBRIQUES SONT DÉNOMBRABLES

[footnote : Dedekind démontre (en 1873) que l'ensemble des nombres algébriques (réels ou complexes) peut être bijectivement appliqué sur l'ensemble des nombres entiers, donc qu'il est lui aussi dénombrable (terme que Dedekind n'emploie pas). En 1874, dans son article intitulé "Sur une propriété de la collection de tous les nombres algébriques réels" (*Journal de Crelle* 77 [...]), Cantor reprend « mot pour mot » selon Dedekind cette démonstration en la restreignant (inutilement comme le souligne Dedekind) aux nombres algébriques réels et démontre, en plus, que les grandeurs réelles d'un intervalle bornée quelconque n'est pas dénombrable.]

71/73 DÉFINITION DE LA DROITE VIA LA CONTINUITÉ

[footnote : Noter que Dedekind n'écrit pas : « la droite est complète, non lacunaire et continue », mais « nous qualifions la droite de complète, non lacunaire ou continue », ce qui lui ménage la possibilité ultérieure de dire que la continuité n'est pas une propriété inhérente à la droite géométrique, mais une propriété attribuée par la pensée à la droite, une propriété conférée à la droite par un axiome.]

[...] Je trouve l'essence de la continuité dans [...] le principe suivant :

Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes telles que tout point de la première classe est situé à gauche de tout point de la seconde, alors il existe un et un seul point qui opère cette distribution de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.

[...] Je serai ravi que tout le monde trouve ledit principe si évident et conforme aux représentations qu'il a d'une ligne car il n'est ni en mon pouvoir ni au pouvoir de quiconque d'apporter aucune preuve de son exactitude.

81/82 CONTINUITÉ & COMPACTITÉ & COMPLÉTUDE

[footnote : Oswald Veblen a montré en 1904 que [...] [l'][axiome de continuité de Dedekind pour les nombres réels est équivalente au théorème de Borel-Lebesgue](#), selon lequel les *intervalles réels fermés bornés* sont les parties compactes de l'ensemble des réels considéré comme espace topologique]

[footnote : Le terme "complet" a été appliqué par Hausdorff 1914 pour caractériser un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy est convergente. [...] Le but poursuivi par Dedekind dans son ouvrage est précisément de montrer que, pour les nombres réels, [sa complétude] implique logiquement [celle de Hausdorff].]

Introduction à *Nombres*

110 GÉNÈSE DE L'ARITHMÉTIQUE VIA L'ACTION

Les lois arithmétiques découlent directement de deux *opérations fondamentales de la pensée*. Le terme "opération" indique une conception de la « pensée » comme « **acte de penser** » (et non comme « contenu d'une proposition » comme chez Frege).

114 CORPS & DOMAINE RATIONNEL

[Dedekind a défini] la notion de **corps** comme ensemble stable par les quatre opérations élémentaires [footnote : Dedekind précise qu'au début de sa carrière à Göttingen, entre 1857 et 1858, il a utilisé le « même concept, sous le nom de **domaine rationnel** ». Il ajoute que ce concept coïncide, pour l'essentiel, avec celui dénommé « **domaine de rationalité** » par Kronecker dans sa théorie arithmétique des grandeurs algébriques de 1882, *Gesam. math. Werke* III, 20, note.]

115 ORIGINE AXIOMES ZERMELO

Les axiomes de Zermelo [...] pour la théorie des ensembles sont en partie tirés [du § 1 de *Nombres*].

118-119 DÉFINITIONS ITÉRATIVES

H. Graßman est le premier à présenter une *axiomatique des nombres entiers et à poser des définitions récursives pour les opérations arithmétiques fondamentales*. Frege, au § 6 des *Fondements de l'arithmétique*, dont Dedekind ne prend connaissance qu'après avoir publié *Nombres*, reproche à ce genre de définition d'être circulaires : elles supposent l'existence de l'opération qu'elles définissent. Le reproche est répété en 1903 dans les *Grundgesetze* II, § 139-147. [Le théorème 126 de Dedekind](#) répond par anticipation à l'objection de Frege, ainsi que le souligne Judson Webb : il **prouve**, au lieu de seulement les supposer, **l'existence et l'unicité de l'application qui définit l'addition**, et par suite l'existence et l'unicité de celle qui définit **la multiplication** et de celle qui définit **l'exponentiation**.

