

Le problème des objets dans la pensée mathématique

Maurice CAVEING
mai 2001

éd° Vrin
coll. Problèmes & Controverses

29 / 33 / 53 / 118 / 205 POUR COMPRENDRE, IL FAUT REFAIRE

On voit [...] ce qu'il en est de l'accès aux objets mathématiques et ce qui en résulte pour le profane. Il ne s'agit nullement de seulement « écouter » le discours censé être tenu dans les livres de mathématiques. [...] Si la posture d'écoute ne suffit pas, c'est qu'il ne s'agit pas de comprendre ce que le mathématicien dit, mais de comprendre ce qu'il fait si l'on veut comprendre ce qu'il en dit. [...] « Regarder » ne suffit pas plus qu'« écouter ». Que faut-il faire ? Il faut refaire.

[...]

Au lieu d'opposer l'attitude opératoire et l'attitude contemplative, mieux vaut se demander quels rapports se nouent entre la nécessité d'opérer et la connaissance, c'est-à-dire la connaissance des propriétés de l'objet sur lequel ou en relation avec lequel on opère. [...] Il y a [...] quelque chose qui s'expérimente directement dans le processus opératoire lui-même et qui se sédimente en expérience par la répétition. Par suite, c'est à la condition de réeffectuer toujours à nouveau pour soi les opérations des calculs ou celles qui sont incluses dans des démonstrations que l'on « comprend » les mathématiques [...]

[...] les mathématiques sont dans le cas d'une science pour laquelle la réeffectuation des actes qui permettent au sens de se manifester est toujours à nouveau possible, à condition que l'on s'astreigne au réapprentissage des techniques opératoires tombées en désuétude. C'est ainsi seulement qu'est possible la réactivation du sens authentique, la reproduction des évidences dont vivaient les mathématiques du passé, et non par la simple variation eidétique pratiquée sur des objets dont le sens est sédimenté depuis longtemps. [...]

[...] Chaque sujet peut [...] réeffectuer pour soi et saisir de façon authentique ce que tout autre a pu déjà saisir. [...] L'omnisubjectivité et l'omnitemporalité sont ainsi corrélatives l'une de l'autre.

[...] « La mathématique est science des actes sans choses – et là des choses que l'on peut définir par des actes ».

34 DEDUCTION INTUITIVE (DESCARTES)

au moment où s'effectue l'enchaînement déductif il y a d'un même mouvement application de la règle et intuition du lien. Il ne peut d'ailleurs en être autrement : comment passer d'une proposition à la suivant d'un raisonnement si le lien qui les unit n'était pas intuitif, mais exigeait au contraire l'explicitation d'autres médiations ? Il faudrait des propositions intercalaires. Aucune proposition ne pourrait avoir de successeur immédiat et l'on irait à l'infini. Ainsi, selon Descartes, les liens entre propositions, de nature axiomatique, sont intuitifs : la démonstration est fondée sur des évidences potentielles successivement actualisées.

35 INTUITION PAR REEFFECTUATION

[...] Dans les longues démonstrations, [...] il n'est pas facile de se rappeler tout le chemin parcouru, et en particulier de saisir le lien entre la conclusion et les principes ; il faut donc remédier à la faiblesse de la mémoire en parcourant les étapes de la déduction « un certain nombre de fois par une sorte de mouvement continu de l'imagination qui voit intuitivement les choses une à une en même temps qu'elle passe aux autres, jusqu'à ce que j'aie appris à passer de la première à la dernière si rapidement que, sans laisser presque aucun rôle à la mémoire, il me semble voir la totalité simultanément par intuition ». Cette dernière phase de la connaissance est ainsi une réduction de la déduction à l'intuition : [...] comme si la temporalité propre à la déduction était compressible par réeffectuation de cette déduction elle-même.

36 L'ÉVIDENCE EST POTENTIELLE MAIS SANS ONTOLOGIE

l'évidence est susceptible de se présenter partout, mais elle est mobile et non toujours actuellement donnée, il faut dire que l'évidence est une propriété locale et ponctuelle du champ de conscience, ce qui signifie qu'elle est de l'ordre phénoménologique et qu'il faut se garder de lui associer une ontologie, comme Descartes a cru pouvoir le faire en posant une classe d'objets qui de droit devaient être saisis dans une conscience d'évidence, les « natures simples ».

