

Les mathématiques et la réalité

—
Essai sur la méthode axiomatique

Ferdinand GONSETH
1936

bibliothèque Félix Alcan
coll° bibliothèque de philosophie contemporaine

Chapitre premier : EXPLICATIONS PRÉLIMINAIRES

§2 MOUVANCE DES CONCEPTS

les concepts mathématiques eux-mêmes ne sont pas immuables. C'est pourquoi il faut se défendre contre la tentation de considérer les objets du monde de la pensée comme de choses terminées et possédant des caractères et des qualités définitivement fixés.

[...] Ce qui fait la réalité des choses, ce qui distingue le réel de l'imaginé, ce qui constitue le physique et en exclut le métaphysique n'est pas non plus donné de façon définitive ; n'existe pas non plus de façon éternelle et prédestinée. Ce que nous appelons la dure objectivité des faits ne s'impose pas de soi-même, en déclenchant automatiquement un acte d'aperception inexorablement adéquat et toujours identique à lui-même. La figure du réel et de l'objectif que nous opposons à l'imaginaire et à l'arbitraire est, elle aussi, mouvante et inachevée.

§3 LA CONNAISSANCE PRIMITIVE EST SOMMAIRE ET PRATIQUEMENT SÛRE

IDOINE. [...] L'affirmation :

b) Il faut tenir pour existante et pour efficace une certaine concordance entre nos idées et les choses qu'elles ont pour objet n'implique [...] pas que notre connaissance des idées, des choses et de leur adéquation réciproque ait dépassé le stade embryonnaire où la convenance (même relative) et le succès (même provisoire) sont les seuls critères. Nous acceptons que cette connaissance soit encore sommaire. Que nous ne sachions nous en faire encore qu'une image informe et sans contours définis. Qu'elle soit provisoire et rien de plus qu'une ébauche encore inachevée.

Mais nous affirmons en même temps que les premières assises de toute notre connaissance ont un caractère analogue. Et si, pour commencer, nous faisons appel ces notions grossières et primitives, à ces idées d'une justesse sommaire, à ces connaissances toutes brutes et d'une exactitude abrégée, c'est que nous voulons garder le contact le plus étroit possible avec les faits dont nous sommes *pratiquement sûrs*. Leurs « contenu de réalité » est suffisamment dense que que, si on ne les emploie pas en dehors de leur cadre naturel, leur interprétation et leur signification soient pratiquement immédiates.

§4 CONNAISSANCE & JUGEMENTS PRIMITIFS

Concevoir l'objet en opposition avec le sujet, c'est [...] l'un de ces actes intellectuels grossiers et primitifs sur lesquels se fonde l'exercice de la pensée. Et tenir la connaissance pour accessible, c'est l'un des principes, l'une des règles d'action qui informent notre activité mentale.

[...] Même lorsque nous leur ferons entièrement confiance, nous ne perdrons pas de vue que nos jugements ne sont que des « aperçus ». Qu'il ne serait pas contraire à l'ordre des choses qu'ils dussent être remis en question.

§5 SUR LA CONNAISSANCE PRIMITIVE

Nous savons que le jour succède à la nuit. Qu'un objet pesant, qu'on ne soutient pas, tombe. Que l'eau coule, etc. etc. Parmi toutes ces connaissances, il n'y en a aucune qui puisse être dite parfaite et absolue. Elles ne nous font participer à qu'à une réalité assez grossière et superficielle. Elles ne représentent que des renseignements sommaires, malgré leur importance et leur pertinence.

[...]

Tout cet amas de connaissances fondamentales et imparfaites ; toutes ces vues justes, mais seulement de façon approchée ; toutes ces idées inachevées sur lesquelles s'exerce notre activité mentale, nous voulons les

appeler les *éléments de la connaissance intuitive*. (Peut-être détournons-nous un peu le mot intuitif de sa signification habituelle. Mais celle-ci est extrêmement vague et flottante.)

PARFAIT. [...] Où sont les limites de votre connaissance intuitive ? Comment en reconnaissez-vous les éléments ?

