

L'univers de mathématiciens

L'ethos professionnel des plus rigoureux des scientifiques

Bernard ZARCA
2012

éd° Presses universitaires de Rennes
coll. Le Sens social

46 EVIDENCE & GONSETH

[footnote 21 : Se référant au logicien-mathématicien Paul Bernays, l'épistémologue Evert W. Beth écrivait : « Ce penseur fait remarquer que [l'évidence n'est pas, comme le pensait toute la tradition philosophique, un élément invariable à travers l'histoire intellectuelle de l'humanité ; elle est tout au contraire une entité complexe, susceptible d'être influencée par nos expériences](#). Il y a de l'évidence qui se perd, mais il y a également de l'évidence qui se gagne. » (Beth, 1961, p. 137.)]

58-9 LES AXIOMES MARQUENT L'ACHÈVEMENT D'UN PROCESSUS EN PARTIE INCONSCIENT

On ne crée par une nouvelle théorie mathématique en sortant des axiomes de son chapeau, en en démontrant la consistance et l'indépendance, puis, enhardi par la certitude de s'appuyer ainsi sur un roc, en en déduisant quasi mécaniquement des théorèmes dont on ne saurait hiérarchiser l'intérêt. Au contraire, [l'axiomatisation conclut l'histoire d'une telle théorie](#). Elle sert à unifier et à fonder les théorèmes existants. Elle parachève le long cheminement non linéaire, tout à la fois individuel et collectif, qui comprend, entre autres étapes qui se suivent, se superposent partiellement, bifurquent, se recoupent ou se rejoignent, l'articulation de concepts nécessaires au déploiement de quelques idées-force, leur mise en forme théorique ultérieurement unifiée, leur critique, leur éclaircissement et leur précision aboutissant à leur définition canonique, le soulèvement de problèmes et, en vue de leur résolution, l'intuition de vérités approximatives, souvent grâce à des transferts et à des explorations analogiques, la formulation de conjectures précises et la recherche d'arguments, s'appuyant sur des résultats déjà prouvés, qui plaident en leur faveur et qui permettent de les distinguer des simples questions ouvertes (telles que l'état d'avancement des mathématiques ne permet pas encore de pencher pour leur vérité plutôt que pour leur fausseté), la démonstration effective de séries de théorèmes dans ce cadre en construction et, pour ce faire, l'utilisation de techniques exploratoires éprouvées, comme celle qui consiste à aller voir ce qui se passe dans l'espace dual de celui où l'on s'est placé, ou l'invention de nouvelles approches, l'imagination de procédures de preuve, qui sont quelquefois de véritables tours de force promis à devenir *des classiques*, telles la méthode de la descente infinie de Fermat, la méthode de diagonalisation de Cantor, en son temps contestée, ou, plus près de nous, celle du *forcing* de Paul Cohen, qui ne fut pas d'abord comprise par les spécialistes du champ tant elle innovait, mais qui finit par s'imposer, fut généralisée et appliquée avec succès à la résolution d'autres problèmes que celui pour la résolution duquel Cohen l'avait conçue. [L'ensemble de ce travail comporte essais et erreurs et, pour chaque agent individuel, est en partie inconscient \[...\].](#) Poincaré remarquait d'ailleurs à propos de [ce travail inconscient](#) « qu'il [n'est possible et en tout cas fécond que s'il est d'une précédé, et d'autre part suivi d'une période de travail conscient](#) » ; et à propos des inspirations soudaines qui *semblent* venir de nulle part, il ajoutait :

« ces inspirations subtiles ne se produisent qu'après quelques jours d'efforts volontaires, qui ont paru absolument infructueux et où l'on a cru ne rien faire de bon, où il semble qu'on a fait totalement fausse route. Ces efforts n'ont donc pas été aussi stériles qu'on le pense, ils ont mis en branle la machine inconsciente, et, sans eux, elle n'aurait pas marché et n'aurait rien produit. » (Poincaré, 1999, p. 51)

78-9 / 80 / 118-9 ARBITRAIRE DES AXIOMES ?

Le danger principal d'un esprit non informé serait tenté d'associer à une telle situation cognitive [où l'on établit, à défaut de *vérité*, la *cohérence relative* d'un système d'axiomes] serait que les mathématiciens bâtissent des théories et démontrent des théorèmes à partir d'axiomes arbitraires, comme s'il s'agissait d'un jeu dont on choisirait et modifierait les règles initiales à sa guise. Cette orientation proprement ludique de la recherche est exclue par le fait contraignant qu'il faut, à chaque étape de leur développement, tenir compte des acquis des mathématiques. Certes peut-on raisonner et doit-on souvent raisonner à partir de conjectures pendantes, pour démontrer, par exemple qu'il y a une relation d'équivalence ou une relation d'implication entre deux énoncés conjecturaux ; mais encore faut-il que ces énoncés soient

de quelque intérêt, si ce n'est de quelque profondeur, qu'ils s'insèrent dans une problématique motivée par l'histoire d'une discipline. Ainsi, bien des théorèmes intéressants n'ont été démontrés que sous l'hypothèse que la conjecture de Riemann était vraie. Ces théorèmes peuvent éclairer la grande conjecture qu'avait énoncée un profond esprit mathématique, en dévoiler une part de la puissance et de la portée, montrer la difficulté du travail restant à accomplir. Ils renforcent alors la croyance des mathématiciens en sa vérité et les incitent à persévérer dans la recherche d'une démonstration.

