Université Paris I Panthéon–Sorbonne
UFR de Philosophie

2014-2015

De la non-certitude en mathématique

La philosophie idoine de Ferdinand Gonseth

Marc Sage

Sous la direction de

Monsieur Marco Panza

Master 2 LoPhiSC

10 octobre 2015

Remerciements.

Nous tenons à remercier notre directeur Marco Panza qui nous a bien volontiers accordé son temps, sa culture, et mis généreusement à notre disposition ses exemplaires personnels des ouvrages de Gonseth. Des horizons se sont ouverts grâce aux références qu'ils nous a indiquées – qu'aurions-nous pu espérer retirer de mieux de notre travail ?

Nous voudrions également remercier David Waszek pour les riches échanges et discussions que nous avons eus pendant cette année initiatique.

Typographie.

Toutes les **mises en police grasse** sont de notre fait et dénotent une mise en emphase. Nous éviterons ainsi au lecteur la question récurrente « L'emphase est-elle *déjà dans le texte cité* ou bien a-t-elle été *rajoutée par le citateur* ? ».

Les guillemets anglais " " dénoteront une "façon de parler" ou une mention-étiquette, ceux français « » une citation (même de l'intérieur de son auteur, « comme une pensée que l'on n'aurait point encore formulée »).

Nous tacherons de respecter autant que possible la typographie des ouvrages cités (choix des guillemets, absence d'accents sur les majuscules, minuscules des noms propres).

Afin d'alléger les notes de bas de page (toutes en interligne simple), les sauts de lignes qui devraient y figurer ont été systématiquement remplacés par des alinéas et les citations apparaîtront sans guillemets.

Le corps du texte est en double interligne. Les citations isolées de ce corps (autres que celles en bas de page) seront centrées, en simple interligne et sans guillemets.

Table des matières

0 Introduction

> Quelle est la signification et la légitimité des savoirs mathématiques ? Comment s'insèrent-ils dans notre connaissance du monde phénoménal ?
>
> Frédéric PATRAS, *La pensée mathématique contemporaine* (2001)

Toute personne enseignant la mathématique devrait (selon nous) questionner sa discipline :

1. son *interlocuteur* (à *qui* s'adresse-t-elle ?) ;
2. son *objet* (de *quoi* parle-t-elle ?) ;
3. son *discours* (*comment* en parle-t-elle ?) ;
4. sa *légitimité* (*pourquoi* peut-elle en parler ainsi ?) ;
5. ses *fondements* (*sur quoi* repose-t-elle ?) ;
6. sa *place scientifique* (*quel "réseau"* déploie-t-elle au sein de la science ?).

Le programme est vaste et il n'est pas question d'espérer le cerner ni d'en faire le tour. Nous questionnerons particulièrement trois implicites de la mathématique enseignée – et parfois ainsi pratiquée :

1. la mathématique traiterait d'objets purs (détachés du matériel) ;
2. la mathématique porterait la vérité absolue (immuable) ;
3. la mathématique raisonnerait de façon parfaite (certaine).

Il suffirait d'évoquer deux domaines élémentaires de la mathématique – l'arithmétique et la géométrie – pour se rendre compte de la teneur de notre programme. Que sont donc ces "objets" – nombres, points, droites – dont parlent les énoncés de ces mathématiques "premières" ? Quelle est donc cette "vérité" qui distingue certains énoncés (« $2 + 3 = 5$ », « les deux seules puissances consécutives sont 8 et 9 », « les suites de GOODSTEIN tendent toutes vers 0 », « un triangle ayant deux bissectrices de même longueur est isocèle », « la somme des angles d'un triangle fait un plat ») des d'autres (« $1 + 1 = 3$ », « les nombres de FERMAT sont premiers », « tout triangle est isocèle », « la diagonale d'un carré rapportée à son côté est rationnelle ») ? Comment nous, êtres humains, pouvons-nous établir la "vérité" ou la "fausseté" de tels énoncés ? Et, englobant le tout, comment ces domaines s'insèrent-ils dans notre connaissance de notre environnement ?

> 4.112
> Le but de la philosophie est la clarification logique des pensées.
> La philosophie n'est pas une théorie mais une activité.
> Une œuvre philosophique n'est pas de produire des « propositions philosophiques », mais de rendre claires les propositions.
> La philosophie doit rendre claires, et nettement délimitées, les propositions qui autrement sont, pour ainsi dire, troubles et confuses.
>
> Ludwig WITTGENSTEIN, *Tractacus Logico-Philosophicus* (1922)

Nous nous proposons dans ce mémoire d'étudier l'apport fondamental (et semble-t-il peu connu) de Ferdinand GONSETH à ces questions.

Trois ouvrages, *Les fondements des mathématiques* [Gons1926], *Les mathématiques et la réalité* [Gons1936] et *Qu'est-ce que la logique ?* [Gons1937], traitent globalement des mathématiques. Nous nous concentrerons sur le cadet qui nous parait contenir et dépasser ses ainé et benjamin – notre discours sera de fait parsemé de notes référant à [Gons1926] ainsi qu'à [Gons1937], visant à étayer les propos de [Gons1936].

Toutes les paragraphinations non précisées se rapporteront à [Gons1936].

Un autre travail, *La géométrie et le problème de l'espace* [Gons1945-55], se concentre sur la géométrie, étudiant le problème de (la connaissance de) l'espace. Mais c'est bien le problème plus général de la connaissance dont il traite, la géométrie n'étant qu'un archétype des processus mis en jeu lors de la constitution de cette dernière. Vu les redondances avec [Gons1936], nous l'utiliserons plus pour soutenir le dernier que pour développer ses spécificités[1].

La citation du *Tractacus* donne le ton de notre démarche : plutôt que de bâtir une nouvelle "théorie", nous souhaitons épurer celles déjà en vogue. Plutôt que de rajouter, nous souhaitons démystifier. L'œuvre de GONSETH montre à quel point cela est nécessaire – et la méconnaissance de cette œuvre à quel point il est nécessaire *aujourd'hui* de poursuivre ce travail.

Présentons à présent les grandes lignes de notre mémoire.

GONSETH dégage une *connaissance intuitive*, sommaire, pratiquement assurée et inachevée. Il y fonde *la genèse de notre connaissance abstraite*, idéale, celle justement dont nous disions vouloir questionner en mathématique trois implicites, dénonçant ainsi *le mythe d'une sphère idéale préexistante* qui viendrait se réaliser ici-bas :

> [les lois primitives] sont pratiquement infaillibles dans leur domaine naturel de validité. Par une pente qui lui est, semble-t-il, naturelle, l'esprit imagine une infaillibilité absolue, une adéquation sans réserves à des réalités déterminées une fois pour toutes jusque dans leur essence... et en fait les attributs d'une vérité idéale. C'est alors elle qu'il voit réalisée, plus ou moins parfaitement, dans tous les cas concrets. §82

À ce stade, tout est déjà dit et nos questionnements trouverons une réponse immédiate en la déchéance de ces *trois dogmes du platonisme*[2]. Mais laissons nos coquillages platoniciens se faire engloutir par les flux gonsethéens et continuons à observer ce qu'imprégnera la marée montante[3].

[1] Nous n'aborderons pas dans notre travail les synthèses dialectiques exposées dans [Gons1945-55].
[2] nous reconnaissons ici la marque profonde qu'a laissée sur nous la lecture des *Deux dogmes de l'empirisme* de W. QUINE
[3] L'image est un souvenir d'une lecture de feu Alexandre GROTHENDIECK, qui nous a quitté il y a bientôt un an.

La genèse dont nous parlions, l'abstraction, s'opère suivant un mode *schématique* (penser au schéma des techniciens ou à la carte d'une forêt), à l'image de notre connaissance intuitive : un schéma est *imparfait*, *efficace* et *en devenir*. Ce n'est pas autrement que *nous construisons* et explorons la réalité, qu'elle soit mathématique ou d'un autre ordre : par *schématisations* successives d'une signification extérieure/antérieure (l'ambigüïté est pertinente). Le schéma constitue ainsi un *horizon de réalité* – mais également un *horizon de connaissance* : connaître, *c'est* construire la réalité, dans une dialectique de tels horizons successifs[4] qui reconstituent ainsi le contenu de notre intuition.

Une pré-schématisation constitue notre sphère intuitive, la première schématisation notre sphère idéale (ou abstraite), la deuxième aboutit au *formalisable*, dans lequel la démarche axiomatique déploie toute sa puissance. Ici érigerons-nous un pont vers Pierre DUHEM : l'auteur de *La théorie physique – son objet, sa structure* nous décrit comment la physique est *modélisée* par la mathématique, la question de la "vérité" d'une théorie physique revenant *in fine* à son *idonéité* (hommage gonsethéen). Ce problème de la "fidélité" de la traduction du physique au mathématique, de la *concordance schématique* (pour reprendre les termes de GONSETH) est simple et central. Sa résolution ne l'est pas moins : ce principe de concordance *est lui-même idoine*, sa validité étant *consacrée par l'expérience (vécue)* – sans qu'il soit nécessaire (ni même sensé !) d'en chercher une explication. Ici même HUME se trouve pleinement réhabilité.

Pour ceux et celles qui interrogeraient le premier titre de ce mémoire, l'hommage est à WITTGENSTEIN. Cette sphère intuitive de GONSETH, il l'a – à nos yeux – creusée plus profondément que quiconque. Et ce qu'il a trouvé, ce qu'il décrit par brefs éclairs dans *De la certitude* – des éclairs qui permettent d'entrevoir au-dessus des nuages –, nous ne saurions autrement le désigner : c'est la vie. Cette vie qui *agit* et qui *connaît pour agir*[5], comme nous le décrivent si bien TSUDA et BERGSON avec qui nous aimerions donner suite à ce mémoire. Si la certitude mathématique a été déchue par GONSETH, c'est pour redevenir *vivante*. Ainsi la négation de notre premier titre

[4]Le cas du problème de l'espace aborde un horizon d'un autre "type", celui de l'*expérimental*. Nous voyons ce dernier comme un prolongement du primitif et nous pensons plus clair d'opérer une synthèse dialectique de ces deux aspects *avant de* considérer un quelconque autre horizon. Nous n'aborderons cependant pas dans ce travail les synthèses dialectiques exposées dans [Gons1945-55].

[5]nous proposons en annexe un peu de *reverse mathematics* pour illustrer le nombre comme fondement de notre action itérative

1 La sphère intuitive

> La « crise actuelle des mathématiques et de la logique » est au fond une crise de l'idéal platonicien dans les dernières positions qu'il occupe. Désire-t-on vraiment la dénouer : c'est aux bases mêmes qu'il faut toucher. **Il faut faire le sacrifice des notions que nous avons dites « éternellement fixées », des concepts « préalablement et exactement délimités » pour leur substituer les concepts « en devenir » et « ouverts vers leur avenir »**.
>
> Ferdinand Gonseth, *Les mathématiques et la réalité* (1936), §8.

1.1 Commencer sans fonder

La citation qui ouvre notre première section donne le ton gonsethéen : tôt au tard, les idées figées en lesquelles nous croyions fonder notre connaissance doivent être déchues. Ou plutôt : leur caractère figé et mortifère doit être abandonné au profit d'une *vivance* permettant pleine évolution.

Remontant cette dernière (la "devenance"), peut-on isoler un commencement ?

À défaut d'un commencement, Gonseth nous propose un stade embryonnaire : nous possédons une connaissance « intuitive » et portons des jugements « intuitifs », lesquels sont *sommaires* et *pratiquement sûrs*. Peu importe leur grossièreté, on ne leur demande que d'être efficaces et c'est uniquement leur efficacité qui en jaugera de la valeur :

> Pour savoir, il n'est pas nécessaire de savoir comment on sait. **L'homme dispose de moyens naturels de connaître** qu'il peut mettre en œuvre sans avoir à se contempler lui-même. Sans devoir y réfléchir particulièrement, il est capable d'une connaissance active et étendue. [...]. **Cette connaissance répond à ses fins naturelles : elle est efficace**. [Gons1945-55] §1

Cette « sphère intuitive » constitue ainsi une véritable matrice de ce que Gonseth appelle « les éléments de la connaissance intuitive » : nous y pouvons *percevoir*, *juger* et *agir*. Les trois caractères cardinaux de cette forge intuitive sont :

1. le *pratiquement assuré* ;
2. le *sommaire* ;
3. l'*en-devenir*.

On pourra être surpris d'associer le sommaire à l'assurance si l'on est habitué à fonder cette dernière dans une précision maximale. Tout vient du degré d'assurance exigé : on entendra volontiers qu'il différera selon que l'on veuille envoyer une équipe humaine sur la Lune ou que l'on veuille saisir un objet à portée de main !

> la définition de l'intuitif qui précède doit être considérée comme une définition modèle. Car toute son imprécision ne l'empêche pas d'être opérante, adéquate, efficace, — entre certaines limites naturellement. **Et nous n'en exigeons pas davantage**. §5

Nous avons déjà évoqué le "pragmatiquement sûr". Il convient d'insister : la sphère intuitive gonsethéenne est empreinte d'*empirisme*, qu'il s'agisse de nos perceptions, de nos jugements ou de nos actions. L'accès à cette connaissance devra donc surprendre un mathématicien, habitué à valider sa connaissance à travers le prisme de la preuve :

> Démontrer, c'est rassembler les éléments de la certitude pratique [...]. **La connaissance positive est celle qui**, informant nos pensées et nos actions, **ne se voit pas démentie par le développement des pensées et les conséquences des actions**. §6

Concernant l'en-devenir, la sphère intuitive est constamment en évolution, se nourrissant des apports de l'expérience. Un autre type de connaissance, dite *empirique*, vient ainsi prolonger l'intuitive. Elle s'en distingue en cela que le sujet prend une part *active* dans sa constitution : c'est la démarche expérimentale, limitée aux instruments « intuitifs ». Elle peut réviser la connaissance intuitive et reste ainsi tournée vers le concret (par opposition à la connaissance abstraite, située dans la sphère idéale, dont nous nous reparlerons section 2.1).

Si Gonseth développe longuement la connaissance intuitive, c'est qu'elle fait partie des implicites que l'on aurait facilement tendance à oublier – pourtant, sans elle, que pourrait-il bien émerger[6] ? On se fourvoierait lourdement à sous-estimer l'importance de la mise à jour par Gonseth de cet implicite – aussi simple fût-il :

> si, pour commencer, nous faisons appel à ces notions grossières et primitives, à ces idées d'une justesse sommaire, à ces connaissance toutes brutes et d'une exactitude abrégée, c'est que nous voulons garder le contact le plus étroit possible avec les faits dont nous sommes *pratiquement sûrs*. Leur « contenu de réalité » est suffisamment dense pour que, si on ne les emploie pas en dehors de leur cadre naturel, leur interprétation et leur signification soient pratiquement immédiates. §3

La mise à jour de cette sphère intuitive nous paraît d'une importance considérable. Plutôt que chercher à partir de concepts "déjà en usage" de chercher à en cerner "le" sens "figé" (objets mathématiques, vérité, loi logique, causalité, universels...), Gonseth part de l'être humain connaissant par son *action*, à un stade embryonnaire *pragmatique*, et révèle le caractère à la fois sommaire, inachevé et pratiquement infaillible de ces éléments de la connaissance intuitive. Ce ne sera que par une *idéalisation*, une « abstraction » (que Gonseth qualifie de « première *axiomatisation* »), que ces éléments "mouvants" (osons le dire : vivants !) se trouveront projetés dans la sphère abstraite – traditionnellement royaume de la mathématique. Ces abstraits ne se trouveront néanmoins nullement projetés, cristallisés – disons-le : "fossilisés" –, dans des cieux platoniciens où ils pourront se parer de leur toge d'absoluité et se couper ainsi de leurs racines empiriques (le problème de leur *accès* devenant alors critique) : ils continueront à évoluer dans la sphère idéale. En particulier, dès une « seconde[7] axiomatisation » (une *logicisation*, que nous décririons plutôt comme une *formalisabilisation*[8]), nous

[6] la philosophie dont il s'agit ici pourrait aussi être appelée : *Systématique de la connaissance préliminaire à toute connaissance scientifique.* [Gons1937] §3

[7] Gonseth écrit toujours "seconde" : dans le doute d'un choix stylistique, nous préférons laisser ouverte la possibilité d'axiomatisations ultérieures (une troisième par exemple conduirait aux catégories) et écrire plutôt "deuxième".

[8] qui rend *formalisable* (et non : qui rend *formel*). Le point est d'importance pour ne pas faire de Gonseth un formaliste qui, partant de la sphère intuitive, axiomatiserait des abstraits pour ensuite mieux s'en débarasser une fois ces derniers formalisés (une position qui plairait *in fine* certainement à Sceptique).

pourrons construire des réseaux (formels) prêts à recevoir et faire circuler le sens (le « contenu intuitif »), sans que par ce mot quelque abstrait que ce soit (qui continuerait à évoluer dans la sphère mathématique, à subir des axiomatisations ultérieures) ne soit précisément délimité autrement que par ces canaux formels.

Seront ainsi revues par Gonseth les notions :

1. de *signification* d'un mot, « en définitive fixée par les modalités de son emploi » (§7) ;
2. de *réalité*, construction permettant notre action ;
3. de *nombre entier*, simple propriété d'un groupe d'objets physiques ;
4. de *loi logique*, émergeant d'une « physique de l'objet quelconque » ;
5. d'*universel*, corrélat d'une « physique intuitive des qualités » ;
6. de *vérité*, décrite dans une « Logique élémentaire du Vrai et du Faux » ;
7. de *quantification*, surtout universelle, intimement reliée à l'infini ;
8. de *causalité*, à travers l'*explication* ;
9. de *déduction* et *démonstration*.

