intuition et intuitionisme

Jean LARGEAULT
1993

éd° Vrin
coll. Mathesis

Chapitre III : le premier acte de l'intuitionisme, le langage et les constructions

68 Heyting dévoie Brouwer ?

A. Heyting, initiateur involontaire d'une conception selon quoi la réforme de la logique est la raison d'être et l'enjeu de l'intuitionisme brouwerien

[footnote : Si on le désire, on trouve dans certains articles de Heyting (1936, 1968) les prémices de cette conception : lointaine origine de la thèse que l'intuitionisme est une espèce de « révisionisme logique » – métaphore politique dont les inventeurs ne sentent pas la vulgarité.]

70-1 en devenir

on aurait autant de raison d'insister sur la différence entre vérité toute faite et vérité en devenir, ce qui a même l'avantage de ramener l'attention de l'épistémologie vers l'ontologie. À l'intuitionisme (en général) est souvent associé une métaphysique du *devenir*. Exemples : Bergson associe intuition et durée ; l'intuitionisme brouwerien contient une philosophie de l'infini en devenir, et ses principaux aspects mathématiques découlent de cette source. La première donnée de l'intuition est la différence entre deux sensations qui se succèdent dans le temps, et l'itération de cette expérience (donnée elle aussi avec la successivité temporelle). Une liaison entre l'intuition, le temps et l'infini inachevé est donc vraisemblable.

72 acte & vérité

l'expérience ou l'épreuve du vrai, que mentionne l'éminent géomètre […], ne comporte pas de *dualité* entre sujet et objet. Ce n'est donc point l'expérience des empiristes.

Cette expérience, faute de laquelle les vérités sont vides, est une *intuition intellectuelle* – en l'espèce un acte ou l'intuition d'un acte qui engendre la réalité ou les objets mathématiques. « La mathématique est science des actes sans choses, et par là des choses que l'on peut définir par des actes. Faire, pouvoir sont des mots essentiels » […] [Paul Valéry]. Interprétation plus conforme à l'esprit de Brouwer que les poncifs du vérificationisme ou de l'anti-réalisme.

73 intuitionisme & constructivisme

J. M. Beeson propose de définir l'intuitionisme brouwerien par la réunion de trois éléments : une tendance constructiviste, les suites de choix, et la continuité. Cette caractérisation élégante et commode vient naturellement quand on cherche à délimiter l'intuitionisme d'avec d'autres constructivismes (par exemple Bishop n'admet pas de suites de choix ni le continu brouwerien, etc.). Plus intéressants est sa conjecture que la recherche des liaisons entre continuité et constructivité aurait suscité la notion de suite de choix, voire guidé tout le développement de la théorie de Brouwer.

76 premier acte de l'intuitionisme

Le premier acte [de l'intuitionisme] sépare les mathématiques du langage et de la logique : il importe de distinguer les relations immédiates qu'entretiennent les objets mathématiques, d'avec les relations logiques des signes représentants ces objets. Le langage est un moyen d'expression toujours imparfait, qui sert tant bien que mal à communiquer sans créer d'existences exactes.

[…] On évite les tracasseries inutiles si les mathématiques « réelles » sont *indépendantes du langage* (et de la logique). Voilà le fond du premier acte de l'intuitionisme.

Ce premier acte est d'abord un acte nominaliste de *négation* et de destruction, débarrassant la scène des obstacles qui recouvrent ou empêchent l'intuition créatrice (antithèse) […]. Il a aussi un contenu *positif*, puisqu'il embrasse tout ce qui est donné immédiatement avec la perception du glissement du temps et son itération indéfinie : la suite des entiers naturels et le principe d'induction. Considéré relativement aux mathématiques classiques il a une portée conservatrice, puisque les mathématiques séparables sont restituées sous une version à peine modifiée. En résumé, le premier ace exprime la partie critique de l'intuitionisme et aussi son aspect conservateur de ce qui est déjà constructif dans les mathématiques classiques […].

78-9/80 Logique intuitioniste ?