[...]

Reste que, d'un point de vue historique, **comptent plus que la vérité des propositions mathématiques l'enrichissement de l'univers qu'explorent les mathématiciens et la transformation de leurs questionnements, lesquels conduisent à un approfondissement du sens des vérités établies dans le passé.**

[...]

Richard Courant, qui dirigea à New York un institut de mathématiques appliquées, écrivait[...] en 1939 :

« Une menace sérieuse pour la vie même de la science est contenue dans l'affirmation selon laquelle les mathématiques ne sont qu'un système de conclusions tirées de définitions et de postulats qui doivent être consistants mais qui en dehors de cela peuvent être créés par la libre volonté des mathématiciens. Si cette description était exacte, les mathématiques ne devraient attirer aucune personne intelligente. Elles ne se réduiraient qu'à un jeu avec des définitions, des règles et des syllogismes sans motivations ni buts. L'idée que l'intelligence peut créer des systèmes de postulats significatifs à sa fantaisie est une demi-vérité trompeuse. **C'est seulement sous la férule d'une responsabilité à l'égard de la totalité organique, et seulement guidé par cette nécessité intrinsèque, que l'esprit libre pourra réaliser des résultats disposant d'une valeur scientifique.** » (Cité in Kline, 1987, p. 527.)

81/84 LOGIQUE PRIMITIVE FONDÉE DANS L'ACTION ET L'OBJET QUELCONQUE (GONSETH)

La *logique naturelle* se construit sur la base de nos potentiels cérébraux, de leur activation socialement prise en charge, **de l'action élémentaire ainsi permise dans le monde physique tel qu'il est à notre échelle**, les objets solides ne traversant les murs en les laissant intacts, par exemple, l'existence d'invariance dans le temps étant nécessaire au repérage de positions dans l'espace proche, etc., **et, pour finir, de la sanction de cette action par les objections de l'expérience ou d'autrui.** Ainsi, l'enfant a déjà vite appris, au stade où il peut marcher, que pour atteindre son ourson qui se trouve dans son lit qui se trouve dans sa chambre, il lui faut, de manière économique, aller dans sa chambre, se diriger, à peine franchi le seuil, vers son lit et se saisir de l'ourson qu'il y a laissé et qui ne s'est pas déplacé tout seul, non pas chercher où peut bien se trouver cet ourson dans toute la maison, ne pas le trouver dans différentes chambres explorées dans un ordre quelconque, puis étant tombé dessus dans l'une d'entre elles, décider qu'il est bien devant *son* lit, et, seulement après avoir levé les yeux, qu'il est dans *sa* chambre. L'expérience serait très perturbante si un malin génie déplaçait constamment et aléatoirement l'ourson et le lit à l'insu de l'enfant, et elle le serait plus encore si le monde lui-même n'avait ni stabilité ni régularité minimum. (S'il en était ainsi, **nous pourrions effectivement avoir une logique autre, folle pour nous tels que nous sommes dans le monde tel qu'il est** ; mais nous ne saurions imaginer comment quelque cadre institutionnel que ce soit la ferait advenir.) Bref, l'enfant apprend vite en pratique que si A dans B et B dans C, il peut utiliser cette information qu'il a enregistrée conformément à une règle de transitivité qui dit que A est alors dans C – règle qu'il ne se formule évidemment pas, mais que l'on peut formuler *a posteriori*, comme **une des lois de la logique naturelle de l'action élémentaire dans le monde.** La clarté d'une telle formulation se conquiert souvent *contre* le fonctionnement de la langue. Par exemple, le *dans* de localisation spatiale n'a pas la même fonction linguistique que le *dans* de l'exclamation maternelle : « Il ne trouve pas ourson, il est *dans* tous ses états ! »

[...]

[...] Cet usage du mot [logique (logique d'action, logique marchande, logique interne)] conduit à se demander de quoi l'on peut traiter sérieusement en dehors du cercle étroit des logiciens de métiers.

On doit d'abord repérer **l'obéissance à des principes logiques dans l'action élémentaire de l'homme qui s'adapte au monde** ne fût-ce que pour sa survie, **en relation avec l'objet quelconque.**

215- ??? FIN DE LA CERTITUDE ?

Mazur rapport qu'un ami allemand lui avait fait remarquer que *Mathématiques* se disait dans sa langue : *Wiskunde*, mot qu'il traduit littéralement en anglais par *Sure-ology* (Mazur, 1997, p. 197) et que l'on peut rendre en français par *Science de la certitude*. Le consensus est fort sur le fait que les mathématiques produisent des résultats certains dès lors qu'il sont été vérifiés, bien que la vérification laisse passer quelques erreurs, en général mineures.