119 CONTRIBUTIONS ORIGINALES DE DEDEKIND

Cet essai sur les nombres contient [...] au moins **trois innovations majeures**, qui sont vraiment le bien propre de Dedekind : **la définition d'un ensemble infini**, **le concept de chaîne**, qu'Ernst Zermelo (1871-1953) utilisera dans sa deuxième démonstration [...] du théorème du bon ordre, et **la récursion finie**, qui signe le premier acte de la théorie des fonction récursives.

120 ORDINAUX & CARDINAUX

L'idée d'ordre linéaire des éléments d'une ensemble paraît [à Dedekind] plus fondamentale que celle de nombre d'éléments de cet ensemble. Une explication plus détaillée se trouve dans sa lettre à Heinrich Weber du 24 janvier 1888 :

Je persiste encore à **considérer le nombre ordinal, non le nombre cardinal, comme le concept originaire de nombre**.

124 VUE ENSEMBLISTE SUR NOMBRES

Zermelo écrira, en 1916, que l'ouvrage de Dedekind « est la première tentative, menée à bien, pour développer le concept et les propriétés fondamentales des nombres naturels, par des méthodes purement ensemblistes, à partir de l'idée simple de représentation ».

125-127 QUESTION DE LOGICIENS

la question ultime, celle de savoir si, aux yeux de Dedekind, la constitution de la théorie des systèmes à la quelle la pensée parvient en réfléchissant à ses propres opérations fondamentales, n'était pas une actualisation

de la logique de l'entendement. Autrement dit, les notions de système et de représentation étaient-elles aux yeux de Dedekind des notions logiques ?

[...] Dedekind ne donne pas à “logique” le sens *spécialisé* et le rôle absolument fondateur que le logicisme lui confère. Il me paraît plus juste de dire que les notions de système et de représentation ont constitué pour lui un *outil* doublement efficace, lui permettant et de *généraliser* les processus arithmétiques et de *mathématiser* les lois les plus générales de la pensée. **Dedekind a, non pas réduit les mathématiques à la logique, mais ouvert un nouveau chapitre des mathématiques susceptible de traduire avec exactitude les processus de pensée** (les processus logiques si l'on veut, mais alors dans un sens lâche) **à l'œuvre dans certaines démarches mathématiques fondamentales : réunir en un ensemble des choses distinctes, représenter une chose par une autre.** Zermelo conserve du reste cette bivalence de la Théorie des ensembles, lorsqu'il la définit comme la branche des *mathématiques* qui permet de fonder *logiquement* l'Arithmétique.

Que sont et à quoi servent les nombres ? (1888)

136-137 MISE EN CONFIANCE DU LECTEUR

je sais fort bien que beaucoup pourront à peine reconnaître dans les formes fantomatiques que je leur présent leurs nombres qui, amis fidèles et familiers, les ont accompagnés leur vie durant. La longue suite d'inférences simples, qui correspond à la facture progressive de notre entendement, les rebutera, ainsi que la décomposition austère des suites de pensées sur lesquelles reposent les lois des nombres [...]. Je comparerais volontiers cette activité de pensée, que la rapidité de son déroulement rend difficile à suivre, à celle d'un lecteur parfaitement exercé. La lecture demeure toujours aussi pour ce dernier une répétition plus ou moins complète des différents pas que le débutant doit faire lorsqu'il épelle laborieusement les mots ; mais une toute petite partie de ces pas, donc un tout petit travail ou effort de l'esprit, suffit au lecteur exercé pour reconnaître le mot correct, le véritable mot, – certes avec une très forte probabilité seulement, car il est bien connu qu'il arrive aussi correcteur le plus exercé de laisser passer une coquille de temps à autre, c'est-à-dire de mal lire, ce qui serait impossible si la chaîne de pensées correspondant à l'épellation était répéter intégralement.

153/159 DÉSIGNER DES CHOSSES

j'entends par “*chose*” tout objet de notre pensée. **Pour pouvoir parler commodément des choses, on les désigne par des signes, par exemple par des lettres, et l'on s'autorise à parler, pour abrégé de la chose a ou même de a , là où en vérité est signifiée la chose désignée par a , et nullement la lettre a elle-même.** [...]

[footnote : Un signe [comme \cap] n'a [...] pas de *signification* s'il renvoie à un système non *existant*.]

155 DIFFÉRENCIER A ET $\{A\}$?

[footnote : Dedekind [...] était bien conscient des contradictions que pourrait entraîner l'abus de langage qu'il s'était permis en notant de la même façon l'élément a et le système constitué de cet unique élément a . Il ajoute qu'il eût mieux valu utiliser des signes différents. Et il ne manque pas de le faire dans le texte de 1889 intitulé “Deuxième définition (9.3. 1889) du fini et de l'infini”, où il écrit [a] le singleton constitué du seul élément a et [$a, b, c \dots$] le système constitué des éléments $a, b, c \dots$]

175 « PREUVE » OU « AXIOME » DE L'INFINI ?