> Porterons-nous par là atteinte au prestige justifié de la spéculation mathématique ? Nous ne le croyons pas. Nous avons, au contraire, le sentiment de contribuer à lui rendre la place qu'elle a une fois occupée et qu'elle mérite toujours : au centre même de toute connaissance. §1

1.2 Les formes intuitives

La connaissance est connaissance *de quelque chose*. Au stade le plus naïf, nous visons à connaître des *choses* et l'ensemble de ces choses constitue l'objet de notre connaissance : la *réalité*. Nous en venons ainsi naïvement à poser la réalité en-dehors de nous, à *la supposer prédonnée*, comme ce quelque chose que nous connaîtrions. Gonseth va pleinement à l'encontre de cette conception, considérant la réalité comme une élaboration de notre être mental visant à la possibilité de l'action :

> la réalité telle que nous l'apercevons est une construction de plus ou moins autonome de notre esprit, dont les fins essentielles sont de rendre l'action possible. §16

L'activité scientifique, qui se confond pour une part avec la construction de la réalité, se fonde sur une *aperception* – mais non aperception *de quelque chose* (ce qui serait mettre la charrue avant les bœufs et nous placerait à contresens complet de la perspective gonsethéenne). Empruntant au langage kantien, Gonseth donne l'exemple de la couleur : « *La couleur est une forme de notre aperception* » (§19). Ce qui l'amène plus généralement à décrire ce qu'il nomme nos *formes intuitives*[9]. L'écho kantien est légitime depuis les formes *a*

[9] Non pas que nous estimions que cette conception [de l'espace et du temps comme formes a priori de l'intuition] puisse être reçue sans un profond remaniement par un esprit moderne. Mais un fait essentiellement nouveau reste acquis, probablement à jamais : *il ne peut plus être ignoré que, dans l'investigation du monde, nous apportons une structure intellectuelle propre, dont n'est pas indépendant cela même que nous appelons connaissance.* [Gons1937] §24

priori de la perception mais ne doit pas nous amener à partir en vogue vers quelque sirène : contrairement aux formes kantiennes *figées* de l'espace et de temps[10], le qualificatif "intuitif" renvoie comme toujours à quelque *sommaire inachevé* (et donc en devenir) :

> les formes intuitives peuvent être comparées à des représentations partielles et schématiques d'une réalité qui, d'ailleurs, **ne nous est point donnée autrement**. Elles nous fournissent les premiers éléments pour la construction de toute réalité. §19

Ces formes intuitives sont amenées à recevoir des *qualités intuitives* : par exemple "rouge" sera une qualité intuitive s'insérant dans la forme intuitive "couleur".

Insistons dès à présent : malgré le séduisant appel platonicien, on commettrait une lourde erreur en prenant ces qualités *intuitives* (donc sommaires et inachevées) pour des *universels* (figés). Ce sont nos sens qui permettent, à travers leur perception, en fait l'*élaboration* de ces qualités intuitives.

Deux formes intuitives nous paraissent mériter d'être dégagées :

1. l'*objet* ;
2. le *type*.

Nous pensons et connaissons de manière singulièrement efficace en termes (entres autres !) d'*objets*. Notre esprit peut les isoler et concevoir notre action sur eux, ce qui conduira à une combinatoire intuitive, matrice de la logique et de l'arithmétique (nous en reparlerons section 1.3) :

> Il nous faut donc dire que *l'objet est une des formes primaires sous laquelle se présente la connaissance* et dans lesquelles se manifeste l'incidence du plan mental sur le plan naturel. §62

Il suffit toutefois d'évoquer l'exploration des échelles subatomiques ou astronomiques pour démystifier l'absoluité de cette forme : champs des équations de Maxwell, fonctions d'onde de probabilité en mécanique quantique, groupes simples en théorie des particules, singularités d'une variété quadri-dimensionnelle en relativité générale. Ainsi « la notion de l'objet se dégrade[-t-elle] jusqu'à n'être plus qu'un « **préjugé macroscopique** » » (§62) :

> Ce découpage schématique d'une réalité fuyante en objets distincts, est merveilleusement conforme aux nécessités immédiates. Il peut ne plus l'être à certaines nécessités de la science. §62

[10] Nous croyons que les quelques indications qui précèdent permettent déjà d'indiquer, en quelques mots, ce que l'Esthétique et la Logique transcendantales apportent à l'évolution de l'idée de la logique. Elles ne visent à rien moins qu'à établir une nouvelle **Doctrine des vérités élémentaires** [en gras dans le texte]. Où prennent-elles, elles-mêmes, la justification de leur argumentation ? Dans **l'idée générale que le nécessaire, de par sa nature même, doit s'imposer à l'esprit ; et dans l'emploi en conséquence d'une série de jugement que l'ambiance de l'époque faisait tenir pour tels. Or, pour la plupart d'entre eux, nous n'en sentons plus la contrainte. Ce qui entraîne cette conséquence radicale : qu'aucun de nos jugements ne comporte probablement cette nécessité absolue et transcendante**. Ce qui disjoint, en un coup, toutes les articulations de la synthèse kantienne. [Gons1937] §27

La forme *objet* procède par *singularisation*. Or « nous reconnaissons une maison parce qu'elle est conforme à un certain *modèle intuitif* » (§76) : l'enfant qui apprend à tracer l'alphabet développe et affine une forme *objet-à-similitude-près* que GONSETH nomme « *type* ». La forme *type* procède donc par *particularisation*.

Le gain de la reconnaissance d'un objet comme conforme à un certain type est évident : de par leur plasticité et l'indétermination de certains de leurs traits, les types sont appelés à épouser les nécessités pratiques bien mieux que la "perfection" des universels. Si l'on nous demande « Allez chercher un livre », nous n'allons pas analyser le concept de livre et l'essence livresque afin de comprendre l'objet de la requête qui nous est adressée : la qualité intuitive "livre" nous y aidera bien mieux. Nous serions bien embêtés sans les qualités intuitives alphabétiques pour lire une écriture manuscrite ! Et, à un niveau de connaissance plus avancé, il n'est nul formalisme possible sans une capacité à identifier des types symboliques (nous y reviendrons section 2.3).

Cette différence d'appréciation (de conception ?) de l'objet est marquée chez GONSETH par deux qualificatifs rappelant d'une part les universaux d'ARISTOTE d'autre part que « l'idée que la conformité à un type puisse être envisagée comme une loi, et spécialement comme une loi naturelle remonte peut-être à GŒTHE » (§77) :

> Cette notion de l'[*objet doué de ses propriétés caractéristiques*], schématique à un très haut degré, et pourtant si merveilleusement appropriée aux fins humaines, nous l'appellerons *l'objet aristotélicien*. §73
>
> nous conviendrons d'appeler « **objet gœthéen** » l'objet considéré comme **déterminé** (en même temps que tous les objets du même nom) **par la conformité à son type**, et en l'opposant à l'objet aristotélicien dont il a été question au chapitre précédent. §77

Voyons à présent la genèse de la connaissance intuitive grâce à la forme *objet*.

1.3 Vérité, évidence & preuve intuitives

Dans la sphère intuitive, nous possédons une notion intuitive de *vérité* – notion sommaire, efficace et inachevée, à l'image de cette sphère "primitive" :

> les jugements qui sont vrais parce qu'ils expriment ce qui est ou ce qui fut, ne le sont que *pratiquement*. Ils ne nécessitent pas l'intervention d'une vérité fixée définitivement ; il suffit d'une vérité elle-même pratique et sommairement délimitée. Je ne chercherai pas à analyser indéfiniment l'idée que je m'en fais, parce que ce *serait la détruire*[11] ; je connais pour les besoins de la pensée et de l'action les conditions de son emploi ; je l'appelle la *notion intuitive de vérité*. §33

Il est délicat de distinguer la vérité de l'*évidence*, tant ces deux notions se compénètrent au stade intuitif. Une troisième composante vient s'ajouter à ce complexe : la *preuve*. GONSETH nous avertit, à travers l'exemple de la transitivité de l'ordre numérique, que l'évidence, certes fondant la preuve, peut *elle-même s'appuyer sur quelque preuve*. Par conséquent, c'est plutôt toute une *dialectique preuve-évidence* qui se met en place :

[11] on cherche là quelque chose qu'on ne pourra jamais trouver parce qu'à cet endroit il n'y a rien, et tout se perd, devient confus et vague, dégénère en un jeu de cache-cache. [RivRou1990] p. 226. Ainsi s'exprimait HILBERT à FREGE au sujet de la définition de « point » géométrique. Sa description de cet endroit où il n'y aurait rien nous paraît très bien décrire la sphère intuitive de Gonseth (bien que les caractères qu'il dépeint le conduisent au contraire à disqualifier une telle sphère).

Dans tout recours à l'évidence, il y a aussi quelque chose comme un raisonnement implicite.

[...] il n'y pas de ligne de démarcation séparant une fois pour toutes les nécessités intuitives et les nécessités explicitement justifiées. §136

Et nous pourrions incorporer à ce triptyque vérité-évidence-preuve la *rigueur*.

Le point gonsethéen est de fonder l'origine normative de ce lacis logique dans une pure *description* au sein de la sphère intuitive – et c'est toujours l'efficacité qui jugera *in fine*[12] de son idonéité :

> la **déduction** n'a pas besoin, pour s'exercer, d'une méthode déductive explicitement formulée. Elle manie avec succès les nécessités pratiques, sans attendre l'énoncé de principes abstraits pour sa justification. §133
>
> l'idéal de **rigueur** qu'on imagine assez couramment réalisé par les spéculations des mathématiciens n'est pas plus immuable que les autres notions fondamentales, dont quelques-unes (celle d'axiome, p. ex. ou même celle de **vérité**) nous ont présenté un visage si changeant. §133
>
> Il faut en prendre son parti : le sentiment de l'**évidence** varie avec les époques. §133

Ce réseau logique intuitif va permettre d'élaborer une proto–physique, une sorte de chapitre préliminaire à toute connaissance traditionnellement qualifiée de physique.

C'est là qu'intervient la forme *objet*. Dans la sphère intuitive, nous induisons de nombreuses lois nous aidant à agir qui concernent les regroupements d'objets.

Par exemple, l'*action* sur ces derniers conduit à des lois que nous qualifierons de *combinatoires*, telles les lois arithmétiques ou ensemblistes. À ce stade intuitif, le nombre n'est en effet pour Gonseth qu'une *qualité d'un groupe d'objets* :

> **L'arithmétique, dans le stade intuitif spécialement, est un chapitre, un des tout premiers chapitres de la physique : celui qui s'occupe des lois concernant les groupes d'objets**, la réunion de deux ou plusieurs groupes en un seul, le partage d'un groupe en groupes partiels, les permutations des objets dans un groupe, etc. **Le nombre des objets que comprend un groupe**, avons-nous déjà dit, **est une propriété physique de ce groupe, une *qualité***, comme sont aussi des qualités la couleur ou le poids d'un objet, sa forme et le fait d'occuper un lieu déterminé dans l'espace. §63

La cardinalité d'un groupe d'objets devient ainsi *simple constatation expérimentale* : ayant choisi une liste énumérative de référence (par exemple nos doigts, l'alphabet, la comptine "un-deux-trois-...", etc.), toutes les énumérations des objets de ce groupe se terminent sur le même référent. D'où au passage la primauté génétique du nombre ordinal sur celui cardinal :

[12] **le grand *problème de la vérité***. L'ancienne conception métaphysique le voyait à peu près comme suit : il y a une réalité ; **il y a un monde de l'être vrai ; une proposition est vraie, si elle concorde effectivement avec ce qui se passe dans cette réalité**. [. . .] Malheureusement, cette réalité n'est pas à notre portée, et nous ne pouvons pas appliquer la définition qui précède. C'est une déveine pour l'espèce humaine, mais cela ne change rien à la situation. Puisque nous ne pouvons pas vérifier si une affirmation concorde avec la réalité, acceptons **la conception *pragmatique* : la vérité d'une proposition consistant dans sa confirmation. De fait, la vérité s'en trouve dépouillée de caractère absolu, éternel ; elle devient relative, humanisée** ; mais, du moins, elle comporte une critère *applicable*. À quoi pourrait bien mener un concept de vérité, qui ne serait pas utilisable ? [Hahn1935] p. 47-48

Il y a un fait d'expérience qui conduit au delà du cadre la numérotation pure et simple : c'est qu'**ayant à compter, c'est-à-dire à numéroter un groupe d'objets, je puisse à mon gré changer l'ordre et la position de ces objets : je n'en obtiendrai pas moins toujours le même résultat final. Les collections finies possèdent donc un caractère invariant vis-à-vis de toutes les permutations possibles : leur *nombre***. Et il y a un véritable mouvement de la pensée à dire, par exemple, que certains objets sont au nombre de dix, parce qu'ils peuvent être numérotés de un à six.

On pourrait dire aussi que la notion de nombre cardinal est fondée sur la possibilité d'établir entre les nombres ordinaux et les objets d'une catégorie finie une correspondance parfaitement univoque et qui se conserve à travers tous les dérangements et objets envisagés. **Cette possibilité contient un *fait d'expérience irréductible***. §41

Un autre exemple concerne la localisation des objets, sorte de géométrie intuitive menant à une proto-science de l'espace. GONSETH cite deux telles lois empiriques de l'objet (§63) : la transitivité de la relation "être à gauche de" et l'involutivité des réflexions de l'espace (par rapport à un plan).

Un troisième exemple est induit abstraction faite des singularité des objets : GONSETH la nomme « **physique de l'objet quelconque** » (§61) – elle n'est autre qu'une *proto-logique propositionnelle*. Ainsi (§63)

1. le principe de non-contradiction $\neg(A \wedge \neg A)$ vient-il de la constatation empirique qu'« *un objet ne peut être à la fois présent et absent*[13] » ;
2. celui du tiers exclu $A \vee \neg A$ que « *tout objet est (quelque part) ou n'est pas* » ;
3. enfin, celui d'identité $A \Longleftrightarrow A$ que « *toute chose est identique à elle-même* ».

En considérant les types, il serait possible d'ériger une proto-théorie des classes qui, mélangée aux "lois primitives de l'être[14]" (exemplifiées par les trois principes ci-dessus), conduirait à une *proto-logique prédicative*.

Anticipant sur la sphère logique, résumons les présupposés (implicites) nécessaires pour vérifier un fait basique de toute axiomatique formelle, cela afin de démontrer *l'utilité clarificatrice* de l'œuvre gonsethéenne :

1. un vrai intuitif (pour juger de ce fait basique et d'autres) ;
2. une combinatoire intuitive (celle des symboles d'objets, de relations, de propositions...) ;
3. la forme intuitive "type" (pour reconnaître ces symboles[15]).

En jetant un regard derrière nous, c'est ainsi *toute l'arithmétique, la logique propositionnelle et la logique prédicative*[16] que GONSETH vient de refonder dans l'intuitif *via* la combinatoire. Un travail remarquable.

[13] On retrouve cette dichotomie chez M. CAVEING au niveau de l'*acte* plutôt que de la présence : il n'est pas possible à la fois d'effectuer et de ne pas effectuer un acte bien déterminé : la logique de l'action comporte cette exigence bivalente qui est inscrite dans le concept même d'acte. [Cave2001] p. 40

[14] Toute la logique élémentaire peut être regroupée autour des notions d'objet et d'existence. *Les lois qu'elle formule trouvent alors leur réalisation naturelle dans le domaine des objets concrets ; elles y prennent la signification de lois naturelles très primitives et pratiquement infaillibles.* [Gons1937] §54

[15] HILBERT expressly stated that it is the "forms" of sign-tokens that are to be the focus of the finitist's attention. And, for HILBERT, the "form" of a sign-token is independant of its time, place, chemical composition, etc. Thus, the objects of finitary thought are sign-tokens, but **sign-tokens treated as having only a "form" or "shape"**. The scope of a given finitary operation is, therefore, never just one or another particular token, but rather **the whole class of tokens sharing a given form**. [Detl1986] p. 51

[16] Nous rajouterions volontiers la *praxilogie* (au sens de *théorie des actes*), *i. e.* l'étude des monoïdes, dont les éléments doivent être pensés comme autant d'*agents*, le cas typique étant celui des fonctions stabilisant un même ensemble (le cas bijectif conduisant aux groupes symétriques et à la combinatoire traditionnelle). Ce n'est pas pure fantaisie de notre part : GONSETH parle déjà de « la **logique de l'acte quelconque** énonçant les lois de combinaisons des actions compatibles ou incompatibles » [Gons1945-55] §112.

En guise de conclusion et de transition, nous souhaiterions évoquer une connexion avec Bergson. Le travail de Gonseth nous paraît en effet vingt-neuf ans après restituer toute la chair de ces deux passages évasifs de *L'évolution créatrice* :

> antérieurement à la géométrie savante, il y a une géométrie naturelle dont la clarté et l'évidence dépassent celles des autres déductions. [Berg1907] p. 212
>
> Logique et géométrie s'engendrent réciproquement l'une l'autre [...]. C'est de l'extension d'une certaine géométrie naturelle, suggérée par les propriétés générales et immédiatement aperçues des solides, que la logique naturelle est sortie. C'est de cette logique naturelle, à son tour, qu'est sortie la géométrie scientifique, qui étend infiniment la connaissance des propriétés extérieures des solides. [Berg1907] p. 162

La « géométrie scientifique » de la dernière phrase citée nous paraît être une connaissance qui ne ressort plus de la sphère intuitive. C'est l'occasion de présenter les autres sphères gonsethéennes : l'abstraite et la logique – *alias* l'idéale et la formalisable.