Quelle logique convient aux mathématiques classiques, laquelle serait le mieux appropriée aux démonstrations intuitionistes, Brouwer n'a pas à s'en soucier. Pour les démonstrations intuitionistes *aucune logique n'est appropriée*, car le développement de l'expérience (intérieure) ou la progression de l'activité mathématique ne se laisse pas remplacer par une transition logique de propositions à propositions. « Une proposition ne contient pas de vérité avant que cette vérité ait été *expériencée*» ([1948]). Une logique intuitioniste n'est ni impossible ni inintéressante : elle n'a rien à prescrire d'avance à la construction de preuves. Elle est au plus une classification des méthodes potentiellement aptes à réduire un problème q à une problème p […]. À supposer que la logique recense ces méthodes, rien n'autorise à en tenir la liste pour exacte et complète. L'exemple des mathématiques classiques le montre : se sont introduits des modes d'inférence inconnus avant Cantor (induction transfinie, raisonnement de la diagonale, principe de choix).

[…] **la logique n'est rien de plus qu'une réunion de schémas représentatifs d'enchaînements de propositions qui correspondent à des séquences de vérités déjà éprouvées**. Ces schémas n'ont nullement valeur de règles pour former des démonstrations (on dit : de règles de preuve). Cela rappelé, il est amusant de voir Brouwer saluer avec une fierté charmante l'existence d'une logique intuitioniste[1], tandis que le fidèle Heyting s'exprime avec réserve et modestie sur la portée de sa formalisation[2].

[footnote 1 : [1954], § 1 « En dépit du rejet de la logique classique comme instrument de découverte de vérités mathématiques, les mathématiques intuitionistes comportent leur théorie générale des assertions mathématiques, théorie qu'à juste titre on appellera logique mathématique intuitioniste, et qui comprend une théorie du tiers exclu. » Il n'est pas impossible que Brouwer ait voulu se moquer.

L'intuitionisme a engendré une logique, événement inattendu que Brouwer a accueilli avec humour. Cette logique passe maintenant pour le noyau du système : renversement ironique des idées du fondateur.]

[footnote 2 : Heyting 1978, p. 15 : « Mes articles sur la formalisation de la logique intuitioniste... ont peu contribué à l'effort de ma vie, amener les conditions d'une meilleure compréhension et appréciation des idées de Brouwer. Ils ont détourné l'attention des idées sous-jacentes vers le système formel ».]

Chapitre IV : le tiers exclu, le sujet créateur, et les propositions négatives

88 Genèse du mythe de la logique sur les objets infinis

[footnote : [1919], note 4, CW, p. 231 : « À mon avis l'axiome de résolubilité et le principe du tiers exclu sont tous les deux faux. La croyance en ces dogmes a eu historiquement pour cause que l'on a commencé par abstraire la logique classique de la mathématique des sous-ensembles d'un ensemble fini spécifié, puis attribué à cette logique une existence *a priori* indépendante de la mathématique, pour finir par l'appliquer, au nom de sa soi-disant apriorité, à la mathématique des ensembles infinis. »]

92-3 Inclusion du formalisme dans l'intuitionisme

[footnote : « En mathématique intuitioniste le principe du tiers exclu, quoique non vrai, est cependant sans contradiction, pourvu qu'on ne l'affirme en mode simultané que pour des species finies de propriétés... Sur la base des idées intuitionistes, on peut, en dehors des *théories vraies*, construites à l'écart du tiers exclu, dériver aussi, en recourant à ce principe, assujetti à la restriction ci-dessus, des théories *non contradictoires*, qui embrasseront une partie beaucoup plus étendue de la mathématique traditionnelle que cela n'est le cas des théories vraies. Une mécanisation appropriée du langage de cette mathématique non contradictoire du point de vue intuitioniste, devrait fournir exactement ce que l'école formaliste vise à atteindre » [1929]. C'était, avant le temps, prendre la mesure exacte du programme de Hilbert. La concision à la fois de la pensée et du style est admirable.]