[footnote : Zermelo précise que [l'axiome de l'infini] « est dû pour l'essentiel à M. R. Dedekind ».]

175 GENÈSE DU TERME CONSISTANCE ?

[footnote : de la non-contradiction (ou de la « consistance » selon le mot de Cantor) de l'arithmétique]

178 AXIOMES DE DEDEKIND-PEANO

[footnote : De l'aveu de son auteur, l'axiomatique de Peano est inspirée de cette définition 71. Elle reformule, dans ce ordre, les conditions α [\mathbb{N} est stable par successeur], δ [le successeur est injectif], γ [1 n'est pas successeur], et remplace la condition β [\mathbb{N} est le plus petit ensemble contenant 1 et stable par successeur] par l'axiome d'induction compétente énoncé en termes de classes, que Dedekind démontre à l'aide de β (Peano ne semble pas avoir saisi la généralité du concept de chaîne). Ainsi, « les axiomes de Peano » sont, en réalité, les axiomes de Dedekind-Peano (pour une correspondance exacte entre les conditions de Dedekind et les axiomes de Peano, voir Belna 1996, 59-63). Hilbert 1905 s'inspire également de ces axiomes pour caractériser les entiers naturels.]

201 TRANSFERTS DES THÉORÈMES ARITHMÉTIQUES PAR CONJUGAISON

toute proposition sur les nombres, *i.e.* sur les éléments n du système N simplement infini ordonné par la représentation φ , à vrai dire toute proposition dans laquelle on fait totalement abstraction de la nature particulière des éléments n et ne considère que les concepts issus de l'ordre φ , est valide de manière toute fait générale pour tout autre système simplement Ω ordonné par l'application θ et pour ses éléments v ; et le transfert de N à Ω (par exemple aussi la traduction d'un théorème arithmétique d'une langue à une autre) [footnote : [...] Noter l'approche tout à fait moderne de Dedekind qui parle de « transfert », de structure et de « traduction » de théorèmes arithmétiques d'un langage à un autre.] se fait par la représentation ψ considérée en 132 et 133, qui transforme tout élément n de N en un élément v de Ω , à savoir en $\psi(n)$.

Cet élément v peut être dit le n -ième élément de Ω , et par conséquent n lui-même est le n -ième nombre de la suite de nombres N . La signification de la représentation φ pour les lois du domaine N , tout élément n étant suivi d'un élément déterminé $\varphi(n) = n'$, est transférée, après la transformation opérée par ψ , à la représentation θ pour les mêmes lois du domaine Ω , l'élément $v = \psi(n)$, issu de la transformation de n , étant suivi de l'élément $\theta(v) = \psi(n')$ issu de la transformation de n' . On peut donc dire à bon droit que φ est transformée en θ par ψ ; ce qui s'exprime symboliquement par $\theta = \psi \theta \psi = \psi \varphi \psi$. Cette remarque justifie totalement, je crois, la définition des nombres établie en 73.

216 NOTE D'EMMY NOETHER

Pour mesurer l'intensité de l'influence de Dedekind sur la théorie axiomatique des ensembles, il suffit d'une comparaison avec les axiomes de Zermelo (*Math. Ann.* 65), qui sont en partie directement empruntés aux « définitions » de Dedekind (§ 1 de son écrit). Il est bien connu que Zermelo fut conduit à poster son « axiome de l'infini » [footnote : Zermelo l'appelait « axiome de Dedekind »] par ce que la tentative de démonstration de Dedekind (66) reposait sur le concept contradictoire d'« ensemble de tout le pensable » ; et aussi que le postulat du choix joue un rôle dans les considérations de Dedekind (159).