2 Les axiomatisations successives

2.1 La sphère idéale

Le matériau intuitif dont nous venons de parler peut être amené à subir une *idéalisation*, une *abstraction*. L'acte idéalisant et abstrayant est d'une nature toute singulière et propre à chacun. Ainsi l'écolier qui idéalise l'arête d'un cube ou le faîte d'un toît, créant ainsi son abstrait "segment" :

> Le maître propose à l'élève certaines « réalisations physiques » : le faîte d'un toit, l'arête d'une règle à dessiner, ou encore la trajectoire d'un rayon lumineux, la ligne de visée ; et il lui demande d'y apercevoir la notion à définir. Il exige de savoir distinguer dans chacun de ces exemples concrets une chose idéale qu'ils ont en commun : *la droite géométrique.*
>
> [...]
>
> En un mot, il exige de l'élève un acte de véritable création mentale, dont il faut se garder de diminuer l'importance. Remarquons bien que ce passage de la notion intuitive : la ligne de visée, à la notion idéale : la droite, est quelque chose de tout à fait indescriptible. Une fois qu'on l'a conçu, il peut être évoqué. Mais notre pouvoir d'explication s'arrête là. Il y a là un fait d'une essence tout à fait *sui generis.* §24

À titre de témoignage, relatons notre expérience personnelle en la matière. Cours de 6^{e} ou 5^{e} avec Mme Riou qui nous explique la différence entre *un* diamètre et *le* diamètre d'un cercle et qui finit par préciser qu'il a y une *infinité* de diamètres. Nous sommes surpris du haut de nos dix ans : quand l'on trace un diamètre, mettons vertical, nous pouvons tracer le *prochain* diamètre dans le sens horaire (dont le coin haut-gauche coïncide avec celui haut-droit du premier), en itérant on finira bien par faire le tour, tel un escalier de planchettes Kapla. Et notre professeure de nous répondre qu'en géométrie les lignes sont infiniment fines – nous venions alors d'idéaliser la droite.

Les idéaux ainsi conçus sont une création de l'individu et non une réalisation d'une "idée" absolue résidant figée dans quelques cieux platoniciens. Il n'est donc pas question pour Gonseth de métaphysique première concernant la "réalité" mathématique. Bergson nous avait déjà mis en garde :

> Artistes à jamais admirables, les Grecs ont créé un type de vérité suprasensible, comme de beauté sensible, dont il est difficile de ne pas subir l'attrait. **Dès qu'on incline à faire de la métaphysique une systématisation de la science, on glisse dans la direction de Platon et d'Aristote. Et, une fois entré dans la zone d'attraction où cheminent les philosophes grecs, on est entraîné dans leur orbite**. [Berg1907] p. 346

C'est dans cette sphère idéale que travaille naïvement le mathématicien. Nous y retrouverons ainsi abstraites les notions arithmétiques, géométriques et logiques. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler à quel point les sphères intuitives et idéales sont étrangères l'une à l'autre :

> il y a entre la logique enrobée dans les relations entre objets physiques ou mathématiques et la logique pure le même hiatus essentiel qu'entre la géométrie réalisée dans les corps matériels et la géométrie pure, science rationnelle : **l'hiatus même où se marque l'opposition du concret à l'abstrait qui en est né**. §111

L'objectivité des notions idéales demeure toutefois problématique : rien d'autre ne semble donner accès à ce monde idéal que ce « moment où se fait le saut du signe à ce qu'il dénote »[17], moment on ne peut plus subjectif. Ainsi les notions de vérité et de fausseté :

> Le vrai et le faux sont naturellement indéfinissables : tout ce qu'on peut faire, c'est d'expliquer comment des notions de cette espèce peuvent venir doubler le concret dont elles sont sorties. [...] Pour ce qui nous concerne, c'est spécialement par l'intermédiaire des lois de l'objet que nous voyons s'introduire l'idée du vrai. [...] elles sont pratiquement infaillibles dans leur domaine naturel de validité. Par une pente qui lui est, semble-t-il, naturelle, l'esprit imagine une infaillibilité absolue, une adéquation sans réserves à des réalités déterminées une fois pour toutes jusque dans leur essence... et en fait les attributs d'une vérité idéale. C'est alors *elle* qu'il voit réalisée, plus ou moins parfaitement, dans tous les cas concrets. §82

Le mythe de ce monde idéal auquel s'appliquerait la vérité idéale est également dénoncé :

> Ce qui est précritique, ce n'est pas la notion [du Vrai abstrait] en elle-même, pourvu qu'on ne se méprenne pas sur sa nature. Ce qui est précritique, c'est d'imaginer qu'il y ait une réalité préformée à laquelle elle est adéquate. §83

La vérité concernant les notions idéales fait l'objet d'*axiomes*, d'où le nom de « première **axiomatisation** » que Gonseth donnera à l'idéalisation. On retrouve par exemple dans [Gons1936] des axiomes peaniens concernant les nombres, certains axiomes hilbertiens portant sur les points et droites, ainsi que les axiomes de la logique propositionnelle dont nous avons déjà mentionné trois exemples.

[17] [Witt1930] 26

La "saisie" de cette vérité ainsi que son sens même sont néanmoins tout aussi problématiques que la saisie des objets idéaux. Gonseth ne fera pas mieux que de qualifier les liaisons entre les abstraits de *sui generis* (§36). Comment dans ces conditions prétendre à l'universalité de la mathématique ? Ces liaisons sont bien sûr abstraites de liaisons intuitives entre les objet intuitifs dont ont été idéalisés les objets abstraits mais cette analogie nous semble inapte à légitimer le sens même d'une vérité dans ce monde idéal. Encore une fois, le vrai traditionnel ne vient pas se réaliser dans la sphère intuitive et ses idéalisations successives, c'est le vrai intuitif qui suggère une idée de "vérité idéale" :

> La dégradation du vrai est un fait accompli. (§149)

Au-delà de cette aporie concernant l'*objectivité* de la sphère idéale, il convient de souligner le mérite de Gonseth d'avoir longuement développé sa genèse *subjective* en décrivant les faits d'expériences des domaines arithmétiques, géométriques[18] et logiques qui viendront pour chacun suggérer autant de "vérités" idéales. L'individu peut donc continuer à vivre "son" monde idéal, ce dernier n'est point à reléguer aux oubliettes – il est vivant ! Cette vivance doit cependant voir abandonner l'objectivité des idéaux.

2.2 La sphère logique

Gonseth donne (§25) d'autres idéalisations d'un certain géométrique (par exemple : des cercles en un point O fixé, appelés "droites", la distance entre deux points A et B d'une telle "droite" se définissant par $\cot \frac{\widehat{BO}}{2} - \cot \frac{\widehat{AO}}{2}$), qui conduisent toutes à des modèles isométriques (au modèle euclidien). Lorsque l'on oublie les objets géométriques pour ne regarder que les "catégories" qu'ils constituent (points, droites) et les "relations" qu'ils peuvent vérifier (incidence, concourance...), on passe à un nouveau stade où les axiomes sont explicités à l'aide de ces catégories et de relations uniquement. Le passage à cette structure *logique* (au sens : indépendante du sens des objets) consacre la *deuxième* axiomatisation :

> D'images fondées dans l'intuition spatiale, [**les notions fondamentales**, la droite, le point, etc.,] **doivent tomber (ou monter !) au rang de choses logiques, c'est-à-dire de choses dont seules les relations logiques avec d'autres objets de même nature doivent être retenues**. §25
>
> **l'introduction des relations logiques n'est pas autre chose qu'une nouvelle schématisation axiomatique**. Pour passer du géométrique au logique, il faut franchir un nouveau seuil d'axiomatisation. Tout à l'heure, le géométrique était un abstrait par rapport à l'intuitif. Maintenant c'est un concret par rapport au logique. Abstraction il y a un instant, c'est maintenant une réalisation d'un abstrait plus subtil. §26

[18] par exemple le §39 de [Gons1945-55]

Notons par prévention qu'à ce stade il n'est pas explicitement question de logique purement *formelle*. Quand bien même GONSETH aurait ici cette dernière en tête (et l'émergence des catégories, troisième axiomatisation, semble le démentir), il utilise le terme "logique" dans l'acception courante, qu'il entreprend justement de démystifier.

Le "logique" gonsethéen, issu d'une double abstraction, est donc un *formalisable*.

2.3 Le formalisable

Nous avons déjà évoqué ce qui légitimait le jeu symbolique : la forme intuitive *type* (pour reconnaître les symboles), une combinatoire intuitive (celle des symboles) et une vérité intuitive. Observer que cette dernière est la vérité traditionnellement dite "métamathématique". GONSETH restitue ainsi l'ordre génétique : il n'y a pas *d'abord les mathématiques "platoniciennes"* au-dessus desquelles nous formulerions *a posteriori* une vérité méta-mathématique, il y a simplement et premièrement une vérité intuitive régissant une proto-physique ; d'une part cette vérité "primitive" donnera naissance par abstraction à une "vérité" dans la sphère idéale ("vérité" qui n'en porte plus que le nom), d'autre part cette physique intuitive inclut la combinatoire constituant tout formalisme axiomatique.

Les mérites de la démarche formelle axiomatique ne sont plus à démontrer depuis HILBERT. Dans le troisième tome de [Gons1945-55], GONSETH s'adonne lui-même à une axiomatisation de la géométrie euclidienne ; dans le cinquième, à une de l'hyperbolique ; dans le sixième et dernier, à une (autre) de l'hyperbolique et à une de la sphérique. Ainsi se libère, se développe et à la fois se précise l'idée d'espace. Ainsi la formalisation *effective* du formalisable constitue-t-elle le contre-marteau aux idéaux abstraits du marteau intuitif, la sphère idéale revêtant tantôt un caractère abstrait (vis-à-vis de la sphère intuitive), tantôt un caractère concret (vis-à-vis de la sphère logique). Il convient d'observer que ce qui fait tourner la sphère logique ressort *in fine* de la sphère intuitive.

3 La schématisation

3.1 Schéma, horizon de réalité & horizon de connaissance

GONSETH voit dans le formalisme axiomatique l'exemple d'un *schéma* dont la signification est celle des idéaux axiomatisés. Il parlera quant à ces derniers de « signification antérieure » (pour rappeler que le schéma schématise quelque chose) et plus généralement de « **signification extérieure** » (à distinguer de la forme *intrinsèque*, de l'*objet*-schéma), cette dernière étant définie[19] comme « la réalité qu[e le schéma] a fonction de saisir, en la schématisant ».

[19] [Gons1945-55], §105

L'exemple de la carte d'une forêt[20] est typique : la forme intrinsèque du schéma est une feuille de papier sur laquelle l'on dépose de l'encre, sa signification extérieure est la forêt schématisée. Les principales caractéristiques du schéma[21] sont les suivantes :

> a) **Il ne fournit qu'une description sommaire**. [...] Rien que ceci :
> Tout arbre, quelle que soit sa forme, et sa nature, est désigné par un point ;
> b) **Il pourrait être complété** (il est encore en devenir) !
> [...]
> c) **Il possède une structure propre**, intrinsèque.
> [...]
> d) Le schéma possède enfin **une signification extérieure**. §94

En terme de schémas, l'axiomatisation sera ainsi, pour Gonseth, « l'acte mental qui aboutit à la création du *schéma abstrait* » (§29) ou encore « *la constitution de tout schéma abstrait* [...] *en correspondance avec une certaine signification extérieure* » ([Gons1937] §43). Axiomatiser devient alors *former un schéma mental*, au même sens que se sont construites nos notions intuitives[22] :

> *la constitution d'un système axiomatique revient à la construction d'un schéma mental* ad hoc.
> *[...] La formation des notions intuitives peut être envisagée comme une pré-axiomatisation, dans laquelle,* mutandis mutatis*, tous les caractères de l'axiomatisation mathématique peuvent être identifiés.*
> *Cette dernière à son tour fournit la méthode-type selon laquelle se constituent les schémas abstraits*[23]*.* §96

Le préfixe "pré" cache un fait important : les schémas que sont nos notions intuitives *ne schématisent aucune réalité préformée*[24] – ce n'est que répéter le §16 sous un jour nouveau. Nous pensons trouver une excellente illustration de cette pré-schématisation dans le film *Inside out*[25] : les personnages-émotions qui "vivent" dans l'esprit de Riley n'ont de la réalité de leur hôte que l'écran (schéma) situé dans leurs quartiers généraux.

La conclusion – frappante – à tirer de ce fait est que *le schéma constitue sa **propre** signification extérieure*. La réalité s'explore et se *construit* donc, pour Gonseth, *par schématisations successives*. Chaque halte dans cette exploration fournit un certain regard sur cette réalité, un certain *horizon de réalité*, que Gonseth nomme également horizon *de connaissance* – puisque connaître *est* schématiser :

[20] §93, repris le quatrième tome de [Gons1945-55]

[21] **Sommaire, symbolique, inachevé, ce sont les caractères essentiels de tout schéma**. [Gons1937] §42

[22] En résumé : *Les représentations intuitives ne sont que des images schématiques conformes à nos fins. La connaissance* a priori *n'est qu'un ensemble, orienté, ordonné, structuré, de « vues sommaires ».* En plus bref encore : *L'intuition n'est que connaissance schématique, donc sommaire.* [Gons1937] §44

[23] Nous nous faisions par conséquence une idée trop simple du **processus de l'abstraction** ; il **doit être dédoublé en une *préaxiomatisation* inconsciente dont les représentations intuitives sont le terme**, et dans laquelle, *mutatis mutandis*, tous les caractères de l'axiomatisation se retrouvent ; **et en une reprise consciente du même acte mental, dont le point de départ est dans les représentation intuitives**. [Gons1937] §45

[24] la connaissance usuelle est de prime abord engagée dans un préjugé réaliste dont on n'imagine pas que la limite soit si facile à franchir. [Gons1945-55] §106

[25] Pixar, 2015

> le schéma [...] n'est [...] **ni antérieur ni postérieur à la connaissance de la signification extérieure ; il est l'un des éléments constitutifs de cette connaissance. La constitution du schéma est le moyen par lequel la réalité qu'il saisit prend pour nous sa structure**. Schéma et signification extérieure ne sont alors séparables que par le jeu de deux intentions opposées : celle de nous affirmer en face des choses et celle d'affirmer les choses en face de nous. [Gons1945-55] §106

Ainsi les idéalités mathématiques seront-elles *formées* par autant de formalismes axiomatiques prétendant les "saisir". Cette conception de la réalité mathématique nous paraît faire écho avec celle de M. CAVEING :

> nous entendons par « idéalité » : un « être » qui n'est jamais offert par sa simple présence, mais **par la médiation du système réglé des désignations qui permettent d'en disposer**. [Cave2001] p.77

3.2 Concordance schématique, principe d'analogie

L'intérêt du schéma – celui du technicien comme celui de la forêt – consiste en une certaine *correspondance* entre des liaisons constatées (dans la sphère intuitive) entre des éléments de l'objet-schéma et la réalité schématisée, tel dépôt continu d'encre sur le papier signifiant par exemple l'étanchéité d'un composant ou bien l'infranchissabilité d'un passage sylvestre. Cette *correspondance schématique*, que GONSETH nomme aussi *principe d'analogie*, est problématique : comment la *légitimer* ?

> Un fait tient du miracle, dira-t-on. C'est que la technique mise en œuvre dans un schéma disjoint de sa signification extérieure reste en parallèle avec les opérations que l'on effectue dans cette signification extérieure. Ce fait est certainement capital car c'est qui fait tout l'intérêt et qui commande toute l'utilisation du schéma. [Gons1945-55] §107

À travers la parabole du roi nègre (§37) qui fit construire un double pour chacun de ses soldats et joua ensuite dans la « Maison des Doubles » avec ces figures afin de préparer au mieux ses campagnes guerrières, la réponse gonsethéenne est frappante de simplicité :

> La justification de nos modèles explicatifs peut maintenant être faite sans longs détours. Celle du jeu des « Doubles » nous servira de modèle analogique !
>
> « Notre roi ne fut jamais trompé par ce qu'**il avait su établir** entre ses guerriers et leurs double **une analogie authentique**. » §129

Il y a de quoi rester sur notre faim. GONSETH ne sera pas plus loquace quatorze ans plus dans *La géométrie et le problème de l'espace* : il y sera toutefois parfaitement clair sur le non-sens à chercher une explication de cette légitimité :

« **De quel genre d'explication parlez-vous ?** Pensez-vous que toute soit explicable ; qu'on puisse donner de tout des raisons nécessaires et suffisantes ? Voulez-vous dire qu'une explication véritable est une explication définitive qui ne laisse plus aucune ombre derrière elle ? **Pour vous l'explication ne devrait-elle pas être, pour être entièrement valable, la réduction d'un donné opaque à une situation rationnellement claire ? »**

« Mais où prenez-vous qu'il existe toujours, et même qu'il existe parfois, des explications de ce genre ? Pour nous et pour ce qui nous occupe ici, nous estimons qu'il n'en existe pas ! »

[...] Au point où nous en sommes, **la possibilité d'une concordance schématique est un fait d'expérience**. [Gons1945-55] §107

Nous voyons dans la conclusion finale une *réhabilitation* et un *renouveau humiens* : l'habitude humienne nous paraît fonder le pragmatiquement assuré gonsethéen, dépassant ainsi ce pour quoi elle était désignée à l'origine (démystifier la *nécessité*). Il n'est pas ici question d'un lever de soleil mais du succès d'une démarche[26] – que cela change-t-il donc ? En quoi l'expérience – la nôtre ou celle d'autrui –, l'habitude, ne jugeraient-elles pas *in fine* de la confiance à accorder à certains guides de notre vie, que ces derniers soient simples prédictions événementielles ou vérités profondes sur la connaissance ou la vie ? « *Cette réponse [...] marque un moment essentiel de notre exposé* », écrivait Gonseth au §127. Nous ne saurions trop renchérir !