40 CONFUSION OBJET RÉEL & OBJET INTENTIONNEL (GÉOMÉTRIE)

l'intuition opératoire [...] est dans le cas [du tracé de droites dans le plan euclidien] difficilement distincte de ce que nous avons appelé « intuition objectale ». [...] Il y a ici une sorte de « boucle » : avant tout énoncé, la norme informulée qui est censée nourrir l'intuition opératoire est en même temps implicitement présente dans l'intuition « objectale » qui a pour contenu la représentation du domaine opération.

40-41 LOGIQUE DE L'ACTION

il n'est pas possible à la fois d'effectuer et de ne pas effectuer un acte bien déterminé : la logique de l'action comporte cette exigence bivalente qui est inscrite dans le concept même d'acte. [...] Lorsque Wittgenstein énonce : « Cela fait partie de la grammaire du mot « règle » que « p & non-p » ne soit pas une règle (si "p" est une règle) », nous remarquons que son propos attire l'attention sur le lien de fondation qu'on peut établir entre le principe de non-contradiction et l'aspect opératoire de la pensée mathématique, et au-delà avec la logique de l'action.

56 ORIGINE NON COMMERCIALE DES NOMBRES

les recherches anthropologiques récentes, portant aussi bien sur les sociétés sans écriture que sur les autres, font apparaître la grande diversité des domaines de la vie sociale dont lesquels sont investis les « nombres », c'est-à-dire les entiers et les fractions. [...] On doit souhaiter que ce panorama étendu et multidimensionnel des usages des nombres à travers les « cultures » soit de nature à éliminer les considérations pseudo-historiques répandues sur les « origines commerciales de l'arithmétique » !

77 IDÉALITÉ, M-OBJETS

nous entendons par « idéalité » : « un « être » qui n'est jamais offert par sa simple présence, mais par la médiation du système réglé des désignations qui permettent d'en disposer ».

[...] un M-objet « n'est pas un spectacle passivement reçu, livré tout constitué à une "conscience" qui n'aurait d'autre fonction que d'en être le contenant ». Si le triangle n'est qu'une représentation d'origine visuelle, ou encore la mémorisation d'une définition, dans l'un ou l'autre cas laissée inerte par la pure réceptivité passive, alors il n'est pas – ou pas encore un M-objet.

98 CRÉATION DE M-OBJET : IDÉALISATION & THÉMATISATION

les deux processus : idéalisation et thématisation posent des M-objets nouveaux de type différent. L'idéalisation étend le champ opératoire initial à des éléments idéaux, qui font violence aux intuitions antérieures. La thématisation dégage la structure grâce à laquelle éléments anciens et nouveaux peuvent être opératoirement composés, c'est-à-dire intégrés à un unique champ opératoire, former un unique ensemble d'éléments : elle fait donc passer à un niveau « supérieur » où le système des propriétés d'une opération désormais abstraite est à son tour posé comme M-objet, et exige des concepts d'un ordre d'abstraction plus élevé. Si l'idéalisation étend le domaine, la thématisation construit l'édifice.

105-106 REPRÉSENTATIONS DE M-OBJETS PAR LES LANGUES VULGAIRE ET MATHÉMATIQUE

On voit sans peine en quoi consiste l'erreur intellectuelle qui rend possible le développement de ce genre de thèse [vouloir inculquer aux Iqwaye nos mathématiques, produit « ethnographique » de la culture occidentale]. Il s'agit de la confusion entre les idéalités mathématiques et leur représentation. [...] comme d'autres classes d'idéalités, elles ont des représentations dans les langues vernaculaires [...] : ce genre de représentation peut être appelé « représentation impropre », dans la mesure où la désignation est en langue vulgaire. Les représentations propres sont les éléments d'une langue mathématique spéciale normalisée répondant à des exigences explicites et définies, c'est-à-dire ce qu'on peut appeler des symboles mathématiques.