IDOINE. [...] j'insiste sur le fait que la « sphère de l'intuitif » n'est pas étroitement délimitée ; qu'on ne sait pas exactement où elle s'arrête et tout ce qu'elle embrasse. Vous lui en faites un grief ! J'y vois au contraire un caractère typique de toutes les désignations, délimitations et définitions qui nous permettent de nous orienter dans la complexité du réel (et ce caractère d'incertitude se retrouvera jusque dans la définition mathématique). De ce point de vue, la définition de l'intuitif qui précède doit être considérée comme une définition modèle. Car toute son imprécision ne l'empêche pas d'être opérante, adéquate, efficace, — entre certaines limites naturellement. **Et nous n'en exigeons pas davantage.**

[...] Il ne s'agit plus de savoir si les notions et les jugements que je viens d'appeler intuitifs ont un sens plein. C'est une quelque sorte leur nature qui est maintenant en question. Je ne puis me les représenter que comme *des ébauches encore en constant état de devenir*, tandis que Parfait ne se les imagine qu'appuyées sur des concepts immuablement fixés. [...] En un mot : **Pour être effective, la connaissance n'a pas besoin d'être portée la perfection dans aucune direction.**

§6 JUGEMENTS PRIMITIFS

Dire qu'un jugement [intuitif tel que « Cette chose qui s'approche avec rapidité est une automobile »] est objectif, c'est simplement dire que sa validité est indépendante de ma volonté, comme l'est l'existence d'un objet. [...]

PARFAIT. [...] Dans la « sphère de l'action immédiate vous pouvez avoir l'illusion que les représentations inachevées et les concepts encore en devenir suffisent pour soutenir et diriger toute votre activité. Mais cette erreur ne trouvera pas accès dans le monde des idées. La connaissance des idées est sous le signe du Vrai, et non sous le signe de l'informe et du chaotique.

[...]

IDOINE. — Vous moquez-vous ? Vous savez bien qu'il ne peut être question d'une démonstration par la logique. Il y a des constatations dont l'évidence pratique s'impose. **On démontre le mouvement en marchant. Démontrer, c'est rassembler les éléments de la certitude pratique** (même en n'excluant pas la possibilité de circonstance singulières où elle pourrait être démentie). Et c'est dans ce sens que nous invoquons le témoignage des faits.

[...] nous savons — non d'une connaissance absolue et toujours infaillible, mais de façon toute pratique et de manière à pouvoir agir en conséquence — *nous savons que nos idées sur le monde est objets physiques méritent d'être crues*. Elles nous trompent rarement si nous n'en forçons pas la portée.

Ce *savoir* est un élément de connaissance tout à fait positif. Évidemment, il s'agit là d'une connaissance empirique ; d'une connaissance qui rejoint immédiatement les actes de la vie quotidienne et qui s'y incorpore. Mais si nous voulons prendre au sérieux le sentiment de sécurité qui accompagne nos gestes les plus habituels, il nous faut reconnaître :

a) Que **nous ne sommes pas sans savoir quelque chose de notre propre connaissance des choses**. [...]

Et b) Que notre façon de réagir implique une certaine connexion utilisable entre cette connaissance des choses et la conscience subjective que nous avons de celle-ci.

[...]

La connaissance positive est celle qui, informant nos pensées et nos actions, ne se voit pas démentie par le développement des pensées et les conséquences des actions. Même si le succès n'est que relatif, et que des circonstances nouvelles ou imprévues le remettent toujours en question. [...] Il n'en est pas autrement dans le monde des idées. Il n'y a pas de connaissance parfaite et totale : elle est toujours relative aux circonstances, aux limites entre lesquelles elle doit être valable et aux desseins auxquels elle doit servir.

[...] [le] « contenu de réalité » [des mots sujet, objet, connaissance objective, etc.] se résout en constatations pratiquement assurées relativement au monde physique ou à notre propre personne.

§7 SENS D'UN JUGEMENT : SON USAGE !

pratiquement, le sens du mot « objectif » s'épuise dans le fait que le jugement qualifié d'objectif n'est pas démenti par le déroulement des circonstances ultérieures.