La force de l'habitude doit par conséquent être réhabilitée

et pleinement exploitée pour établir notre connaissance.

En particulier, le fait que notre connaissance fonctionne pratiquement en se fondant sur l'habitude *est lui-même une habitude* dont l'on doit tirer les conséquences ! Ainsi l'idonéité de l'idonéisme gonsethéen.

3.3 L'idonéisme de Gonseth (back to Hume)

La validité de la concordance schématique est un exemple typique de doctrine préalable (à la connaissance). Or, pour Gonseth, une telle doctrine « ne se justifie pas d'elle-même au préalable. Elle se révèle **idoine** par ses incidences et par ses conséquences »[27]. La légitimation de quelque croyance première que ce soit pourra donc s'établir si ces croyances possèdent quelque caractère *idoine*[28] – mais comment procéder autrement ? « La philosophie de l'idoine n'est-elle pas la philosophie du simple bon sens ? »[29] Il serait en effet insensé de chercher une vérité idéale dans les profondeurs métaphysiques, une telle vérité ayant été déchue par Gonseth. Nous ne sommes pas pour autant laissés dans l'obscurité : à défaut de pouvoir atteindre quelque vérité nécessaire, *l'habitude et la répétition* humiennes fondent la démarche *idonéiste*[30]. Et c'est sans cercle vicieux que nous pouvons affirmer l'*idonéité* d'une telle démarche, assurément en devenir :

[26] En vertu d'une sélection naturelle, **déterminée précisément par les progrès réalisés** dans cette double voie de la compréhension théorique et de l'application, et parallèlement à l'observation des faits, les idées, les lois, les conceptions se succèdent, tantôt ne se prêtant qu'à une courte apparition, tantôt, au contraire, devant aux facilités qu'elles créent de sembler définitives. [Milh1898] p. 202

[27] [Gons1945-55] §18

[28] [le mot « **idoine** »] signifie *qui convient, qui est conforme aux fins et aux intentions, approprié à sa fonction*, etc. [Gons1945-55] §19

[29] [Gons1945-55] §22

[30] Lorsque nous exigeons des preuves, nous ne parlons pas de preuves en un sens absolu, mais de **la preuve** au sens courant de la science ; **au sens dont la science a montré le bien-fondé**. [Gons1945-55] p. 582

« Si tu ne connais le vrai,
L'idoine il te faut chercher. ».

[...]

Par mesure idoine,
J'édicte le décret qui suit :
Si tu ne connais le vrai,
L'idoine il te faut chercher. [Gons1945-55] §21

> [le principe d'idonéité] introduit une solution ouverte : la doctrine préalable doit rester révisable, puisqu'on ne connaît pas d'avance les caractères qui la rendraient pleinement efficace ; sa justesse se reconnaît à l'emploi. *Elle est légitime dans la mesure où elle se révèle idoine.* [Gons1945-55] rappels du chapitre 1

L'essence de la philosophie humienne, qui réside au fondement de la démarche idoine de GONSETH, nous paraît être tout entière contenue dans cette remarque wittgensteinienne extraite de *De la certitude* :

> Il arrive un moment où il nous faut passer de l'explication à la simple description. [Witt1949-51] 189

Ce serait cependant oublier de la philosophie gonsethéenne l'aspect *schématisation*. Si GONSETH a titré [Gons1936] *Les mathématique et la réalité – Essai sur la méthode axiomatique*, c'est bien parce que les mathématiques fournissent à travers l'axiomatisation le mode même d'appréhension de la réalité :

> SCEPTIQUE ET PARFAIT[31]. [...] **l'idée directrice de votre tentative est simple : concevoir tout d'abord les rapports de l'abstrait et du concret sur l'exemple privilégié des mathématiques et de leurs applications ; étendre ensuite cette conception à tous les ordre de la pensé**e. [...]
> IDOINE. [...] mon **idonéisme**[32] §150

Et, si GONSETH a passé dix années à écrire *La géométrie et le problème de l'espace*, c'est bien parce qu'à ses yeux la géométrie était l'archétype de la connaissance[33] :

> quelque intérêt que puisse présenter pour un mathématicien une réintégration du géométrique dans son autonomie, et une appréciation renouvelée de la rigueur des considérations dites intuitives, ce n'est pas dans cette direction que nous apercevons le gain véritable de **notre analyse**. Celle-ci **a pour nous la valeur d'un exemple-type. Dans les rapports du géométrique à l'intuitif et au logique nous apercevons l'image même des rapports du concret et de l'abstrait, l'image qui se reflète dans chacune des faces que nous présente le processus de la superposition des schémas dans la construction progressive de la réalité**. §30

[31] le livre suit l'évolution de trois personnages qui se mettent occasionnellement à dialoguer : Parfait le platonicien, Sceptique l'anti-philosophie et Idoine le gonsethéen.

[32] en gras dans le texte

[33] Le progrès de la connaissance physique nous révèle l'un des caractères fondamentaux de notre vision intuitive ou de notre reconstruction théorique des formes étendues : **il existe entre ces formes et les réalités qu'elle prétendent saisir une différence analogue à celle qui sépare un schéma de la chose schématisée**. Nous pouvions l'ignorer, tant que les mesures restaient à notre échelle ; la chose devient patente aux échelles atomiques. Va-t-on de ce fait conclure que les moyens que la géométrie nous offre ne conviennent pas à l'investigation du monde réel ? Nous sommes dans l'incapacité d'y renoncer. Le problème qui se pose n'est pas de remplacer la géométrie par quelque chose dont nous n'avons encore aucune idée. C'est au contraire, ayant accepté le fait tel qu'il est, d'en tirer les conséquences quant à l'idée que nous nous faisons de nos propres facultés de connaissance. L'aide que la géométrie nous prête à ce moment, c'est d'être un irrécusable modèle d'un mode de connaissance qui est nôtre comme le sont nôtres les organes de nos sens. Le seul parti raisonnable est par conséquent de passer à l'élaboration d'**une théorie de la connaissance schématique**, en s'appuyant sur l'exemple de la géométrie. [Gons1945-55] p. 611

Que dégagerons-nous de ce travail écrit sur presque dix années ? De nombreux recoupements avec [Gons1936] :

♠ Le *mythe du fondement*, destituant l'évidence, ou plutôt la *re*situant dans une *sphère intuitive*, mythe témoin d'une *vivance* et d'une *idonéité* de la pratique connaissante ainsi que d'une *évolutivité* de ses concepts.

♣ La construction (héritée de [Gons1936]) de la réalité, de la connaissance, se trouve également précisée : elle s'effectue *par horizons*, donnés chacun par un *schéma*, le mode constitutif de ce dernier étant légitimé par le *principe* – éprouvé – *de concordance schématique.*

Gonseth parlait d'un « moment de *création* » et de « l'*évolution* des conceptions scientifiques »[34]. Ce serait sans doute, dans ce contexte, dévoyer sa pensée que d'associer ces deux mots soulignés et d'évoquer ainsi une *évolution créatrice*. Pourtant, le caractère « *en devenir* », le principe d'*analogie*, le fondement dans l'*action* et le « *pragmatiquement* assuré », voire le recours à *quelque certitude* que jamais l'empirie ne vint renverser, tout cela nous sembler rendre plausible un pont vers l'auteur de *L'évolution créatrice* et légitimer la pensée d'*une science ancrée dans le vivant*. Ce serait l'objet d'un travail qui ne peut trouver sa place dans ce mémoire.

Nous présenterons à défaut certains ponts que permet d'ériger selon nous la philosophie idoine de Ferdinand Gonseth.

4 Apports personnels

4.1 Gonseth, Hume, Duhem et Poincaré

Dans cette première section plus personnelle, nous voudrions mettre en regard :

1. d'une part l'*idonéisme* de Gonseth avec le *commodisme* de Poincaré (both founded by Hume's custom) ;
2. d'autre part la *schématisation gonsethéenne* de la réalité avec la *modélisation duhemienne* de la réalité physique par la mathématique.

Duhem introduit en effet dans *La théorie physique – son objet, sa structure* la scission entre *le monde physique* prétendument décrit par les lois et *ce que les lois mathématiques peuvent effectivement décrire* :

> *si les théories physiques ont pour objet d'expliquer les lois expérimentales, la Physique théorique n'est pas une science autonome ; elle est subordonnée à la Métaphysique.* [Duhe1906] p. 31
>
> *Une Théorie physique n'est pas une explication. C'est un système de proposition mathématiques, déduites d'un petit nombre de principes, qui ont pour but de représenter aussi simplement, aussi complètement et aussi exactement que possible, un ensemble de lois expérimentales.* [Duhe1906] p. 44
>
> Lorsqu'on analyse une théorie créée par un physicien qui se propose d'expliquer les apparences sensibles, on ne tarde pas, en général, à reconnaître que cette théorie est formée de deux

[34] [Gons1945-55] p. 584

> parties bien distinctes ; l'une est la partie simplement représentative qui se propose de classer les lois ; l'autre est la partie explicative qui se propose, au-dessous des phénomènes, de saisir la réalité. [Duhe1906] p. 60

Ces premières citations donnent le ton : il y a d'un côté *les phénomènes physiques* qui nous intéressent, de l'autre *la mathématique* qui les "code", qui les "modélise". Le reste n'est qu'ingérence métaphysique :

> La Physique théorique ne saisit pas la réalité des choses ; elle se borne à représenter les apparences sensibles par des signes, par des symboles. [Duhe1906] p. 168
>
> à son point de départ, comme à son point d'arrivée, **le développement mathématique d'une théorie physique ne peut se souder aux faits observables que par une traduction**. [Duhe1906] p. 190
>
> *Une expérience de Physique est l'observation précise d'un groupe de phénomènes accompagnée de l'*INTERPRÉTATION *de ces phénomènes ; cette interprétation substitue aux données concrètes réellement recueillies par l'observation des représentations abstraites et symboliques qui leur correspondent en vertu des théories admises par l'observateur.* [Duhe1906] p. 209

Pourquoi avoir choisi la mathématique comme domaine modélisant ? Parce qu'elle est le domaine *discursif* dont – tout le travail de [Gons1936] le justifie – la *validité* est *optimale* : si l'on veut assurer un discours rationnel, une démonstration, c'est assurément en mathématique qu'il faut chercher à s'exprimer. (Ce point est indépendant de la scission physique-mathématique opérée par DUHEM mais trouve ici particulièrement sa place, le rôle de la mathématique ayant été clairement mis à jour dans [Duhe1906].)

Comme l'explicite BERGSON[35], une autre raison à la pertinence – osons le mot : l'idonéité ! – de la mathématique comme langage des lois naturelles est son caractère *unifiant*, sa pluri-interprétabilité, résultant directement de son caractère *formel*. C'est ainsi que POINCARÉ nous explique comment plusieurs phénomènes d'apparence très éloignés peuvent être interprétés dans une *même* loi :

> Le troisième exemple va nous montrer comment **nous pouvons apercevoir des analogies mathématiques entre des phénomènes qui n'ont physiquement aucun rapport** ni apparent, ni réel, de telle sorte que les lois de l'un de ces phénomènes nous aident à deviner celles de l'autre.
>
> Une même équation, celle de Laplace, se rencontre dans la théorie de l'attraction newtonienne, dans celle du mouvement des planètes, dans celle du mouvement des liquides, dans celle du potentiel électrique, dans celle du magnétisme, dans celle de la propagation de la chaleur et dans bien d'autres encore.
>
> Qu'en résulte-t-il ? **Ces théories semblent des images calquées l'une sur l'autre ; elles s'éclairent mutuellement, en s'empruntant leur langage** ; demandez aux électriciens s'ils ne se félicitent pas d'avoir inventé le mot de flux de force, suggéré par l'hydrodynamique et la théorie de la chaleur.
>
> Ainsi **les analogies mathématiques**, non seulement **peuvent nous faire pressentir les analogies physiques**, mais encore ne cessent pas d'être utiles, quand ces dernières font défaut.
>
> En résumé **le but de la physique mathématique** n'est pas seulement de faciliter au physicien le calcul numérique de certaines constantes ou l'intégration de certaines équations différentielles.

[35] cette connaissance toute *formelle* de l'intelligence a sur la connaissance *matérielle* de l'instinct un incalculable avantage. **Une forme, justement parce qu'elle est vide, peut être remplie tour à tour par un nombre indéfini de choses, même par celles qui ne servent à rien. De sorte qu'une connaissance formelle ne se limite pas à ce qui est pratiquement utile, encore que ce soit en vue de l'utilité pratique qu'elle a fait son apparition dans le monde**. Un être intelligent porte en lui de quoi se dépasser lui-même. [Berg1907] p. 152

> Il est encore, il **est surtout de lui faire connaître l'harmonie cachée des choses en les lui faisant voir d'une nouveau biais**. [Poin1905] p. 108

Revenons à cette scission physique-mathématique duhemienne. On peut grâce à elle démystifier le concept de *vérité* physique, de vérité d'un ensemble de lois (*i. e.* d'une théorie), tout particulièrement quand les deux théories sont irréconciliables. Ici DUHEM rejoint selon nous GONSETH pour qui « La dégradation du vrai est un fait accompli » (§149) :

> une théorie *vraie*, ce n'est pas une théorie qui donne, des apparences physiques, une explication conforme à la réalité ; c'est une théorie qui représente d'une manière satisfaisante un ensemble de lois expérimentales ; une théorie *fausse*, ce n'est pas une tentative d'explication fondée sur des suppositions contraires à la réalité ; c'est un ensemble de propositions qui ne concordent pas avec les lois expérimentales. [Duhe1906] p. 45

> Quand un physicien constate une contradiction entre deux théories qui lui sont également chères, il dit quelquefois : Ne nous inquiétons pas de cela mais tenons fermement les deux bouts de la chaîne bien que les anneaux intermédiaires nous soient cachés. Cet argument de théologien embarrassé serait ridicule si l'on devait attribuer aux théories physiques le sens que leur donnent les gens du monde. En cas de contradiction, l'une d'elles au moins devrait alors être regardée comme fausse. Il n'en est plus de même si l'on y cherche seulement ce qu'on y doit chercher. **Il peut se faire qu'elles expriment l'une et l'autre des rapports vrais et qu'il n'y ait de contradiction que dans les images dont nous avons habillé la réalité**. [Poin1902] p. 175

DUHEM relève à ce sujet *l'impertinence des querelles métaphysiques*, rejoignant à nos yeux *le non-fondement des doctrines préalables*[36] que dénonce GONSETH :

> Philosophe plus profond que Laplace, Ampère voit avec une parfaite clarté **l'avantage qu'il y a à rendre une théorie physique indépendante de toute explication métaphysique ; par là, en effet, on la soustrait aux querelles qui divisent les diverses écoles cosmologiques** ; on la rend acceptable, en même temps, à des esprits qui professent des opinions philosophiques incompatibles [Duhe1906] p. 84

> Que de discussions scientifiques où chacun des deux tenants prétend écraser son adversaire sous le témoignage irrécusable des faits ! On s'oppose l'un à l'autre dans des observations contradictoires. **La contradiction n'est pas dans la réalité, toujours d'accord avec elle-même ; elle est entre les théories par lesquelles chacun des deux champions exprime cette réalité**. [Duhe1906] p. 226

Ainsi tombe le mythe de la causalité physique, qui est d'une part renvoyée à la nécessité mathématique des lois (or GONSETH nous a révélé la *déchéance* de cette nécessité idéale), d'autre part filtrée et altérée par la traduction de ces lois et de leurs conséquences dans le monde physique (la valeur de cette traduction ne pouvant se révéler qu'à travers son caractère *idoine*).