107 NON-NEUTRALITÉ DES REPRÉSENTATIONS

les particularités des systèmes de numération historiquement utilisés, bien que ne portant que sur la représentation des nombres, ne sont [...] pas sans conséquences sur les mathématiques d'une culture comparée à une autre. En effet leurs capacités computationnelles ne sont pas exactement les mêmes, non plus que les facilités opératoires qu'ils offrent.

107-108 CONFUSION ENTRE NOMBRES ET LEURS UTILISATIONS

[...] il n'est nullement nécessaire que le concept soit *explicite* dans la culture qui utilise un système pour que sa dépendance à l'égard du concept soit néanmoins effective. **Est-ce là une conception « platonicienne » du concept ? Nullement.** [...] la non-explicitation du concept n'empêche pas que les opérations soient effectuées conformément à leurs lois et il n'est nullement nécessaire pour qu'il en soit ainsi que le concept existe « quelque part », soit dans un univers intelligible : il **fonctionne en réalité comme un pôle de régulation.**

En revanche, sa non-explicitation comporte un autre genre de conséquence : c'est que la représentation du nombre soit prise pour son essence ; c'est-à-dire **que soient « explicités » de faux concepts.** C'est ainsi qu'elle a pu donner lieu historiquement à des mythologies, à des arithmologies plus ou moins ésotériques, et aussi à des métaphysiques.

109 OMNITEMPORALITÉ (ET NON ATEMPORALITÉ)

En dehors de ce genre de référence [platonique ou cartésienne], il paraît difficile de maintenir la thèse de la transcendance à l'égard du temps ; or ce genre de référence tombe en effet sitôt que les M-objets sont conçus en relation avec **des axiomatiques sinon « désontologisées », du moins disjointes de toute métaphysique.** C'est pourquoi Husserl substitua à l'idée d'« intemporalité » des mathématiques, la notion d'« omnitemporalité ».

C'est n'est pas hors du temps mais pour tout temps qu'une proposition mathématique est vraie.

114-116 ILLUSION PLATONISTE DE L'OMNITEMPORALITÉ RÉGRESSIVE

Qu'en est-il [...] de l'omnitemporalité à gauche ou régressive ? [...] la position intuitionniste [...] s'oppose [...] diamétralement à la position platonicienne, selon laquelle la vérité révélée au moment de la démonstration, en tant que propriété des objets d'un monde intelligible, vaut aussi bien pour tout temps antérieur, quand cependant elle n'était pas encore connue : le nombre π n'avait pas attendu Lindemann pour être transcendant.

Même pour qui ne partage pas explicitement les thèses proprement métaphysique et extra-mathématiques du « platonisme », une telle affirmation pourrait paraître appropriée. **La racine de l'illusion se trouve [...] dans l'idée et dans le mot même d'« objet ».** Comment concevoir un « objet » qui ne soit pas le siège de toutes ses propriétés, même si toutes ne sont pas connues à l'instant t , et, si le nombre π est un « objet », comment concevoir qu'il soit revêtu de la propriété d'être transcendant seulement au moment où s'achève la démonstration qui prouve justement qu'il la possède ? [...] Le terme « objet » employé à propos des M-objets induit à l'erreur de les penser sur ce modèle. [...] Il est de l'essence d'un M-objet, en tant qu'idéalité n'ayant d'existence qu'intra-théorique, que son concept se développe et s'enrichisse de nouvelles déterminations au fur et à mesure que se développe la théorie mathématique elle-même. [...]

[...] **L'omnitemporalité régressive n'est qu'une illusion** [...]. On ne saurait donner sens à l'idée d'universalité quant au temps des résultats mathématiques que relativement au temps à venir succédant à leur démonstration. Le sentiment qu'ils sont dotés de l'universalité *ante* et *post* contient une extension abusive et ne repose que sur l'opposition schématique entre ce qui caractériserait des « objets idéaux » et le statut changeant des objets du monde empirique.

