

Essai sur l'incompréhension mathématique

René DUGAS
1940

éd° Vuibert
préface de Georges BOULIGAND

11 ORIGINE $\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}$

Lüroth a démontré l'impossibilité d'établir une telle correspondance [bicontinue] entre le plan et la droite

21 DOUBLE-ORIGINE DU « PLAN COMPLEXE »

Cette représentation a été proposé d'une par ARGAN, dans un ouvrage intitulé *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* et paru en 1806. Parallèlement, l'abbé BUÉE, retiré à Londres, faisait paraître un *Mémoire sur les quantités imaginaires* inséré dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1806, page 23

63 CROYANCES-GUIDES

Il est hors de doute que l'infini actuel a éclairé la route de CANTOR : un créateur a le droit de se laisser guider par une métaphysique, dès l'instant où il parvient à des résultats nouveaux et incontestables. Mais ce droit nous est refusé, dans la mesure où nous nous bornons à suivre ses traces en essayant de le comprendre, et c'est pourquoi nous devons être reconnaissants aux mathématiciens qui ont réussi à vider certaines définitions cantorienne de leur contenu métaphysique, sauf parfois à en réduire le domaine d'application. Il est possible, en toute sincérité, d'aboutir à l'idéalisme cantorien ; mais pour que cette acceptation ne soit pas aveugle, mieux vaut, semble-t-il, avoir cheminé tout d'abord sur les voies plus accessibles de l'empirisme et en avoir épuisé les ressources.

80-1 DANGEREUSE MÉTAPHYSIQUE

N'ayant retenu du passé que l'héritage positif de la science classique, ayant oublié le souvenir des controverses qui ont marqué son évolution, on risque de se trouver fort dépourvu devant la nécessité expérimentale d'une novation [aux] axiomes [de la mécanique]. L'incompréhension latente se manifeste alors, sous la forme d'objections métaphysiques ou matérialiste : l'intervention de la mécanique einsteinienne et de la mécanique quantique nous a donné le spectacle d'un tel réveil, que la connaissance de l'histoire aurait dû nous épargner.

Un des dangers les plus manifestes d'incompréhension en mécanique est le *danger métaphysique*. Je ne méconnaiss nullement que la métaphysique ait, chez les créateurs de la mécanique, joué un rôle parfois important. Mais il est périlleux de laisser chaque esprit l'accommoder à sa guise : l'objectivité de la science ne peut qu'y perdre.

Il est bien connu que d'ALEMBERT, dès 1743, avait formulé correctement les équations générales de la dynamique (sans d'ailleurs, je le note en passant, qu'il soit exact qu'il ait ramené ainsi la dynamique à la statique). Il avait, simultanément, éliminé la mystique des forces vives (1). Mais la discussion restait ouverte sur le principe dont découlaient les équations de la mécanique

[footnote 1 : « J'ai entièrement proscris les forces inhérentes aux corps en mouvement, être obscurs et métaphysiques qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une science claire par elle-même. C'est par cette raison que j'ai cru ne point devoir entrer dans l'examen de la fameuse querelle des forces vives. Cette question, qui depuis trente ans partage les géomètres... Malgré les disputes que cette question a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Mécanique m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'ouvrage que je donne aujourd'hui. » (Discours préliminaire du *Traité de Dynamique*)]

87 AXIOMES MOTIVÉS PAR L'EMPEIRON

À partir des axiomes, le langage de la mécanique est exclusivement mathématique. L'origine expérimentale des axiomes, qui n'est plus contestée depuis Lazare CARNOT, devrait suffire à nous garantir de

l'incompréhension formaliste : nous ne pouvons voir dans la mécanique un jeu de symboles, puisque nous savons y avoir introduit à la base des données d'expérience convenablement élaborées.

95 SENS PHYSIQUE DES VECTEURS-ÉTATS ?

Nous ne prétendons pas qu'il soit facile d'entrer de plain-pied dans l'algèbre symbolique des états et des observables exposée par DIRAC dans ses *Principes*, mais nous croyons pouvoir affirmer qu'il est indispensable de dépouiller l'attitude sensualiste pour aborder semblable lecture.