Poussant cette conception plus loin, DUHEM titre un autre de ses ouvrages *Sauver les apparences* [Duhe1908]. La valeur d'une modélisation ne se mesure qu'à sa capacité à s'interpréter près des faits, aussi complexe soit cette modélisation mathématique. Si la théorie nous dit que le Soleil tourne autour de la Terre, il faudra certainement

[36] Ce point est crucial pour l'enseignement car il en résulte un grand soulagement pour l'esprit vierge qui se sentirait opprimé par de telles disputes.

la complexifier grandement pour qu'elle colle aux observations mais nous ne devons pas nous sentir moins engagés dans son interprétation que si l'on avait dit que la Terre tournait autour du Soleil. Certainement cette dernière modélisation est-elle plus *commode* (pour citer POINCARÉ) mais elle n'est pas plus ou moins vraie (ce qui n'aurait aucun sens). C'est en ce sens duhemien (et humien) que nous pensons que le caractère *commode* d'une théorie scientifique n'est qu'autre que son caractère *idoine* :

> La grande découverte de David Hume (1711-1776) consiste à remarquer que **la relation entre la cause et l'effet n'est pas directement observable et** qu'elle **n'exprime rien d'autre que la succession régulière**. Cette découverte épistémologique fondamentale a conduit les grands physiciens Gustav Kirchhoff (1842-1887), Ernst Mach (1838-1916), et bien d'autres, à affirmer que **la science de la nature ne fournit aucune explication, mais qu'elle vise seulement à obtenir une description complète et économique** (Mach) **des faits observés, et qu'elle ne peut au demeurant rien atteindre de plus**. [Schr1948] p. 86

> Newton dit que, par cela seul qu'un homme se livre à la recherche des causes premières, il prouve qu'il n'est pas un homme de science. [...] la forme apparente de cette cause première, [...] nous ne devons jamais la regarder [...] que comme **une convention de langage susceptible d'être modifiée avec les progrès de la science**. [Bern1947] p. 196-197

Résumons ce qui précède :

• La mathématique a émergé *idoinement* de la sphère *intuitive* comme *discours rationnel optimal.*

• Le caractère *schématisant* de la mathématique la rend singulièrement *apte à unifier.*

• La "réalité" physique est *modélisée* par la "réalité" mathématique, *abandonnant les querelles métaphysiques* aux frontières du continent mathématique.

• C'est l'*idonéité* (et non la vérité) des modélisations que juge *l'expérience* de leur utilisation.

Nous ne pouvons résister à citer l'admirable synthèse de MILHAUD (tant d'années avant GONSETH et DUHEM !) :

> A mesure que l'observation et l'expérimentation des faits se poursuivent et se perfectionnent, l'esprit s'efforce d'en dégager des notions, des lois, des formules, des théories, qui lui permettent de constituer la science, c'est-à-dire d'**interpréter les faits sous une forme compréhensible**, qui substitue l'unité à la multiplicité, l'ordre au désordre, le lien, le rapport, à la diversité brutale, la constance au perpétuel changement. Cette interprétation en **un langage forgé par l'esprit au contact des choses**, et inspiré, suggéré par elles, lui permet d'ailleurs non seulement de comprendre, **en** les **reliant** entre eux, **les phénomènes** dont la trame complexe forme la réalité, mais encore de **les prévoir**, et, par la suite, aussi de **les utiliser** de mieux en mieux. En vertu d'une **sélection naturelle, déterminée précisément par les progrès réalisés** dans cette double voie de la compréhension théorique et de l'application, et parallèlement à l'observation des faits, les idées, les lois, les conceptions se succèdent, tantôt ne se prêtant qu'à une courte apparition, tantôt, au contraire, devant aux facilités qu'elles créent de sembler définitives. **Ainsi se réalise** dans les voies parallèles de l'expérience et de l'idée, **un double progrès indéfini**, ainsi se forme et se formera indéfiniment la science. [Milh1898] p. 201-202

4.2 Applications de l'idonéisme et ouvertures

Notre travail visait à démystifier, à lever le voile. Voyons quelques exemples.

Le langage[37]. Le sens de nos mots "concrets" est ancré dans le vécu sensible de notre sphère intuitive : perception d'un objet, sensation d'une qualité, vécu d'un acte. L'analogie, la similarité et notre vivance permettent ensuite de reconnaître et d'étendre leurs "classes de dénotation" (ouvertes car en devenir) et d'en édifier le sens abstrait – en toute *subjectivité*. Ce qui nous met d'accord, c'est notre *usage*[38] des mots.

En physique.

La vérité d'une théorie physique. Une théorie physique est une théorie *mathématique*, laquelle est plus ou moins *commode* (POINCARÉ), *éclairante*, *puissante* (GÖDEL (cité plus bas)), *idoine*, *convenable* (GONSETH), *pertinente*, *adéquate*, selon qu'elle s'interprète bien dans, qu'elle modélise bien le réel. Sa vérité n'a aucun autre sens.

La causalité. Que ce soit notre pensée ou notre formalisme, aucun n'a droit de cité à contraindre le réel. Si une théorie est idoine, on le constatera et ce sera l'*habitude* de cette constatation qui fondera notre confiance en la démarche théorique – plus spécifiquement, en le principe de schématisation.

L'objet, la réalité. L'objet est un *préjugé macroscopique* hérité de notre forme intuitive "objet", originellement extrêmement bien adaptée aux fins de notre action. Garder ce préjugé lorsqu'on explore l'abstrait et affinons ainsi notre construction/connaissance de la réalité est une entrave à notre intelligence. De là tous les blocages métaphysiques aux grande et petite échelles.

Le temps. Le temps vécu est la durée bergsonienne. La modélisation du temps newtonien est une droite, donc pleinement de l'espace. La dissipation (chose faite depuis DUHEM) de cette illusion (déjà relevée par GONSETH[39]) fonde le départ de la réflexion de BERGSON[40].

---

[37] la signification des mots et des combinaisons verbales ne leur est pas inhérente ; qu'elle ne se rattache pas à des essences éternelles prédéterminées et qu'elle ne fonde pas dans l'adéquation de nos conceptions à certaines réalités préformées. Les mots sont les éléments de certaines constructions symboliques, auxquelles seule la concordance schématique qui les unit à nos pensées et celles-ci à leur concret relatif, donne une valeur pratique. [...] Les difficultés se dénouent, on le voit, avec la plus grande simplicité, si l'**on accepte, pour imaginer la relation des mots à leurs significations, les suggestions de la méthode axiomatique**. §131

[38] Une signification d'un mot est un mode d'emploi du mot. Car elle est ce que nous apprenons lorsque le mot est incorporé dans notre langage. [Witt1949-51] 61 Nos paroles acquièrent leur sens du reste de nos actions. [Witt1949-51] 229

[39] A M. METZ. Quelle imagination vous manifestez lorsque M. Bergson vous demande si le temps des relativistes n'est pas un temps fictif et irréel ! Et pourtant il ne faut pas en douter ! [...] **Le temps – et surtout celui qu'on mesure – n'existe pas en lui-même. Il n'est qu'un certain ordre établi entre certaines phénomènes**, et peut varier selon les phénomènes privilégiés dont on se sert. M. FABRE. Qu'est-ce en effet le temps scientifique, sinon une monstruosité conventionnelle. L'AUTEUR. **Au même titre que toute création de notre esprit !** [Gons1926] §35

[40] En réalité, la métaphysique n'attirait beaucoup moins que les recherches relatives la théorie des sciences, surtout à la théorie des mathématique. Je me proposais, pour ma thèse de doctorat, d'étudier, les concepts fondamentaux de la mécanique. C'est ainsi que je fus conduit à m'occuper de l'idée de temps. Je m'aperçus, non sans surprise, qu'il n'est jamais question de *durée* proprement dite en mécanique, ni même en physique, et que le "temps" dont on y parle est tout autre chose. Je me demandait alors où est la durée réelle, et ce qu'elle pouvait bien être, et **pourquoi notre mathématique n'a pas de prise sur elle**. C'est ainsi que je fus graduellement du point du vue mathématique et mécanistique où je m'étais placé tout d'abord, au point de vue psychologique. De ces réflexions est sorti l'*Essai sur les données immédiates de la conscience* où j'essaie de saisir la durée pure. [Berg1889] p. 282-283 (lettre à Giovanni PAPANI)

La probabilité. La notion de phénomène *probable* est intuitive, ainsi la probabilité comme *possibilité de survenance*, possibilité *plus ou moins "grande"*. La "grandeur" dont il est question à ce stade intuitif est *tout sauf numérique*, la question (pragmatique) n'étant souvent pas tant de "comparer" les probabilités de plusieurs phénomènes que de savoir si étant donné *un* phénomène l'on agit en croyant ou non à sa survenance.

Le paradoxe de BERTRAND[41] met à jour DUHEM : la variété des possibilités de modélisation à travers d'une part celle de l'"univers des possibles" (choix de l'espace à mesurer) d'autre part celle de l'"aléa" (choix de la mesure de probabilité) montre l'absurdité de parler de "la" probabilité d'un phénomène sans précision aucune.

Le paradoxe de SIMPSON[42] nous rappelle par ailleurs qu'une modélisation statistique reste une modélisation et non un oracle, cet outil pouvant du reste tout à fait se révéler inapte à guider notre action.

En mathématique.

La vérité. La seule vérité effective est celle intuitive, celle de nos actes sur les symboles[43].

La vérité abstraite est une chimère, ce qui n'est pas renier le caractère vivant des visions qui ont traversé les grands esprits mathématiciens et animé des générations entières – bien au contraire. « L'objectivité revient [...] à une unanimité de subjectivité »[44].

La vérité formelle enfin est (en tant que vérité) un non-sens : une "forme véridique", la *prouvabilité*, a pris sa place.

La nécessité logique. L'unique nécessité observée l'est dans le intuitif (elle est donc sommaire), sa formalisation conduit à des *règles* de dérivations, *librement* (mais non arbitrairement) *choisies*. Encore une fois, leur bonne application ressort du intuitif.

La preuve formelle. Eu égard à son caractère formel et à *notre décision* que ses formes propagent la "vérité" (qui ne fait plus sens), il conviendrait de la nommer plutôt "forme prouvale" (ou "forme-preuve"). Le choix des règles d'inférence est idoine[45] – donc potentiellement révisable.

L'objet mathématique. Quel est-il ? Où est-il ? Nous ferions mieux de nous demander *comment* il est. Et nous répondrions alors qu'il se développe par une *pratique* de la forme axiomatique à laquelle on le soumet et qu'il évolue par *horizons de réalité* dans un *abstrait vivant* – être dispensable, fiction indispensable.

[41] Version discrète : deux promeneurs s'assoient successivement (distinctement et "indépendamment") sur l'une des quatre places disponibles sur deux bancs, on considère l'éventualité que les deux promeneurs s'assoient côte à côte.

[42] Un article de *Pour la science* (n°429 juillet 2013) est consacré à ce paradoxe.

[43] « Mais ce calcul n'est-il qu'un *usage ;* n'y a-t-il pas également une *vérité* qui corresponde à cette suite ? » **La *vérité*, c'est que le calcul s'est vérifié**. – « Veux-tu donc dire qu'"être vrai" signifie être utilisable (ou utile) ? » – Non : j'entends qu'on ne peut pas dire de la série des nombres naturels – non plus que de notre langage – qu'ils sont vrais, mais qu'ils sont utilisables et surtout qu'*ils sont utilisés.* [Witt1937-44] p. 34

[44] [Gons1936] §13 (citant F. KAUFMANN)

[45] De 1930 à 1940 [...] la ligne de démarcation entre les termes inextensibles (logiques) et extensibles (descriptifs) sembla se stabiliser. Une liste, contenant un petit nombre de termes logiques, finit par recueillir **un large consensus**, de sorte que la définition générale de la vérité logique devint possible ; la vérité logique ne l'était plus "relativement" à une liste *ad hoc* de constituants. (Cf. Tarski [1935]). [Laka1964] p. 132 (footnote)

Au passage, nous venons de dissiper les trois implicites de la mathématique pratiquée ou enseignée que nous mentionnions en introduction.

Le cinquième postulat. Est-il vrai ? Est-il faux ? GONSETH nous délivre[46] en montrant en quoi la question n'a pas de sens. On travaille avec cette forme-axiome ou l'on ne travaille pas avec. Et cela en un sens plus fort qu'un simple arbitraire vu que les deux options peuvent trouver physiquement réalisation.

L'axiome du choix. Encore pire : il ne pose problème qu'avec l'infini – or quand nous parlons d'infini nous avons déjà quitté la sphère intuitive. Il est donc insensé d'énoncer cette "axiome" en-dehors d'un formalisme (nous avons similairement évoqué le non-sens d'une auto-appartenance en terrain intuitif). DUHEM nous a délivré de ces querelles métaphysiques dont témoignent les cinq lettres sur la théorie des ensembles[47]. La véritable question concernant AC est celle de son *idonéité*[48] au sein d'une axiomatique.

Les cardinaux infinis. Au stade intuitif, les seuls cardinaux concevables sont *finis*, l'infini traduisant l'*impossibilité* de l'arrêt de l'énumérabilité, ce qu'on modélise au sein de ZFC (Z suffirait) par la *dénombrabilité* – l'équipotence avec **N**. Dans ZFC, la notion de cardinal est claire : ordinal minimal dans sa classe d'équipotence. Mais pourquoi avoir choisi l'*équipotence* (certes intuitivement indiquée) plutôt qu'une autre formalisation ? Pourquoi par exemple ne pas parler des *numerosities* de V. BENCI et M. di NASSO[49] qui respectent, à défaut de l'équinumérosité, le principe « les parties strictes sont de numérosité strictement plus petite » ? Ces questions relèvent de l'*idonéité* de choix de définitions, non de vérité intuitive.

Le cardinal du continu. Le continu est-il dénombrable ? La question est tranchée dans ZF mais « ce qu'il y a de dangereux, de trompeur dans l'idée : « On ne peut pas mettre les nombres réels en série », ou « l'ensemble... n'est pas dénombrable », c'est qu'elle fait **apparaître comme un fait de nature ce qui est** une détermination, une **construction conceptuelle**. »[50]. Si l'on osait par malheur penser *intuitivement* le cardinal du continu, la conclusion de WITTGENSTEIN frappera de plein fouet.[51] (Et au passage un théorème de COHEN nous dit que ZFC est complètement incapable de déterminer $2^{\aleph_0}$, au sens où[52] ayant fixé un cardinal λ on peut toujours trouver un modèle de ZFC où $2^{\aleph_0} > \lambda$.)

En "métamathématique".

[46] Est-il possible d'imaginer, que par le point A, il existe plus d'une non-sécante ? [à une droite donnée] **Une fois prononcé le seul mot d'axiomatique, il est malaisé de comprendre que la question même ait pu se poser ; nous n'en saisissons plus le sens. Mieux encore, elle n'a pour nous plus de sens du tout** [Gons1926] §9

[47] [RivRou1990] p. 287-307

[48] There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole discipline, and furnishing such powerful methods for solving given problems (and even solving them, as far as possible, in a constructivistic way) that quite irrespective of their intrinsic necessity they would have to be assumed at least in the same sense as any established physical theory. K. GÖDEL, *What is Cantor's Continuum Problem ?* (1947), cité dans [Fefe1990] p. 182-183

[49] un exposé est disponible à l'URL http ://maths.york.ac.uk/www/sites/default/files/Di_Nasso-slides.pdf

[50] [Witt1937-44] p. 125-126

[51] Si l'on disait : « La réflexion sur le procédé de la diagonale nous montre que le *concept* de "nombre réel" a beaucoup moins d'analogie avec le concept de nombre cardinal que l'on incline à le penser à cause de certaines analogie trompeuses », cela aurait un sens véridique et honorable. Mais c'est justement le *contraire* qui se produit : dans la "mesure" où l'on compare "l'ensemble" des nombres réels soi-disant selon leur grandeur avec celui des nombres cardinaux. La différence de genre des deux conceptions est exposée comme différence d'extension par le truchement d'une expression erronée. Je crois et j'espère qu'une génération à venir rira de cette jonglerie. [Witt1937-44] p. 126

[52] communication personnelle avec M. DZAMONJA (12 août 2015)

La métamathématique. "méta" de quoi, au juste ? Nous avons un fondement, un roc intuitif, c'est de celui-là que nous pouvons – et devons – nous élever. Quel sens cela aurait-il de chapeauter les cieux platoniciens d'une dalle de béton, sinon celui d'un monde à l'envers ?

Les théorèmes de la logiques propositionnelle. Ces théorèmes, *e. g.* celui de la déduction ($\mathcal{T}+A \vdash \Theta$ équivaut à $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow \Theta$) ou celui de la complétude (décidabilité *via* les tables de vérité), reposent souvent sur une récurrence[53] sur la complexité d'une formule : leur vérité est avant tout *intuitive* et ressort de l'*arithmétique*[54] – en fait de ce que nous avons appelé *combinatoire*.

Nous proposons de distinguer ces théorèmes intuitifs de leurs formalisations possibles dans une forme-axiomatique peanienne, par exemple **en les préfixant**[55] **d'un "h-"** (comme "**h**umain"), d'un "p-" (comme "**p**rimitif"), d'un parapluie (pour indiquer que leur sens est *à l'abri*), or whatever you might consider suitable.

Seraient ainsi précisés *h-théorèmes* les énoncés suivants : *si une théorie prouve une contradiction, alors elle prouve tout énoncé* ; *rajouter un indécidable préserve la consistance* ; *les formules sont énumérables*[56].

La théorie des modèles. Qu'est-ce qu'un modèle sinon un *ensemble*, donc une forme-objet que l'on appréhende par une pratique symbolique ? Si nous disons que $\bigstar \leftrightarrow \blacktriangle$ est modèle de $\forall a, \exists b, a \neq b$ (avec l'interprétation évidente) nous sommes dans l'intuitif et nous parlerons alors plutôt de *h-modèle* ; *a contrario*, la paire $\{\emptyset, \mathfrak{P}(\emptyset)\}$ est bien un modèle au sens habituel – *ensembliste*.

A-t-on cependant gardé en tête que, devenant "prouvabilité dans ZFC", *la vérité ensembliste de référence "intuitive" a disparu* ?