116 FONDEMENT DES MATHÉMATIQUES : CAPACITÉ UNIVERSELLE À OPÉRER

L'indépendance des mathématiques relativement aux sujets empiriques s'enracine [...] dans la propriété de la règle de ne s'adresser au sujet que dans la mesure où il opère en tant que sujet mathématicien.

117 EXIGENCE UNIVERSELLE DE LA PREUVE

La démonstration, informelle, usant de la langue vernaculaire, est en réalité, dans sa source, l'intériorisation en un discours unique et normalisé d'un dialogue méticuleux avec un objecteur idéal auquel l'homme de science est tenu de rendre des comptes, de rendre « raison », grâce au caractère de la preuve, ainsi devenue universelle

118-119 DES SUBJECTIVITÉS, UNE OMNISUBJECTIVITÉ MAIS PAS DE LA SUBJECTIVITÉ UNIVERSELLE

Chaque sujet peut [...] réeffectuer pour soi et saisir de façon authentique ce que tout autre a pu déjà saisir. [...]

Et pourtant le sujet mathématicien est bel et bien, et en tant que tel, individualisé. Il l'est dans son rapport opératoire même aux idéalités [...]. L'omnisubjectivité des domaines d'idéalités ne signifie point l'abolition de l'effectivité des subjectivités singulières [...] : il n'y a nulle nécessité de poser une subjectivité transcendantale à la manière de Kant.

Il n'y a pas opposition entre syntaxe et sémantique, dans la mesure où le développement de celle-ci a procédé de l'étude des propriétés des systèmes formels et donc de l'approfondissement de celle-là. [...]

[...] il n'y aurait aucun intérêt à mettre sur pied un système formel si aucun ensemble de problèmes appartenant au même horizon thématique n'était à résoudre, c'est-à-dire si rien n'était en vue qui dût fournir son premier domaine d'interprétation. En ce sens donc la sémantique précède la syntaxe. Par conséquent, **quand on dit que les symboles d'un système sont dénués de sens, ou vides, on veut simplement dire, qu'une fois le système construit, et conformément à l'abstraction nécessaire pour que soient explicitées les propriétés syntaxiques, ils sont posés méthodologiquement comme indépendant de toute interprétation, connue ou inconnue.**

[...] bien que l'acceptation de telle ou telle axiomatique relève de la liberté du mathématicien, et même si le caractère contraignant des règles qu'elle comporte découle du fait qu'elle a été choisie, **il y a au-delà une objectivité qui est l'attribut de toutes les axiomatiques possibles sur un domaine**, et qui découle de l'exigence, qui se manifeste à partir du domaine, **que le système formel construit réponde effectivement aux problèmes qu'il est urgent de résoudre** et permette d'effectuer la démonstration des énoncés en suspens.

[...] on ne peut parler du devenir d'un jeu [...]

[...]

Sous peine de se perdre dans de stériles exercices de combinatoire, la logique doit créer des langages dont les moyens d'expression soient adéquats aux structures mathématiques considérées, et par voie de conséquence il n'y a que des logiques partielles et *a posteriori* même dans le cadre classique, c'est-à-dire non intuitionniste.

127 ÉCARTS ENTRE PERCEPTION ET GÉOMÉTRIE

[la géométrie plane] constitue une abstraction par rapport au domaine des corps solides et dans son champ on peut citer comme particulièrement abstrait le triangle quelconque, auquel ne correspond aucun objet, même artificiel, donné dans le champ perceptif. Si quelques philosophes considèrent le graphisme d'un triangle comme le donné perçu originaire par rapport à l'idéalité géométrique, c'est qu'ils inversent le rapport entre l'idée et le graphisme. [...] **il convient de déceler la bévue qui consiste à prendre la représentation graphique pour la « source » de l'idée.**

À ce premier ordre de considérations, il faut ajouter la mention des écarts classiquement répertoriés entre perception et géométrie élémentaire. [...] **A fortiori ne peut-on tirer la géométrie euclidienne du donné perceptif**, à telle enseigne qu'il faut se poser nettement la question de savoir – si possible – pourquoi la géométrie élémentaire a été élaborée dans la forme euclidienne.