98 MODÉLISATION PERTINENTE

Si, faute de moyens mathématiques suffisants, la théorie schématise à l'excès la machine, elle peut n'être d'aucune utilité. Il y a des sacrifices inévitables à la mise en équation ; c'est la proportion de ces sacrifices qui rendra la théorie inutile ou valable : on ne pourra s'en apercevoir qu'*a posteriori*.

126-7 LOGIQUE IDOINE & EN DEVENIR

M. J.-L. DESTOUCHES écrit à cette occasion : [*Essai sur la forme générale des théories physiques*, thèse de philosophie éditée à Cluj (Roumanie), 1938]

« La logique classique n'a pour nous aucun privilège particulier : c'est une logique adéquate dans un certain domaine, mais qui ne convient pas pour d'autres... Les règles classiques conduisent à des affirmations que l'on ne peut accepter, et ce sont des limitations à ces règles dont nous avons besoin », pour briser leur cadre trop étroit. [p. 31]

Admirons la netteté avec laquelle M. DESTOUCHES combat ainsi des idées si généralement reçues. Le fait que la logique soit restée stable pendant si longtemps n'exclut pas la possibilité de sa révision. Elle n'est pas d'une « essence différente du reste de la science » ; elle n'est pas une vérité en soi ; ses règles « ne sont pas *a priori* et ont été dégagées progressivement, aussi n'y a-t-il pas de raison de décréter à un certain moment que son évolution est terminée ». [p. 117]

128 ABSOLU DISSOUT PAR LE PSYCHOLOGIQUE

Ce débat sur la théorie des ensembles [infinis] est au fond d'origine psychologique : les empiristes se défient de la pensée *abstraite et générale* des idéalistes ; ils craignent que les raisonnements de ces derniers soient du nominalisme pur, dont la substance est insaisissable. Qu'on le veuille ou non, les sciences les plus objectives relèvent encore de la psychologie, et la situation des mathématiques à cet égard n'est privilégiée qu'en apparence : il y a là matière à une question qui exigerait d'importants développements, fondés sur l'analyse des doctrines psychologiques concurrentes (conceptualisme et nominalisme). Je ne peux que la poser ici, sans prétendre la résoudre ; je dirai seulement qu'elle n'est pas d'essence métaphysique : la manière dont nous créons des concepts sur lesquels nous raisonnons ensuite abstraitement relève bien de la psychologie. C'est pourquoi il est absurde de parler de rigueur absolue dans quelque domaine que ce soit, y compris celui des mathématiques.

129- PROOFS AND REFUTATION (FIN DE L'ESSAI)

La rigueur absolue ne saurait exister, et si les mathématiques se perfectionnent dans cette voie, c'est par le moyen d'une critique logique, d'une analyse directe, ou d'un exemple inattendu qui mettent en question les idées reçues.

Il serait tout fait injuste de jeter la pierre aux créateurs qui se sont trompés ; la plupart du temps, ils sont rendu un service immense en découvrant une théorie vérifiée *en gros* : même si les *bonnes fonctions*, produits normaux de l'intuition et d'algorithmes réguliers, ne sont dans le champ des possibilités qu'une exception, elles sont une exception de grande valeur pratique et ont servi de tremplin aux découvertes des critiques modernes. Établir à ce sujet une hiérarchie serait déraisonnable. Retenons cependant qu'en mathématique comme ailleurs, ce n'est pas dans le conformisme que l'on peut progresser [...]

Les résultats qui nous semblent *a priori* les plus naturels ne se vérifient pas toujours, et parfois c'est le paradoxe qui triomphe : c'est ainsi qu'une fonction continue (et même régulière) peut en un point n'être ni croissante, ni décroissante, ni maximum, ni minimum ; c'est ainsi que l'existence, paradoxale à première vue, de points de PEANO pour une équation différentielle est presque immédiate du point « totalitaire ».

*

* *

En résumé, de grands esprits ont commis des erreurs ou ont énoncé des vérités partielles qui n'ont pu résister à l'épreuve du temps. Il n'y a pas là de quoi se révolter. La réfutation du critique, pour radicale qu'elle soit dans le domaine mathématique, doit toujours au chercheur qui l'a suscitée. La grâce ne saurait toucher en permanence le mathématicien ; le mot rigueur ne fait que traduire la poursuite vers un idéal jamais atteint, où le sens critique détruit ce qu'annonce l'intuition, sauf à provoquer une intuition nouvelle, et ainsi de suite...