Si nous voulons h-prouver l'indémontrabilité de la commutativité en théorie des permutations, nous pouvons exhiber dans ZFC un groupe non abélien : mais nous aurons alors simplement h-montré que la donnée d'une forme-preuve de la commutativité entraîne la (h-)non-consistance de ZFC. Il vaut mieux exhiber des h-modèles (nécessairement finis), par exemple le h-graphe de $\mathfrak{S}_3$, afin que la preuve de l'absurde soit contentuelle et non seulement formelle.

La question de l'idonéité des modèles *infinis* (nécessairement en un sens formel) est alors posée. Dès lors, pourquoi se restreindre à des (formes de) preuves *finies*, résidues des h-preuves ? L'idonéité des (formes de) *preuves infinies* doit être considérée.

Le théorème de LOWEINHEIM-SKOLEM. Comment ZFC pourrait-il admettre un modèle *dénombrable*, lui qui contient toute une hiérarchie d'infinis – dont l'indénombrable continu ? Le paradoxe naît de la confusion de l'aspect idéal de la dénombrabilité (naïvement attribué à certains objets d'un univers ensembliste platoniquement prédonné) avec son aspect formel (satisfaire une forme-prédicat nommée par l'usage "équipotence à $\mathbf{N}$").

[53] You might say : (1) The real proof would be the whole chain. In some mystical way, I've done all these operations. (2) In some way what I've done is the *same as* doing all 3000 – I can only say it's not the same. [Witt1939] p. 304

[54] I'm really trying only to examine the difference between counting in mathematics and ordinary counting, and the difference between a mathematical proposition and an experimental one. [Witt1939] p. 141

[55] l'idée est d'un ami : Gilles TAUZIN

[56] fait fondamental établissant la numérotation de GÖDEL, ingrédient clef pour établir le théorème de complétude de la logique prédicative ; il se traduit dans ZFC par l'équipotence $\mathbf{N} \simeq \mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$

Abandonnons cette confusion platonicienne et clarifions les choses depuis la sphère formelle : dans un modèle de ZFC, la forme-relation "appartenance" n'a aucune raison d'être la forme-relation $\in$, *a fortiori* la forme-relation "équipotence" n'a aucune raison d'être l'équipotence formulée en termes de $\in$ ni la "dénombrabilité" l'$\in$-dénombrabilité.

Le théorème de LOWEINHEIM-SKOLEM[57] conforte la vision intuitive d'un infini insondable et indéterminé qui s'évanouit aux frontières de l'énumérabilité indéfinie.

Nous aimerions enfin dire deux mots sur les théorèmes de GÖDEL, non sans lien avec [Detl1986], bien que ces mots appellent à de plus amples développements.

La convergence des suites de GOODSTEIN. Un énoncé qui serait vrai mais non prouvable ? Voyons voir. Sa "vérité" n'est que sa prouvabilité dans ZFC grâce à l'intervention des puissances itérées du premier ordinal infini ω. Quant à sa non-prouvabilité[58], KIRBY et PARIS ont h-montré qu'une formulation du théorème de GOODSTEIN implique la consistance de PA[59], d'où l'on h-déduit (par le second théorème d'incomplétude de GÖDEL) l'inconsistance de PA (mais alors le théorème de GOODSTEIN est trivial). Finalement, il faudrait énoncer :

la convergence des suites de GOODSTEIN *est (h-)prouvée dans ZFC mais*
elle ne peut être (h-)prouvée dans PA sans y être en même temps infirmée.

Les entiers non standards. Il est traditionnel chez les mathématiciens de doter ZFC (disons au moins Z) d'une "interprétation intuitive", considérant ainsi les entiers de ZFC comme les "vrais entiers"[60]. Nous avons déjà dénoncé cet ineptie en parlant de théorie des modèles. Donnons un argument supplémentaire en notre faveur.

En identifiant les "vrais" entiers avec ceux d'une interprétation intuitive de ZFC, nous comprendrons *a minima* (et à dessein) : « pour tout théorie T, l'interprétation dans tout modèle de ZFC de l'énoncé arithmétique $\neg\,\mathrm{Cons}\,T$ donne une h-preuve d'une contradiction dans T ». Or l'h-improuvabilité dans ZFC de Cons(ZFC) (second théorème d'incomplétude de GÖDEL) nous permet, avec le théorème de complétude de la logique prédicative, d'exhiber un modèle Ω de "ZFC+$\neg$ Cons(ZFC)". Dans ce modèle, que nous dit l'axiome $\neg$ Cons(ZFC) ? Si les entiers de Ω sont les "vrais entiers", cet axiome nous donne une preuve de l'inconsistance de ZFC, d'où une contradiction dans ZFC, *a fortiori* dans Ω. Si l'on tient à la consistance du cadre ensembliste, la conclusion est sans appel : on ne peut pas exclure les entiers non standards[61] dans une interprétation "intuitive" de ZFC.

[57] Il est primordial que la logique sous-jacente soit du *premier* ordre, le second ordre permettant la catégoricité de chaque cardinalité.

[58] communication personnelle avec J. FICHOT (19 mai 2015)

[59] voir par exemple l'URL http ://logic.amu.edu.pl/images/3/3c/Kirbyparis.pdf

[60] On peut toujours ensuite s'amuser à construire des modèles non standards de PA en rajoutant au-delà de **N** un **Q**-ordre de copies de **Z**.

[61] il est clair qu'une preuve de catégoricité implique toujours un isomorphisme entre modèles par rapports au même modèle du cadre ensembliste utilisé : or, si la théorie des ensembles n'est pas catégorique – et elle ne l'est pas effectivement si elle possède un

Le théorème de Henkin. Rappelons son énoncé : une théorie (consistante) peut se compléter en une théorie (consistante) *explicitement complète*, quitte à enrichir son langage d'une infinité dénombrable de constantes. L'idée est simple : on liste les énoncés puis, pour chacun d'eux, on rajoute ou bien sa négation (s'il introduit une contradiction) ou bien cet énoncé tel quel, en rajoutant dans ce dernier cas un témoin au langage si l'énoncé est existentiel. La "théorie limite" répond alors au problème.

Le procédé de "construction" précédent pose toutefois un sérieux problèmes : il n'est pas justement pas constructif, tant dans son déroulement (comment sait-on que choisir à telle étape ?) que dans son achèvement (que l'on nous décrive une telle théorie prolongeant PA de manière explicitement complète !).

Ce dernier point est d'importance, Gonseth nous ayant rappelé[62] en quoi la mathématique intuitionniste de Brouwer étendait notre sphère intuitive, fondation des h-théorèmes "méta"mathématiques.

Le théorème de complétude. (de Gödel & Henkin) Partant d'une théorie consistante, rendu au besoin explicitement complète, on en "construit" un modèle en prenant les termes du langage *modulo* indistinguabilité (au sens de Leibniz), un terme s'interprétant alors dans ce modèle comme sa classe d'indistinguabilité et la vérité d'un énoncé par sa prouvabilité (dans la théorie de base). On montre par une h-récurrence sur la complexité d'un énoncé (récurrence qui *devra* tenir compte du connecteur $\neg$) que ce dernier énoncé est vrai si et seulement s'il est prouvé.

Le "modèle construit" ici pèche à deux égards : il est ensembliste (avec les réserves que nous avons déjà formulées) et la détermination de son interprétation soulèvement des questions d'effectivité – indistinguabilité effective de deux termes, prouvabilité effective d'un énoncé.

Les théorèmes d'incomplétude. En quoi l'énoncé G de Gödel serait-il "vrai" mais non prouvable ?

Sa "vérité" revient à la prouvabilité suivante : une théorie T axiomatisée de manière récursive et contenant RA prouve $\operatorname{Cons} T \Longrightarrow G$. On comprend alors que, sitôt que l'on souhaiterait accorder une "vérité intuitive" à une telle théorie (par exemple ZFC), l'antécédent devient trivial et le conséquent vrai. Mais ce n'est qu'abus de langage.

Quand à l'improuvabilité de G, elle sous-entend la consistance de la théorie ambiante : si une théorie T contenant RA et axiomatisée de manière intuitive récursive h-prouve G, alors elle h-prouve également sa négation. Et l'établissement de ce résultat d'improuvabilité est *constructif* : à partir d'une preuve de G, on indique comment construire une preuve de $\neg G$.

modèle –, il semble **impossible d'appliquer la distinction entre standard et non standard** à ses modèles. **La notion de même de modèle standard est donc relative**, même pour un système d'axiomes formalisé dans une logique non-élémentaire ; ainsi la catégoricité de l'arithmétique est démontrée par rapport à un modèle *relatif* – et non absolu – de la théorie des ensembles. [cité de *The foundations of Mathematics de Beth* (1959)] [Hein2013] p. 147

[62] [Gons1936] § 139

4.3 En guise de conclusion (Caveing, Frege)

Nous avons déjà cité M. Caveing qui décrivait très bien comment nous pouvions nous approprier un "objet" mathématique : en jouant avec les axiomes formels que l'on a posés. Sa conception nous semble rejoindre celle gonsethéenne très imagée des horizons de réalité[63] :

> **le M-objet** [...] **n'est finalement qu'un** moment thématique dans le parcours du réseau des relations, un **repos provisoire entre deux enchaînements d'actes** [...]
>
> la nécessité épistémologique de l'unité thématique d'un système de relations est prise pour une nécessité ontologique [...] **L'illusion assurément n'empêche en aucune façon de « faire des mathématiques »**, de tirer des conclusions valides, d'obtenir des résultats valides. Elle a simplement pour effet d'introduire une herméneutique métaphysique des mathématiques.
>
> Maurice Caveing, *Le problème de l'objet dans la pensée mathématique* (2001)

Mais comment poserait-on un formalisme permettant de disposer d'un M-objet sinon grâce aux *signes* dont nous parle si admirablement Frege ?[64]

> [L'homme] serait limité à ce que la main peut façonner ou la voix faire entendre, sans cette grande découverte que fut celle des signes. Les signes donnent présence à ce qui est absent, invisible, et le cas échéant inaccessible aux sens. Je ne nie pas que même sans le secours de signes, la perception d'un objet puisse réunir un faisceau d'images mentales. Mais nous ne pouvons pas nous y attacher : chaque perception nouvelle précipite ces images dans la nuit et en fait surgir d'autres. En offrant au regard le signe d'une représentation, elle-même appelée à la conscience par une perception, on crée un nouveau foyer stable autour duquel s'assemblent d'autres représentations. Parmi celles-ci, on en pourra de nouveau choisir une et offrir au regard son signe. Ainsi pénétrons-nous pas à pas dans le monde intérieur des représentations, et y évoluons-nous à notre gré, usant du sensible lui-même pour nous libérer de sa contrainte. **Les signes ont, pour la pensée, la même importance qu'eut pour la navigation, l'idée d'utiliser le vent afin d'aller contre le vent**. Que personne ne méprise les signes, tant dépend de leur choix pertinent ! Et leur valeur n'est pas amoindrie si après un long usage il n'est plus nécessaire de produire effectivement le signe, si nous n'avons plus besoin de parler tout haut pour penser. **On n'en pense pas moins dans les mots et**, sinon dans des mots, **dans des signes mathématiques**, ou dans d'autres encore.
>
> Sans les signes, nous nous élèverions difficilement à la pensée conceptuelle. En donnant le même signe à des choses différentes quoique semblables, on ne désigne plus à proprement parler la chose singulière mais ce qui est commun : le concept. Et c'est en le désignant qu'on prend possession du concept ; puisqu'il ne peut être objet d'intuition, il a besoin d'un représentant intuitif qui nous le manifeste. **Ainsi le sensible ouvre-t-il le monde de ce qui échappe aux sens**.
>
> Gootlob Frege, *Que la science justifie le recours à une idéographie* (1882)

Nous devons prendre acte du formalisme, de notre action avec et sur les symboles par laquelle le sens se constitue pour chacun d'entre nous, action se déroulant dans une sphère intuitive où nous pouvons utiliser une connaissance pragmatiquement assurée.

Nous devons demander à Parfait de déposer les armes, l'absoluité de la sphère idéale étant tombée. C'est au contraire dans notre action intuitive que prend pied la sphère abstraite, à l'ontologie dispensable mais la vivance indispensable.

[63] [Cave2001] p. 239

[64] [Freg1882-1923] p. 63-64

Nous devons quelque part concéder à Sceptique la plaisanterie de RUSSELL according to which « mathematics may be defined as the subject in which *we never know what we are talking about*, *nor whether what we are saying is true* »[65].

Nous devons rejoindre Idoine quant à *l'idonéité de son idonéisme* et lui reconnaître l'origine intuitive puis idéale d'un formalisme. Nous lui refusons cependant le caractère *systématique* de la nécessité d'une dialectique accompagnant toute axiomatique[66] – refus au nom de l'honneur de l'esprit humain, de la vivance du monde des mathématiciens, de ceux et celles qui souhaitent prendre le flambeau et partir en éclaireur affronter les ténèbres de telle direction inexplorée de l'humanité, sans mépris pour leurs pairs qui seraient restés en amont affairés à des synthèses moins téméraires mais tout aussi nobles.

---

[65] [Russ1917] p. 71

[66] *cf.* deuxième tome de [Gons1945-55]

5 Annexe technique : le nombre est *action*

Cet expose propose un certain regard sur le texte *Qu'est-ce sont et à quoi servent les nombres ?* écrit en 1888 par Richard DEDEKIND. Nous travaillerons sur la traduction par Hourya SINACEUR extraite de [Dede2008] à laquelle réfèrent toutes les paginations de cet annexe.

Notre propos est simple : mettre en exergue l'approche *itérative* de fondement de l'arithmétique en opérant une sorte de *reverse mathematics* depuis le théorème 126 (existence et unicité d'une suite définie "par récurrence") vers l'axiome de l'infini de ZERMELO (qui remplace le "théorème" 66 de DEDEKIND) :

> *notre action itérative* (au sens où un départ et une fonction itérable engendrent une suite)
>
> *est **exclusivement** fondée* (en un certain sens catégoriel)
>
> *sur les nombres* (au sens de l'axiomatique de PEANO).

5.1 Introduction

Motivation.

Rappelons que l'opération ***successeur*** s agit sur un ensemble en lui rajoutant un certain élément (lui-même), *i. e.* agit comme $a \mapsto a \cup \{a\}$.

Dans l'approche ensembliste moderne, l'axiome de l'infini (il existe un ensemble contenant $\emptyset$ et stable par s) permet de disposer d'un infini *actuel* réalisant la potentialité d'un infini *potentiel* (celle de pouvoir toujours itérer), d'où l'on obtient un ensemble[67] $\mathbf{N}$ qui satisfait les axiomes de PEANO avec unicité à unique isomorphisme[68] près : cet axiome permet donc d'avoir un modèle de l'arithmétique (de PEANO) et ce de façon catégorique. Chemin faisant de cet infini actuel vers une structure arithmétique, il a fallu construire les opérations de l'arithmétique, ce qui se fait usuellement de manière *itérative* : l'addition se définissant par itération du successeur (à penser comme l'incrémentation $n \mapsto n+1$) et la multiplication par itération de l'addition. Pour légitimer ces constructions par itération, il suffit de pouvoir itérer n'importe quelle fonction stabilisant un ensemble donné depuis n'importe quel élément de cet ensemble. Cette possibilité est réalisée grâce à l'ensemble $\mathbf{N}$ et prend la forme du théorème (ensembliste)

$$\forall A, \left\{ \begin{array}{l} \forall f \in A^A \\ \forall @ \in A \end{array} \right., \exists! a \in A^{\mathbf{N}}, \left\{ \begin{array}{l} a_0 = @ \\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = f(a_n) \end{array} \right. \quad \text{où l'on a abrégé } n+1 := s(n),$$

[67] défini comme l'intersection de tous les ensembles contenant $\emptyset$ et stables par s

[68] un morphisme d'un (N, s) vers un (N', s') est une application $f : N \longrightarrow N'$ faisant commuter le carré évident (*i. e.* telle que $f \circ s = s' \circ f$)

lequel n'est qu'une traduction moderne du théorème 126 de DEDEKIND.

Ce dernier nous semble par conséquent coder toute l'essence de l'arithmétique (ordinale), à travers la possibilité d'*itérer indéfiniment*, autrement dit *via* le fait que $\mathbf{N}$ soit au sens de cette possibilité un *infini itératif*. Nous nous proposons de partir de ce théorème, de regarder ce qu'il requiert pour faire sens, et d'en déduire une forme d'axiome de l'infini codant les axiomes de PEANO.

En un mot : *un infini potentiel au sens* itératif *du théorème 126 de* DEDEKIND *doit être un infini actuel au sens* peanien *de l'axiome de l'infini.*

Fondement de notre action : objet initial.

Le théorème 126 peut se formuler aisément dans un cadre catégoriel. Il s'énonce en effet (de manière très compactée) sous la forme d'un diagramme sagittal :

$$\begin{array}{ccccc} o & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & N & \stackrel{\sigma}{\longrightarrow} & N \\ \downarrow & & \downarrow & \exists! a & \downarrow \\ \forall @ & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & A & \stackrel{\forall f}{\longrightarrow} & A \end{array}.$$

Prenons pour objets les triplets (a, f, A) tels que A contienne a et soit stable par f. Un morphisme entre deux tels triplets (a, f, A) et (b, g, B) sera défini par une application $\varphi : A \longrightarrow B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} a & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & A & \stackrel{f}{\longrightarrow} & A \\ \downarrow & & \downarrow \varphi & & \varphi \downarrow \\ b & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & B & \stackrel{g}{\longrightarrow} & B \end{array}.$$

Alors le théorème 126 nous dit qu'un triplet (o, σ, N) tel que $\left\{ \begin{array}{c} o \text{ appartient à } N \\ N \text{ est stable par } \sigma \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{c} \sigma \text{ est injective} \\ \sigma \text{ n'atteint pas } o \end{array} \right.$ est un objet *initial* de cette catégorie[69]. *Les nombres forment donc cet objet initial* et c'est en ce sens que nous disons que le théorème 126 les caractérise comme le fondement de notre action.