130 INTRICATION PHYSIQUE & MATHÉMATIQUE

le « réel » auquel les mathématiques sont censées être « applicables » est en quelque sorte déjà constitué *a priori* par les déterminations que lui impose [...] une géométrie euclidienne, dont la structure est pré-ordonnée à l'accueillir.

131 LA MATHÉMATIQUE N'EST PAS UN LANGAGE

Le point crucial où la différence [entre mathématiques et un « langage »] apparaît clairement est que **le propre d'un langage est de dénoter** : [...] dans leur rapport au réel physique, ou à tout autre domaine où elles sont susceptibles d'intervenir, **les théories mathématiques ne dénotent pas**, pas plus d'ailleurs que les théories physiques dans lesquelles elles s'investissent.

133 MATHÉMATISATION DU RÉEL, RÉIFICATION DE LA MATHÉMATIQUE : ABUS !

Ampère, pénétré de l'épistémologie empiriste qui est la sienne, est persuadé qu'il ne fait qu'exprimer, en quelque sorte dans un langage algébrique et analytique, les données de l'observation et de l'expérience, alors qu'il fait *a priori* des hypothèses singulièrement fortes qui déterminent le réel, bien loin de lui obéir passivement.

Plus généralement, il est toujours hâtif d'interpréter les liens qui peuvent apparaître entre une théorie physique et une théorie mathématique comme valant preuve d'une expression directe du réel par les mathématiques et donc d'une signification « ontologique » de celles-ci, dont certains s'étonnent, et d'autant plus d'ailleurs qu'ils peuvent être partisans de la thèse de la « libre création » des M-objets.

157 TENEUR NULLE EN MOI DU DISCOURS MATHÉMATIQUE

En tant qu'opérateur de communication, le langage lui-même sollicite le discours sur soi-même chez tout sujet éprouvant le « besoin de communiquer ». Et il y a, comme chacun sait, mille et une façons de parler de soi, les unes explicites, les autres implicites, les unes directes, les autres indirectes. Récit des songes, associations libres, journaux intimes, mémoires, allusions romanesques, confidences, récits d'aventures vécues, et ainsi de

suite, jusqu'à la coloration affective d'un propos traitant en apparence d'un tout autre sujet que des préoccupations instantes du locuteur, ou jusqu'aux jugements portant sur les êtres, les choses et les faits culturels, lesquels révèlent – cela est trivial – le goût et la personnalité de celui qui les formule. Tout discours peut ainsi être considéré comme présentant une certaine « teneur » en information sur le moi intime, l'état psycho-physique, la personnalité (caractérielle, sociale, intellectuelle) du sujet, et, par delà ces données, sur la vie intentionnelle de sa conscience elle-même, mais cette fois de façon médiate et indirecte. On peut poser que cette teneur « teneur » est variable de 1 à 0 : 1 quand elle forme l'intégralité du contenu du discours considéré, 0 quand elle est nulle, c'est-à-dire [...] dans certain type de « discours » mathématique.

166 RÉSUMÉ DES CONTRAINTES D'UNE LANGUE FORMELLE

une langue formelle symbolique résulte de contraintes très fortes : la réduction du signifié aux règles de l'usage des signes ; la clôture du lexique ; l'existence de règles de bonne formation des expressions ; la réduction des définitions des termes non primitifs à des abréviations ; l'explicitation complète des règles d'inférence permettant de constituer les séquences d'expressions ayant valeur d'enchaînement déductifs ; des exigences définies concernant les propriétés du système d'axiomes (axiomatique) requis pour une théorie.

[...] Pour s'assurer de l'identité de signification d'un langage formel pour tous les sujets mathématiciens, il n'y a d'autres vérifications à opérer que de voir si les règles ont été appliquées.