Conclusion : le soi, l'intellect, et la conscience

167 Fondements intuitionistes de la mathématique ?

Que sont les mathématiques ? Brouwer a une réponse : la partie exacte de notre pensée. (En effet elles sont le déploiement de l'intuition primordiale.) Cela donne aussi à voir que sa conception des *fondements*, mot qu'il s'abstient d'employer à cause de ses connotations hilbertiennes, diffère de celle qui associe les fondements à la problématique inutile de la certitude et de la sûreté.

[…] Pour Brouwer autant que pour Platon **objets et faits mathématiques** existent, seulement ce **sont des actes**, non pas de choses.

169 Illusion de l'objectivité

La prétendue objectivité, dont les épistémologues depuis Kant célèbrent l'éminente dignité, constitue, selon Brouwer, une forgerie de philosophes : cette objectivité n'est qu'un consensus linguistique, une artefact de la pensée, non pas l'accord avec une réalité indépendante, en sorte que dans les sciences naturelles il n'y a point de vérité. L'objectivité est en général définie par des critères linguistiques, l'universalité et la cohérence interne, ce qui implique qu'elle est produite par l'intellect (appelé Raison en l'occurrence), disons qu'elle consiste au plus dans la qualité de certaines de nos conceptions d'être relativement stables. Le principe de causalité, qui organise les données de la conscience et leur procure ce genre de stabilité relative, est entièrement subjectif, il ne se rapporte qu'à notre façon d'organiser l'expérience […]. En conséquence les théories scientifiques sont des fictions qui réussissent le plus souvent (tout marche, disait l'autre, mais plus ou moins bien) – sans que nous comprenions *pourquoi*

175-6 Origine du schisme mathématiques classiques vs intuitionistes

Phénomène paradoxal : la critique des mathématiques classiques par Brouwer est irréfutable et n'a pas convaincu[1]. Quelques-uns ont cru, ou feint de croire, que si on voulait en tirer les conséquences, on devrait *jeter au feu* tous les livres de mathématiques (Hume réservait ce sort cruel aux spéculations des métaphysiciens). Personne ne consent à pareille épuration drastique.

Sans embrasser la stratégie de la table rase, les professionnels eussent au moins pu entreprendre de développer les mathématiques intuitionistes, comme fut fait au XIX^e^ pour les géométries non orthodoxes. Il n'en alla point de la sorte, ce qu'on explique par la croyance que l'intuitionisme entraînerait l'abandon de conceptualisations et de théorèmes classiques, rendrait les démonstrations plus difficiles et plus compliquées. La réforme brouwerienne impose des sacrifices, mais ces sacrifices sont-ils réellement *nécessaires* ? […] Une raison davantage plausible tient au caractère intrinsèque de l'intuitionisme. Les objets classiques sont entièrement exposés dans l'espace (ensembles dont tous les éléments sont co-présents en acte, graphes fonctionnels ou fonctions en extension, etc.). L'intuitionisme écarte ces objets statiques au profit d'objets dynamiques, qui se réalisent progressivement dans le temps. Mais d'un autre côté les professionnels qui raisonnent toujours en intension, ne devraient pas se sentir dépaysés dans l'intuitionisme, dont les principales notions dont références à des entité intensionnelles (les règles de déploiement ou d'engendrement sont justement de cette sorte).

Il est naturel que l'intuition, opération intime de la conscience, ait une affinité avec le temps. Des mathématiques fondées sur le temps conduisent aux nombres et aux généralisation du nombre, finalement aux structures algébriques qui sont hors du temps, alors que la géométrie, fondée sur l'espace, conduit aux systèmes d'équations qui déroulent des processus temporels (évolution d'états).

L'intuitionisme serait *une autre* mathématique, qui différerait de la classique par une origine temporelle plutôt que spatiale (géométrique).

[footnote 1 : Cela signifie-t-il que nos mathématiques reposent sur une ontologie substance-attribut, reflétée dans notre langue (phrases sujet-copule-attribut), héritée des Grecs anciens, tandis que les mathématiques intuitionistes supposent une ontologie de processus, qui répugne à nous habitudes de pensée.]