Axiomes de l'infini.

Pourquoi, dans l'axiome de l'infini, prend-on comme objet à éviter le vide et pour fonctionnelle injective le successeur ?

Fixons plus généralement un objet o (généralisant le vide) et une fonctionnelle σ partout définie (généralisant le successeur). On abrégera par commodité $a' := \sigma(a)$ pour tout objet a.

[69] En corollaire tombe son unicité à (unique) isomorphisme près.

Introduisons quelques notations pour faciliter notre discours :

$$\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Chaine}}}\, I \quad \text{abrège} \quad \begin{cases} \forall i \in i,\ i' \in I \\ o \in I \end{cases} \quad (i.\ e.\ : I \text{ est une } \sigma\text{-chaîne contenant } o)\,;$$

$$\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Infini}}} \quad \text{abrège} \quad \exists I,\ \underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Chaine}}}\, I \quad (i.\ e.\ : \text{il y a une } \sigma\text{-chaîne contenant } o)\,;$$

Nous conviendrons d'appeler $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Infini}}}$ l'***axiome de l'infini*** de ***départ*** o et de ***pas*** σ. Ainsi l'axiome de l'infini de DEDEKIND-PEANO s'écrit-il $\underset{\emptyset}{\overset{s}{\text{Infini}}}$ et est-il un axiome de l'infini au sens précédent.

Notre propos, rappelons-le, est de mettre en relief l'aspect *itératif*[70] du fondement de l'arithmétique. Dans cette perspective, les axiomes de l'infini sus-définis sont *typiquement itératifs* : ils affirment l'existence d'ensembles dans lesquels on peut itérer une certaine fonctionnelle sur un certain objet. De ce point de vue, l'axiome usuel vaut autant que les autres[71], sous de bonnes conditions à déterminer sur σ. Annonçons tout de suite la couleur : on peut montrer[72] que

en restreignant aux pas σ injectifs évitant leur départ o,
tous les énoncés $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Infini}}}$ sont équivalents.

Motivons les deux conditions ci-dessus. Si un ensemble $\{o, o', o'', o''', ...\}$ postulé par $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Infini}}}$ est par malheur fini, la σ-orbite[73] de o devra "boucler" ; le premier itéré sur lequel elle revient est alors ou bien o (cas d'une orbite en forme de "0") ou bien un itéré plus loin (cas d'une orbite en forme de "∂"). Le premier cas peut être évité en empêchant σ d'atteindre o, le second en imposant son injectivité. L'absence de "boucle", de "torsion", nous incite à appeler

$$\textbf{\textit{platitude}} \quad \text{l'énoncé } \underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Plat}}} \text{ abrégeant } \begin{cases} \sigma \text{ est injective} \\ \sigma \text{ n'atteint pas } o \end{cases}.$$

Les équivalences ci-dessus peuvent alors s'écrire (on sous-entend une quantification universelle) :

$$\left(\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Plat}}} \text{ et } \underset{O}{\overset{\Sigma}{\text{Plat}}}\right) \Longrightarrow \left(\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Infini}}} \Longleftrightarrow \underset{O}{\overset{\Sigma}{\text{Infini}}}\right).$$

Platitude et arithmétique.

[70] Selon nous, les entiers codent notre *action*. Une action *illimitée* signifie l'absence d'obstacle à l'action, *i. e.* que l'on peut toujours agir. C'est pourquoi l'on code l'*infinité* des entiers par un ensemble stable par une action (et contenant un point de départ).

[71] D'un tout autre point de vue – celui technique –, le choix du départ $\emptyset$ et de pas s facilite grandement la technique ordinale. En effet, on définit habituellement l'ordre $a \leq b$ par l'inclusion des segments initiaux associés, définition qui est une identité précisément pour le choix $(\emptyset, s)$.

[72] Voici une esquisse de preuve (les détails ne seront pas retranscrits). Soient (o, σ) et (O, Σ) deux tels couples. Notons N l'"infini minimal" associé à (o, σ). L'idée est d'adapter la démonstration du théorème 126 avec départ O et pas Σ (mais sans ensemble stable associé puisque nous en cherchons précisément l'existence !) : l'image de la "suite" obtenue – si elle faisait sens – serait un infini pour O et Σ. Or l'axiome de remplacement nous légitime précisément la considération de cette image.

[73] sa suite des itérés

Revenant à Dedekind, il ressort que la platitude apparaît dans la définition 71 d'un système simplement infini, notion caractérisée par quatre conditions (α, β, γ et δ) dont sont issues les axiomes de Peano[74] (les conditions ci-dessus sont celles γ et δ). Afin de resserrer le lien entre arithmétique (au sens de Peano) et infini (en notre sens itératif), introduisons deux autres énoncés[75] :

$$\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{InfiniMin}}} \quad \text{abrège} \quad \exists N, \begin{cases} \underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Chaine}}}\, N \\ \forall I,\ \underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Chaine}}}\, I \Longrightarrow N \subset I \end{cases} \quad \begin{array}{c}(i.\ e. : \text{il y a une plus petite} \\ \sigma\text{-chaîne contenant } o).\end{array}$$

$$\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Peano}}} \quad \text{abrège} \quad \underset{o}{\overset{\sigma}{\text{InfiniMin}}} \text{ et } \underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Plat}}} \quad \begin{array}{c}(i.\ e. : \text{il y a une plus petite } \sigma\text{-chaîne} \\ \text{sans boucles contenant } o).\end{array}$$

On observera alors que :

1. le prédicat $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Chaine}}}$ traduit la condition α (être une σ-chaîne) et un bout de celle β (contenir o) ;
2. la condition de minimalité dans $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{InfiniMin}}}$ équivaut à l'autre bout de la condition β ("hérédité" de la récurrence) ;
3. les conditions distinguant $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Peano}}}$ de $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{InfiniMin}}}$ sont exactement celles γ et δ (platitude) ;
4. les énoncés $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{InfiniMin}}}$ et $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Infini}}}$ sont *équivalents* (si I dénote une σ-chaîne contenant o, alors l'intersection de ces dernières incluses dans I fait sens et est un candidat pour notre N).

En conséquence, un couple $\binom{\sigma}{o}$ vérifiera les axiomes de Peano ssi il vérifie l'axiome $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Infini}}}$ couplé aux deux restrictions donnant l'équivalence des axiomes de l'infini. En d'autres termes,

la platitude (qui suffit à l'équivalence des axiomes de l'infini) est
ce qu'il faut et suffit de rajouter à l'infini (au sens itératif)
pour obtenir l'arithmétique (au sens peanien).

Cette description devrait complètement démystifier ces conditions suffisantes. Peut-on alors poser la question de leur *nécessité* ?

Nécessité de la platitude ?

Revenons à l'équivalence conséquence de la platitude :

$$\left(\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Plat}}} \text{ et } \underset{O}{\overset{\Sigma}{\text{Plat}}}\right) \Longrightarrow \left(\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Infini}}} \Longleftrightarrow \underset{O}{\overset{\Sigma}{\text{Infini}}}\right).$$

Bien que cette équivalence redonne un sens itératif à l'axiome de l'infini et s'inscrive dans la perspective structuraliste qui traverse les remarques 130 et 131 de Dedekind, elle *n'est pas* notre cible. *Ses hypothèses*, en revanche, – la platitude – le sont, dans une démarche de *reverse mathematics*.

[74] On lira dans la note de bas de page 178 : *De l'aveu de son auteur, l'axiomatique de Peano est inspirée de cette définition 71.*

[75] le choix de la lettre N n'est pas anodin : lorsque $\binom{\sigma}{o} = \binom{s}{\emptyset}$, on retrouve $N = \mathbf{N}$

Dans cette perspective, quel théorème souhaitons-nous voir équivalent à la platitude ? Nous l'avons annoncé : c'est le théorème 126, lequel permet d'itérer une fonction *dans un ensemble déjà donné*[76] sur un objet de cet ensemble, et que nous avons signalé comme décrivant (en un sens catégoriel) le fondement de notre action.

5.2 *Reverse mathematics* : du théorème 126 de Dedekind aux axiomes de Peano

Le cadre formel est le langage ensembliste, écrit au premier ordre, muni des axiomes : *extension*, *parties*, *remplacement* – mais pas *infini* ! Rappelons que *remplacement* donne *séparation*, ce qui avec *parties* permet de construire tous les ensembles fonctionnels $B^A = \mathrm{Fonc}(A, B)$.

On se donne :

1. un objet o ;
2. une fonctionnelle σ définie partout (dont les images $\sigma(x) =: x'$ seront notées avec des primes) ;
3. un ensemble N pour lequel le théorème 126 *fait sens* et est vérifié. Rappelons cet énoncé :

$$\#126: \qquad \forall A, \begin{cases} \forall f \in A^A \\ \forall @ \in A \end{cases}, \exists! a \in A^{\mathbf{N}}, \begin{cases} \forall n \in N, \ a_{n'} = f(a_n) \\ a_0 = @ \end{cases}.$$

Objectif : montrer $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Peano}}}$!

Nous allons démontrer (dans l'ordre) chaque point annoncé en police grasse droite :

N **est une chaîne**

σ **ne fixe personne**

o **n'est pas atteint**

N **est la plus petite chaîne**

N **vérifie le théorème de récurrence**

Tout élément autre que o **est atteint**

[pause pour donner la direction]

N **possède une suite de segments initiaux**

N **vérifie le théorème de récurrence forte**

Un lemme de comparaison

σ **est injective**

Trois points sur quatre.

[76] si l'esprit itératif est le même, la différence technique est de taille car met en jeu les axiomes de remplacement

Convenons d'appeler ***chaîne*** tout ensemble satisfaisant $\underset{o}{\overset{\sigma}{\text{Chaine}}}$, *i. e.* contenant o et stable par σ.

N **est une chaîne.** Soient $A, f, @$ et a comme dans #126.

L'égalité $a_0 = @$ faisant sens, son membre de gauche a_0 fait sens, *i. e.* la fonction a est définie en o, donc ce dernier appartient au domaine N de a.

Soit $n \in N$. L'égalité $a_{n'} = f(a_n)$ faisant sens, son membre de gauche $a_{n'}$ fait sens, *i. e.* la fonction a est définie en n', donc ce dernier appartient au domaine N de a. Finalement, N est stable par σ.

σ **ne fixe personne.** Soit $n \in N$ tel que $n' = n$. Soit A un ensemble à deux éléments, par exemple[77] $\{\emptyset, \mathfrak{P}(\emptyset)\}$. Notons f la transposition des éléments de A : observer que f n'a aucun point fixe. Prenons n'importe quel départ $@ \in A$. Soit a la suite donnée par #126. On a alors les égalités $a_n = a_{n'} = f(a_n)$, ce qui montre que f fixe a_n, d'où la contradiction.

o **n'est pas successeur.** Soit $m \in N$ tel que $m' = o$. Soit A un ensemble à deux éléments. Soit f constante sur A. Posons @ l'élément de A non atteint par f. Soit a la suite donnée par #126. On a alors les égalités $@ = a_o = a_{m'} = f(a_m)$, ce qui est absurde.

N **est la plus petite chaîne.** Précisons que c'est ici *et seulement ici* que nous utiliserons l'*unicité* de la suite a dans #126, ce qui permet de cerner la force de cette partie du #126.

Suivant Dedekind (théorème 79), définissons A par l'intersection de toutes les chaînes : cela fait sens puisque N en est une. Il nous suffit de montrer que A, qui est incluse dans la chaîne N, *contient* en fait ce dernier.

Définissons à présent une suite $u : N \longrightarrow N$ qui vaut l'identité sur A et qui coïncide ailleurs[78] avec σ. Montrons que cette suite u et la suite identité (que nous noterons v) vérifient toutes deux les conditions de #126 avec départ o et pas σ : par l'unicité, elle devront coïncider, en particulier en dehors de A, d'où $\sigma = \text{Id}$ sur $N \backslash A$, ce qui s'écrit $\forall n \in N \backslash A\ ,\ n' = n$, ce qui montrera que σ (qui ne fixe personne) fixe en fait tous les $n \in N \backslash A$, d'où la vacuité de ce dernier – et la conclusion recherchée $N \subset A$.

Par définition, la suite u coïncide avec v sur A ; puisque $o \in A$, elles ont même départ $u_o = o = v_o$. Soit maintenant $n \in N$. Il est immédiat que $v_{n'} = n' = \sigma(n)$. Par ailleurs, si $n \in A$, alors $n' \in A$ (car A est une chaîne), d'où les égalités $u_{n'} = \text{Id}(n') = n' = \sigma(n)$; si cette fois $n \notin A$, alors $n' \notin A$ (sinon la partie $A \amalg \{n\}$ serait une chaîne strictement plus grande), d'où les égalités $u_{n'} = \sigma(n') = \sigma(u_n)$, ce qui conclut.

N **vérifie le théorème de récurrence.** Rappelons ce schéma de théorèmes : *pour tout prédicat P singulaire, on a l'implication*

$$(P_o \wedge [\forall n \in N,\ P_n \implies P_{n'}]) \implies (\forall n \in N,\ P_n).$$

[77] *remplacement* donne *paire*, les objets $\emptyset$ et $\mathsf{P}(\emptyset)$ étant distincts puisque le second n'est pas vide (il contient $\emptyset$)

[78] l'idée est de garder la même relation de récurrence, la même condition initiale mais de changer de "condition initiale" en dehors de A (*i. e.* dans la zone hors d'atteinte de la relation de récurrence) en décalant tous les éléments hors de A

Considérons un prédicat P vérifiant la conjonction ci-dessus. Suivons DEDEKIND (théorème 80). La partie $\{n \in N\ ;\ P_n\}$ est par hypothèse une chaîne, donc contient la chaîne minimale N, ce qui conclut.

Tout élément autre que le départ est successeur. Montrons par récurrence (théorème 78)

$$\forall n \in N,\ n \neq o \implies \exists a \in N,\ n = a'.$$

L'initialisation s'écrit "$o \neq o \implies \exists ...$", ce qui est de la forme "*faux implique [whatever]*" et est donc tautologique Soit ensuite un $n \in N$. On veut montrer l'implication "$n' \neq o \implies \exists a,\ n' = a'$", qui est de la forme "*[whatever] implique vrai*" (prendre $a := n$), donc vraie.

UNE PAUSE.

Donnons une autre démonstration du fait que o n'est pas successeur, laquelle nous servira d'inspiration pour montrer l'injectivité de σ.

Soit m (comme "moins un") un antécédent de o. L'idée est de "perturber" la boucle des itérés en insérant un élément étranger entre m et o, élément qui perturberait l'itération sans pourtant être visible dans les hypothèses de #126. Le diagramme suivant pourra nous guider :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{\mu} & \longrightarrow & & \longrightarrow & o & \longrightarrow & o' & \longrightarrow & \cdots \\
\uparrow & f & & & \uparrow & & \sigma & & \downarrow \\
& \nwarrow & & \longleftarrow & m & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots
\end{array}$$

Soit μ un objet hors[79] de N et notons $\overline{N} := N \amalg \{\mu\}$. On définit une application f stabilisant $\overline{N}$ qui agit sur $N \backslash m$ comme σ et qui agit ailleurs comme $m \mapsto \mu \mapsto o$. Soit a la suite à valeurs dans $\overline{N}$ de départ o et de pas f donnée par #126. Montrons $\forall n \in N,\ a_n = n$ par récurrence : l'égalité $a_m = m$ nous mènera alors droit à la contradiction suivant les égalités

$$o = a_0 = a_{m'} = f(a_m) = f(m) = \mu \qquad \text{(et sachant que } N \text{ contient } o \text{ et pas } \mu\text{).}$$

L'initialisation $a_o = o$ traduit le départ choisi pour a. Soit maintenant $n \in N$ tel que $a_n = n$. Si $n = m$, on a alors $a_{n'} = a_{m'} = a_o = o = m' = n'$. Dans le cas contraire, f agit sur n comme σ, d'où $a_{n'} = f(a_n) = f(n) = \sigma(n) = n'$, ce qui conclut.

Pour montrer l'injectivité de σ, nous allons reprendre l'idée ci-dessus :

perturber l'itération suivant une boucle.