184 SYNTHÈSE A PRIORI

La synthèse n'est pas un processus de rassemblement et de compénétration d'éléments, ni de coalescence de parties dans un tout d'essence nouvelle. Elle est plutôt développement d'un objet initial, par métamorphoses enrichissant ses propriétés, jusqu'à l'apparition d'une structure qui permettra d'opérer dans la globalité de l'objet la transformation finale. La synthèse, comme le dit Cavaillès, ne réclame rien d'autre qu'elle-même pour s'effectuer ; elle est d'un bout à l'autre intra-mathématique. Elle est donc *a priori*. Les M-objets sont bien construits, en tant que synthétiques *a priori*.

[...] quant au temps, il faut l'extraire de l'enchaînement des constructions, il n'est que le « le rythme » de la synthèse, l'ordre présidant au geste opératoire.

193 TERMES : NŒUDS DE RELATIONS

en mathématiques « les relations sont toujours inhérentes aux termes », ce qu'il faut sans doute comprendre comme le fait que les « termes » ne sont rien d'autre que des nœuds de relations.

239 DES FIGURES GÉOMÉTRIQUES AUX MÉTAPHYSIQUES OBJECTALES ILLUSOIRES

même les propriétés du nombre entier pouvaient être connues si on le représentait par des figures de points discrets [...]. Cela signifiait que la figure de géométrie était devenue le paradigme des idéalités mathématiques. [...] C'est ainsi que le champ des mathématiques apparaît comme un monde d'« objets », quoique entièrement différents des objets du monde.

Ainsi s'explique que la géométrie élémentaire ait été pensée comme décrivant un monde d'objets-figures structurellement stables et composés d'éléments simples, les relations entre elles et entre eux étant pensées comme secondes par rapport à leur position d'existence objectale. Ainsi s'explique que le M-objet, qui n'est finalement qu'un moment thématique dans le parcours du réseau des relations, un repos provisoire entre deux enchaînements d'actes, ait été réifié au point qu'il a pu apparaître, à certains moments de l'histoire des mathématiques, comme la chose même dont s'occupe la géométrie, la « figure », le matériau même, prédonné, de la science. Ainsi s'explique que le mouvement de la pensée relationnelle se soit figé dans la contemplation d'une idéalité morphologique, la figure de géométrie, qui a tellement pesé, au cours de l'histoire des mathématiques, sur la réflexion épistémologique et sur la pensée des mathématiciens qu'ils en sont venus à croire pendant très longtemps qu'ils avaient réellement affaire à des objets, réels à leur manière, ultime instance de la connaissance en tout cas, et dont on pouvait se demander s'ils venaient du Ciel ou de la Terre.

Ainsi conçu, l'univers des M-objets avait assez exactement les caractéristiques d'un monde de « choses », posées en soi, extérieures ontologiquement au sujet connaissant. [...] Dans le cas des M-objets, la structure de l'illusion [...] consiste en ce que la nécessité épistémologique de l'unité thématique d'un système de relations est prise pour une nécessité ontologique : l'existence d'entités, objets ultimes de la connaissance mathématique. La racine de l'illusion est en quelque sorte double : d'abord le mode de présentation des M-objets enchaînés aux idéalités morphologiques corrélatifs d'une saisie effectivement « objectale » de leur figuration, ensuite le transfert de sens d'une telle saisie à tous les autres M-objets en vertu de la valeur paradigmatique de la géométrie. [...] L'illusion assurément n'empêche en aucune façon de « faire des mathématiques », de tirer des conclusions valides, d'obtenir des résultats valides. Elle a simplement pour effet d'introduire une herméneutique métaphysique des mathématiques.

l'intuition au sens kantien était vouée à une élimination progressive dans le cours ultérieur de l'histoire de la science. C'est en effet dès après Kant que, par une ironie de l'histoire, les mathématiques devaient se libérer des liens qui enchaînaient les M-objets aux idéalités morphologiques et mettre fin à une sorte d'aliénation pour découvrir leur destination véritable.

[...]

On peut [...] dire en définitive que des trois généralisations de la géométrie : l'Analyse (qui traite de fonctions à plus de 3 variables), le calcul vectoriel (espaces à n dimensions), les géométries non euclidiennes, chacun s'est développée par élimination de l'intuition spatiale dans laquelle Kant voyait la condition irréfragable de la connaissance.