Sur l'introduction de nouvelles fonctions en mathématiques (1854)

220 DEDEKIND & LA CRÉATION DE NOMBREUX CONCEPTS

La création de concepts nouveaux est le moteur de la dynamique de progrès des mathématiques. Dedekind réaffirmera ce principe épistémologique dans la 1^{re} préface à *Nombres* (1888), et il en illustrera sans cesse la fécondité : il introduira en mathématiques le concepts de **système** – absent ici –, ceux de **corps**, de **corps de nombres**, de **nombre réel** (Descartes parlait de « racine réelle » et la plupart des auteurs de « grandeurs irrationnelles »), d'**idéal**, de **chaîne**, de **coupure**, de **treillis** (sous le nom de « groupe dual »), de **module**, d'**anneau** (sous le nombre d'« ordre » – *Ordnung*). Ces concepts ont ouvert la voie à l'émergence de nouvelles manières de faire des mathématiques : Dedekind fut un des premiers artisans de « l'algèbre moderne », dont le développement, orchestré par David Hilbert (1862-1943) et Emmy Noether (1882-1935), fit la célébrité de l'école de Göttingen dans le premier tiers du xx^e siècle.

224 PROGRÈS RÉTROACTIF

Que le progrès dans le développement de toute science *réagit* toujours sur le système par lequel on tente d'en concevoir l'organisme n'est pas seulement un fait historique, mais repose aussi sur une nécessité interne.

224-225 PERMANENCE DES LOIS

par là la mathématique se distingue à cet égard des autres sciences, ces élargissements des définitions ne laissent plus aucune place à l'arbitraire ; au contraire elles résultent selon une nécessité contraignante des définitions antérieures plus limitées, lorsqu'on applique le principe de considérer comme *universellement valides* les lois qui proviennent des définitions initiales et sont caractéristiques des concepts qu'elles désignent. [footnote : C'est le principe de « permanence des lois formelle du calcul ». Énoncé par George Peacock (1791-1858) dans *A treatise on Algebra* (1830), il est considéré en 1867 comme un principe heuristique général par Hermann Hankel (1839-1873).] [...]

[...] Après que le domaine des nombres a été étendu de cette manière [négatifs, fractionnaires, irrationnels, imaginaires], il devient nécessaire de définir à nouveau les opérations, dont l'action n'avait jusque là été déterminée que pour la suite des nombres entiers absolus, afin de pouvoir les appliquer aux nombres nouvellement créés. Ces extensions des définitions ne sont pas arbitraires, dès lors que que l'on respecte le principe général énoncé plus haut. [...]

La multiplication fournit déjà un exemple précis [...]

Je vais encore montrer de manière semblable comment la définition de l'exponentiation se réalise par cette méthode.

le progrès successif d'un membre au suivant de la suite des nombres entiers absolus constitue la première opération et la plus simple de l'Arithmétique ; sur elle sont fondées toutes les autres. Si l'on réunit en un seul acte la suite des exécutions répétées plusieurs fois de cette opération élémentaire, on obtient le concept d'addition. On construit de manière semblable à partir de l'addition le concept de multiplication

Correspondance avec Rudolf Lipschitz (1876)

264 **RIGUEUR EN MATHÉMATIQUE ?**

je dis que le théorème $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ n'avais jamais été démontré auparavant. [...] **N'est-il donc pas proprement révoltant que le cours de mathématiques dans les écoles passe pour un instrument d'une excellence particulière pour former l'entendement, alors que dans aucune autre discipline (comme, par exemple la grammaire) on ne tolérerait un seul instant de si grossiers manquements à la logique ?** Si d'aventure on ne veut pas procéder scientifiquement, ou si on ne peut le faire faute de temps, que du moins l'on soit honnête et qu'on l'avoue franchement aux élèves, déjà si enclins à *croire* un théorème sur leur foi en la parole du maître ; cela vaut mieux que d'étouffer par de pseudo-démonstrations le sens noble et pur des vraies démonstrations.

283 **FORMALISME ASSURÉ**

Que l'on analyse [chez Euclide] toutes les hypothèses, tant celles qui sont explicitement exprimées que les hypothèses implicites, sur lesquelles repose l'ensemble de l'édifice de la Géométrie d'*Euclide* ; admettons que tous les théorèmes euclidiens sont vrais, toutes les constructions exécutables (une méthode infaillible pour une telle analyse consiste, à mon avis, à remplacer toutes les expressions techniques par des termes forgés à neuf et encore dénués de signification ; si l'édifice est correctement construit, il ne s'écroulera pas ; et j'affirme, par exemple, que ma théorie des nombres réels résiste à cette épreuve)

[footnote : Cette méthode justifie on ne peut plus explicitement l'insistance d'Emmy Noether, à la fin de *Continuité*, sur le contenu axiomatique de ces lettres de Dedekind à Lipschitz. Elle indique **la claire conscience chez Dedekind de la possibilité de séparer l'habillage linguistique d'une théorie de son contenu**. Elle préfigure avec un quart de siècle d'avance la célèbre boutade de Hilbert déclarant que les symboles primitifs n'ont pas de signification préalable et peuvent désigner aussi bien des chopes de bière que des points géométriques.]