[79] on peut s'inspirer du paradoxe de RUSSELL pour affirmer que $\{n \in N\ ;\ n \notin n\}$ en est un

Toutefois, l'orbite que nous avions en forme de "0" (une boucle) va devenir en forme de "∂", il va pousser un "segment initial" à la boucle que nous allons perturber (dans le schéma suivant, m est un élément de la boucle qui a même image O qu'un élément μ hors de cette boucle) :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} o & \longrightarrow & o' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & \longrightarrow & O & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots & \\ & & & & & & \uparrow & f & & \uparrow & & \sigma & & \downarrow & . \\ & & & & & & & \nwarrow & \longleftarrow & m & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots & \end{array}$$

Tout va marcher à l'identique, sauf quand il faudra préciser en quel sens μ vient *avant* m, ce qui fait l'objet du **lemme de comparaison** ci-après, que nous démontrons à l'aide d'une forme *forte* de récurrence. N'ayant cependant pas défini de relation d'ordre sur N (on pourrait suivre le § 7 de DEDEKIND mais ce dernier utilise naturellement l'injectivité que nous souhaitons établir), nous allons construire un analogue des segments entiers $[0, n]$ et formuler une récurrence forte à l'aide de ces derniers. La récurrence forte nous servira par ailleurs dans la preuve de l'injectivité de σ.

REPRISE.

N **possède une suite de segments initiaux.** Montrons l'existence d'une suite (S_n) de parties de N telle[80] que

$$S_0 = \{o\} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in N,\ \genfrac{}{}{0pt}{}{o}{n} \in S_n \qquad \text{et } \forall n \in N,\ S_{n'} = S_n \cup \{n'\}.$$

Notons f l'application[81] $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(N) & \longmapsto & \mathfrak{P}(N) \\ A & \mapsto & \{o\} \cup \sigma(A) \end{array} \right.$. Le #126 nous donne une suite (S_n) de départ $\{o\}$ et de pas f. Montrons $\forall n \in N,\ S_{n'} = S_n \cup \{n'\}$ par récurrence. L'initialisation vient des égalités

$$S_{o'} = f(S_o) = \{o\} \cup \sigma(S_0) = S_0 \cup \sigma(\{o\}) = S_0 \cup \{\sigma(o)\} = S_0 \cup \{o'\}.$$

On par ailleurs, étant donné un $n \in N$ tel que $S_{n'} = S_n \cup \{n'\}$, les égalités

$$\begin{aligned} S_{n''} &= f(S_{n'}) = \{o\} \cup \sigma(S_{n'}) = \{o\} \cup \sigma(S_n \cup \{n'\}) = \{o\} \cup \underline{\sigma(S_n) \cup \sigma(\{n'\})} \\ &= \underline{\{o\} \cup \sigma(S_n)} \cup \sigma(\{n'\}) = f(S_n) \cup \{\sigma(n')\} = S_{n'} \cup \{n''\}, \text{ ce qui conclut la récurrence.} \end{aligned}$$

L'appartenance $o \in S_n$ est immédiate par récurrence vu les inclusions $S_n \subset S_{n'}$. Vu par ailleurs les appartenances $n' \in S_n \cup \{n'\} \subset S_{n'}$, tout élément a qui est un successeur vérifie $a \in S_a$, appartenance qui reste valide lorsque $a = o$ vu le choix de S_o.

[80] La croissance d'une telle suite n'a *a priori* aucune raison d'être stricte. On comparera par ailleurs les propriété des segments S_n avec la définition des parties $Z_n := N \setminus \langle n' \rangle$ de la définition 98.

[81] pour rajouter un élément "au bout", on décale tout le monde et on rajoute le premier élément décalé à l'autre bout

N **vérifie le théorème de récurrence forte.** Soit P un prédicat singulaire. Montrons l'implication

$$P_o \wedge [\forall n \in N,\ (\forall s \in S_n,\ P_s) \Longrightarrow P_{n'}] \Longrightarrow [\forall n \in N,\ P_n]$$

Notons $\mathfrak{P}_a$ le prédicat $\forall s \in S_a,\ P_s$ (d'argument a). Remarquer pour tout $n \in N$ l'implication $\mathfrak{P}_n \Longrightarrow P_n$ (vu que $n \in S_n$). Supposons la conjonction ci-dessus. Montrons $\forall n \in N,\ \mathfrak{P}_n$ par récurrence, d'où il viendra la conclusion $\forall n \in N,\ P_n$ attendue. L'initialisation $\mathfrak{P}_o$ s'écrit $\forall s \in S_o,\ P_s$, *i. e.* $\forall s \in \{o\},\ P_s$, ou encore P_o, ce qui est un conjoint de l'hypothèse. Soit maintenant $n \in N$ tel que $\mathfrak{P}_n$. Par l'autre conjoint, on obtient $P_{n'}$; comme le prédicat P est (d'après $\mathfrak{P}_n$) vérifié sur S_n, il l'est sur $S_n \cup \{n'\} = S_{n'}$, ce qui conclut à $\mathfrak{P}_{n'}$.

Un lemme de comparaison. Vu – chez les naturels – la visée $S_n = [0, n]$, on pourrait (mais on ne le fera pas) définir $a \leq b$ par $S_a \subset S_b$. Nous allons montrer l'analogue du caractère total de $\leq$, à savoir

$$\forall a, b \in N,\ [a \in S_b \text{ ou } b \in S_a]\,.$$

Soit $a \in N$.

Montrons[82] $\forall n \in N,\ S_a \subsetneq S_n \Longrightarrow S_{a'} \subset S_n$ par récurrence sur n. La prémisse de l'initialisation s'écrit $S_a \subsetneq S_o$, *i. e.* $S_a \subsetneq \{o\}$, ce qui revient à la vacuité de S_a, laquelle est absurde puisque $o \in S_a$, d'où le caractère tautologique de l'initialisation. Soit maintenant $n \in N$ tel que $S_a \subsetneq S_n \Longrightarrow S_{a'} \subset S_n$ et supposons $S_a \subsetneq S_{n'}$. Alors $a \neq n'$ (sinon le $\subsetneq$ précédent serait un $=$), *i. e.* $a \notin \{n'\}$, d'où l'appartenance $a \in S_a \backslash \{n'\} \subset S_{n'} \backslash \{n'\} \subset S_n$ et (par hypothèse de récurrence) l'inclusion $S_{a'} \subset S_n$; jointe à $S_n \subset S_{n'}$, elle conclut.

Montrons $\forall n \in N,\ [S_a \subset S_n \text{ ou } S_n \subset S_a]$ par récurrence sur n. L'inclusion (connue) $\{o\} \subset S_a$ est un disjoint de l'initialisation, validant cette dernière. Soit maintenant $n \in N$ tel que $S_a \subset S_n$ ou $S_n \subset S_a$. Dans le premier cas, on a immédiatement $S_a \subset S_{n'}$: sinon, le deuxième cas donne une inclusion *stricte* $S_n \subsetneq S_a$, d'où il vient $S_{n'} \subset S_a$ d'après le paragraphe précédent, ce qui conclut la récurrence.

Pour conclure, il suffit de coupler les appartenances $a \in S_a$ et $b \in S_b$ à l'une des inclusions $S_a \subset S_b$ ou $S_b \subset S_a$.

σ **est injective.** Soient par l'absurde m et μ distincts dans N ayant même successeur. Quitte à échanger les rôles, on peut supposer d'après le lemme $\mu \in S_m$ (*i. e.* que μ vient "avant" m). Définissons une application $f : N \longrightarrow N$ qui envoie m sur μ et qui agit ailleurs comme σ :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
o & \longrightarrow & o' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & \longrightarrow & \mu' = m' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots & \\
 & & & & & & \uparrow & f & & \uparrow & & \sigma & & \downarrow & . \\
 & & & & & & & \nwarrow & \longleftarrow & m & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots &
\end{array}$$

Soit a la suite à valeurs dans N de départ o et de pas f donnée par #126. Montrons $\forall n \in N,\ a_n = n$ par

[82] analogue chez les naturels de l'implication $a < b \Longrightarrow a + 1 \leq b$

récurrence forte : les deux égalités résultantes pour $n \in \{m, \mu\}$ nous mèneront alors, avec celle $m' = \mu'$, droit à la contradiction suivant les égalités

$$\begin{cases} a_{m'} = f(a_m) = f(m) = \mu \\ a_{\mu'} = f(a_\mu) = f(\mu) = \mu' \end{cases} \qquad (\mu \text{ ne pouvant être fixé par } \sigma).$$

L'initialisation $a_o = o$ traduit le départ choisi pour a. Soit maintenant $n \in N$ tel que $\forall s \in S_n,\ a_s = s$. Si $n = m$, puisque $\mu \in S_m$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence forte et affirmer[83] $a_\mu = \mu$, d'où l'on tire

$$a_{n'} = a_{m'} = a_{\mu'} = f(a_\mu) = f(\mu) = \sigma(\mu) = \mu' = m' = n'.$$

Sinon, on a directement $a_{n'} = f(a_n) = f(n) = \sigma(n) = n'$, ce qui conclut.

5.3 Conclusion

Nous espérons avoir convaincu que l'*itération* est au fondement de l'arithmétique peanienne et, partant, que les nombres ne sont au fond qu'une forme discrète de la potentialité par laquelle nous *agissons* dans notre vie.

[83] C'est pour *cette seule égalité* qu'ont été développés les points précédents de cette section

6 Bibliographie

[Berg1907] Henri Bergson *L'évolution créatrice*, éd° PUF (2007), coll. Quadrige, édition critique *Le choc Bergson* sous la direction de Frédéric Worms

[Bern1947] Claude Bernard *Principes de la médecine expérimentale*, éd° PUF (2008), coll. Quadrige

[Cava1938] Jean Cavaillès *Méthode axiomatique et formalisme – Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, éd° Hermann, librairie scientifique

[Cave2001] Maurice Caveing *Le problème de l'objet dans la pensée mathématique*, éd° Vrin (2004), coll. Problèmes & Controverse

[Dede1854-99] Richard Dedekind *la création des nombres*, éd° Vrin, 2008

[Duhe1906] Pierre Duhem *La théorie physique – Son objet, sa structure*, éd° Vrin (2007), Bibliothèque des textes philosophiques

[Fefe1990] Solomon Feferman (editor–in-chief) *Kurt Gödel – collected works – volume II*, prepared under the auspices of the Association for Symbolic Logic, Oxford University Press

[Freg1882-1923] Gottlob Frege *Écrits logiques et philosophiques*, trad. et introduction de Claude Imbert, éd° Seuil, coll. Points Essais (1971)

[Gons1926] Ferdinand Gonseth *Les fondements des mathématiques*, éd° Albert Blanchard (1974), 1926

[Gons1936] Ferdinand Gonseth *Les mathématiques et la réalité – Essai sur la méthode axiomatique*, éd° Félix Alcan, 1936

[Gons1937] Ferdinand Gonseth *Qu'est-ce que la logique ?*, éd° Hermann, coll. actualités scientifiques et industrielles, 1937

[Gons1945-55] Ferdinand Gonseth *La géométrie et le problème de l'espace*, éd° du griffon, coll. bibliothèque scientifique, 1945-1955

[Hahn1935] Hans Hahn *Logiques, mathématiques et connaissance de la réalité*, éd° Hermann (1935), coll. actualités scientifiques et industrielles, 1932

[Hein2013] Gerhard Heinzmann *L'intuition épistémique*, éd° Vrin, coll. Mathesis, 2013

[Laka1964] Imre Lakatos *Preuves et réfutations – essai sur la logique de la découverte mathématique*, éd° Hermann, coll. actualités scientifiques et industrielles, trad. française (1984), original *Proofs and Refutations*, ed. Cambridge University Press (1976)

[Milh1898] Gaston Milhaud *Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique*, éd° Félix Alcan (2e éd°), 1898, réimpression BnF & Hachette Livres

[Patr2001] Frédéric Patras *La pensée mathématique contemporaine*, éd° PUF, coll° Science, histoire et société

[Poin1902] Henri Poincaré *La science et l'hypothèse*, éd° Flammarion (1968), coll. Champs sciences

[Poin1905] Henri Poincaré *La valeur de la science* éd° Flammarion (1970), coll. Champs sciences

[RivRou1990] (dir.) François Rivenc, Philippe de Rouilhan *Logique et fondements des mathématiques*, Anthologie (1850 - 1914), éd° Payot (Bibliohtèque scientifique)

[Russ1917] Bertand Russell *Mysticism and Logic*, éd° double day anchor, 1917

[Schr1948] Erwin Schrödinger *La nature et les Grecs*, cours donnés à University College (Londres) les 24, 26, 28 et 31 mai 1948, trad. de l'anglais et notes par Michel Bitbol et Annie Bitbol-Herspériès, éd° Les Belles Lettres (2014), coll. L'Âne d'Or

[Witt1922] Ludwig Wittgenstein *Tractacus logico-philosophicus*, trad. Gilles-Gaston Granger, éd° Gallimard (1993), coll. TEL

[Witt1930] Ludwig Wittgenstein *Remarques philosophiques*, éd° posthume par Rush Rhees (Basil Blackwell, Oxford, 1964), trad. Jacques Fauve, éd° Gallimard (1975), coll. tel

[Witt1939] Ludwig Wittgenstein *Cours sur les fondements des mathématiques*, établis par Cora Diamond (1975, 1976), éd° TER (1995), coll. bilingue

[Witt1937-44] Ludwig Wittgenstein *Remarques sur les fondements des mathématiques*, éd° posthume par G. E. M. Anscobe, Rush Rhees et G. H. Wright, trad. Marie-Anne Lescourret, éd° Gallimard (2006), bibliothèque de philosophie, éd° originale Basil Blackwell Oxfrod (1956)

[Witt1949-51] Ludwig Wittgenstein *De la certitude*, trad. Danièle Moyal-Sharrock, éd° Gallimard (2006), bibliothèque de philosophie, éd° originale Blackwell Publishers Ltd. (1969)

Sources complémentaires (non explicitement citées) :

[Berg1889] Henri BERGSON *Essai sur les données immédiates de la conscience*, éd° PUF (2011), coll. Quadrige, édition critique *Le choc Bergson* sous la direction de Frédéric WORMS

[Bern1865] Claude BERNARD *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*, éd° Garnier Flammarion (1966)

[Biès1982] Jean BIÈS *Passeports pour des temps nouveaux*, éd° Dervy-Livres, coll. Histoire et Tradition

[Cang1943] Georges CANGUILHEM *Le normal et le pathologique*, 2de éd° augmentée (1966), éd° PUF (2010), coll. Quadrige

[ChaCon1989] Jean-Pierre CHANGEUX, Alain CONNES *Matière à penser*, éd° Odile Jacob

[Detl1986] Michael DETLEFSEN *Hilbert's program*, **Synthese library**, vol. 182, studies in epistemology, logic, methodology, and philosophy of science

[Dieu1987] Jean DIEUDONNÉ *Pour l'honneur de l'esprit humain*, éd° Hachette, coll° Pluriel

[Duhe1912] Pierre DUHEM *La nature du raisonnement mathématique*, **Revue de Philosophie**, 21, p. 531-543 (1912)

[GanSma2013] *Philosophie des mathématiques – Ontologie, vérité et fondements* textes réunis par S. GANDON et I. SMADJA, éd° Vrin, 2013, coll. textes clef

[Good1953] Nelson GOODMAN *Fact, Fiction and Forecast*, Special Lectures in Philosophy delivered at the University of London, éd° Harvard University Press (1983, 4th ed°)

[Helm1887] Hermann von HELMHOLTZ *numbering and measuring – from an epistemological viewpoint*, **Boston studies in the philosophy of science**, vol. XXXVII, ed. Robert S. Cohen & Mark W. Wartofsky (1977), trad. Malcom F. LOWE

[Hume1748] David HUME *An enquiry concerning human understanding*, éd° Vrin bilingue (2008), Bibliothèque des textes philosophiques, trad. et introduction par Michel MALHERBE

[Larg1992] (coll.) Jean LARGEAULT *intuitionisme et théorie de la démonstration*, éd° Vrin, coll. Mathesis, 1992

[Mayb2000] John P. MAYBERRY *The foundations of mathematics in the theory of sets*, Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and its Applications (ed. by G.-C. ROTA)

[PanSer2013] Marco PANZA, Andrea SERENI *Plato's problem – an introduction to mathematical platonism*, published by Palgrave Macmillan

[Praw1977] Dag PRAWITZ *Meaning and proofs : on the conflict between classical and intuitionistic logic*, **Theoria**, vol. 43, no. 1 (1977), p. 2-40

[Quin1980] Willam Von Orman QUINE *From a logical point of view*, traduit sous la direction de Sandra LAUGIER, éd° Vrin (2003), bibliothèque des textes philosophiques

[Russ1940] Bertrand RUSSELL *An Inquiry into Meaning and Truth*, éd° Spokesman (2007)

[Schr1956] Erwin SCHRÖDINGER *L'esprit et la matière*, trad. et notes par Michel BITBOL, éd° du Seuil (1990), coll. Points Sciences (*Tarner Lectures*, Cambridge, oct. 1956)

[Schw1997] Laurent SCHWARTZ *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, éd° Odile Jacob

[Thur1994] William THURSTON *On proof and progress in mathematics*, arXiv :amth/9404236v1 (**Bulletin of the American Mathematical Society**, Volume 30, Number 2, April 1994, Pages 161-17)

[Tsud1973] Itsuo TSUDA *Le Non-faire*, éd° Le Courrier du Livre (1973)

[Tsud1975] Itsuo TSUDA *La Voie du dépouillement*, éd° Le Courrier du Livre (1975)

[Tsud1979] Itsuo TSUDA *Le dialogue du silence*, éd° Le Courrier du Livre (1979)

[Tsud1983] Itsuo TSUDA *Face à la Science*, éd° Le Courrier du Livre (1983)

[Weyl1926] Hermann WEYL *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, trad. de l'allemand par Olaf HELMER, introd. Franck WILCZEK, éd° Princeton University Press (1949, 2009)