Correspondance avec Heinrich Weber (1878)

286-287 **RIGUEUR EN MATHÉMATIQUE ? (28 NOV. 1878)**

je suis assez optimiste pour croire que l'on peut enseigner l'Arithmétique de manière rigoureuse même au niveau secondaire ; car, **pour l'heure, ce qui se pratique offre seulement un excellent exemple de la facilité avec laquelle on peut tromper les élèves, si tôt que l'on ose renoncer à l'emploi de la logique**. Comme elle est enseignée, cette Arithmétique, qui est un merveilleux moyen de formation pour développer les capacités intellectuelles de la jeunesse !

291 **ORDINAL PRIME SUR CARDINAL (24 JANV. 1888)**

je dois t'avouer que je persiste encore à **considérer le nombre ordinal, et non le nombre cardinal, comme le concept originaire du nombre**.

292-293 **CRÉATION DE NOMBREUX CONCEPTS (24 JANV. 1888)**

je conseillerai d'entendre de préférence par nombre (nombre cardinal) non pas la *classe* (le système de tous les systèmes finis mutuellement semblables), mais **cette chose nouvelle** (correspondant à cette classe) **que l'esprit crée**. **Nous sommes de race divine et possédons absolument sans aucun doute le pouvoir de créer** non seulement des choses matérielles (chemin de fer, télégraphes), mais tout particulièrement **des choses de l'esprit**. C'est exactement la même question que tu abordes à propos de ma théorie des irrationnels à la fin de la ta lettre, quand tu dis que le nombre irrationnel n'est, dans le principe, rien d'autre que la coupure elle-même, alors que moi je préfères créer quelque chose de *nouveau*, différent de la coupure et lui correspondant, dont je dis qu'il engendre, produit la coupure. Nous avons le droit de nous conférer un tel pouvoir créateur et, par ailleurs, il convient beaucoup mieux de procéder ainsi à cause de l'identité de nature de tous les nombres. Les nombres

rationnels produisent aussi des coupures ; pourtant je n'irais certainement pas identifier le nombre rationnel avec les coupures qu'il produit.

Dangers de la théorie de systèmes (> sept. 1899)

318 CRÉATION DES ENSEMBLES

Je suppose [...] l'esprit capable de *créer* à partir de choses déterminées *a, b, c...* une chose *S* complètement déterminée par les premières. On dira que *S* est le *système* de ces choses, tandis qu'inversement celles-ci sont appelées les *éléments* de *S*

Représentation semblable (distincte) et systèmes semblables (juil. 1887)

323-324 THÉORÈME DE CANTOR-BERNSTEIN

Félix Bernstein, un élève de Cantor, prouva le théorème [énoncé en 1895 par Cantor] en 1897.

Dans une lettre à Dedekind du 5 novembre 1882 [...], Cantor avait posé le problème dont la solution implique celle du théorème précédent : si $M'' \subset M' \subset M$ et si M'' et M sont équipotents, alors M' et M sont aussi équipotents. Dans le langage des chaînes qui est le sien, Dedekind prouve ici ce premier théorème, puis l'applique pour prouver le théorème dit de Cantor-Bernstein. Le concept de chaîne s'avère ainsi non seulement le moyen de définir la suite des entiers naturels, mais aussi un instrument général de théorie des ensembles. La grande abstraction et simplicité du raisonnement ont valu à cette démonstration [datée du 11 juillet 1887] d'être considérée comme « classique » dès qu'elle fut connue.

Dedekind n'envoya à Cantor sa démonstration, avec une notation modifiée, que douze ans plus tard, dans une lettre du 29 août 1899. Celle-ci fut publiée en 1932 par Zermelo en Appendice à son édition de *Œuvres complètes* de Cantor.

328 VISION DES ENSEMBLES

F. Bernstein a communiqué les remarques suivantes : [...] Dedekind déclara à propos du concept d'ensemble : il se représentait un ensemble comme un sac fermé, contenant des choses parfaitement déterminées, mais qu'on ne verrait pas et dont on ne saurait rien d'autre que le fait de leur présence et de leur détermination. Quelque temps plus tard, Cantor fit connaître sa représentation d'un ensemble : il redressa sa colossale stature, décrivit de ses bras un geste majestueux et dit avec un regard dirigé dans le vague : « *je me représente un ensemble comme un gouffre* ».