PARFAIT. — Et toute votre démonstration, dans le cas des jugements [qui ont pour objet les notions et les jugements de la sphère intuitive] consiste à dire : « Le signe de leur objectivité, c'est le sentiment de sécurité qui accompagne leur constante intervention... »

IDOINE. — Par ce que ce sentiment me garantit que les jugements en question ne tombent en général pas à faux. Et c'est là, au fond, tout le sens pratique de objectivité d'un jugement.

[...] un mot peut être légitimement employé en faisant voir que les circonstances existent où je puis l'employer conformément à sa signification. Et ceci pour l'excellente raison que **sa signification est en définitive**

fixée par les modalités de son emploi. *C'est parce qu'on l'emploie comme on l'emploie qu'il a la signification qu'il a !*

[...] Vous avez réalisé comment l'idée d'objectivité peut être prolongée et étendue par un emploi extensif du mot objectif, emploi qui doit rester plus moins confirme aux significations primitives et restreintes, mais qui pourra peut-être aussi réagir sur ces dernières. Or **cette puissance de devenir, cette faculté d'être constamment projetée au delà et en avant de sa signification présente, vient s'intégrer dans l'idée d'objectivité.** Elle en devient un des éléments essentiels ; elle fait partie de sa « substance significative ». (Et tous les concepts sont plus ou moins soumis à la même loi d'extension.)

§8 DESTITUER L'IDÉAL PLATONICIEN

il n'existe pas une seule chose en ce monde qui ne prenne sa signification d'autre chose que d'elle-même et qui, si nous en voulons saisir l'essentiel, ne nous conduise à ce qui est encore informe et lourd de sens. [...]

[...] La « crise actuelle des mathématiques et de la logique » est au fond une crise de l'idéal platonicien dans les dernières positions qu'il occupe. Désire-t-on vraiment la dénouer : c'est aux bases mêmes qu'il faut toucher. **Il faut faire le sacrifice des notions que nous avons dites « éternellement fixées », des concepts « préalablement et exactement délimités » pour leur substituer les concepts « en devenir » et « ouverts vers leur avenir »**

§9 DESTITUER L'IDÉAL OBJET MATHÉMATIQUE

Les notions mathématiques sont souvent considérées comme le type même des notions définitivement arrêtées et parfaitement délimitées. Or [...] c'est là une idée fautive ou du moins beaucoup trop sommaire. L'une des propriétés naturelles de l'objet mental « concept » est d'être essentiellement en état de devenir.

§10 DOUBLE SENS DES AXIOMES

Si l'on a compris le rôle et le sens des axiomes, si l'on a réalisé l'intégrité de leurs deux faces, dont l'une regarde vers le concret, tandis que l'autre est tournée vers l'abstrait, on peut [...] poser sur une base commune la connaissance intuitive, la connaissance expérimentale ou empirique et la connaissance rationnelles.

Chapitre II : LE PARADOXE DU LANGAGE

§11 « OBJETS ÉTERNELS »

Le problème qu[e le langage] pose à l'esprit est celui de son efficacité.

L'explication la plus naïve consisterait à admettre

« Que derrière chaque substantif il y a un concept bien défini, derrière chaque adjectif une qualité déterminée, derrière chaque verbe une opération précise et invariable, etc. Que ces concepts, ces qualités et ces opérations sont adéquats à certains objets, à certaines façons d'être, à certains liaisons du monde des choses ou du monde de nos pensées. Que grâce à cette correspondance prédonnée entre le réel et le pensé, deux esprits s'accordent parce qu'ils participent tous deux, par l'intermédiaire du langage, à la même réalité. »

Cette façon de voir appelle toutes les réserves toutes les critiques que nous avons formulées au chapitre précédent : elle suppose que le réel et le pensé se réalisent chacun pour son propre compte et dans son propre plan, jusqu'à la parfaite détermination, et que leur connexion est elle-même prédéterminée. Il est clair que nous ne pouvons l'adopter. Non qu'elle soit absolument sans force explicative : mais elle est trop sommaire et ses faiblesses sont trop évidentes.

Cette première tentative gagne singulièrement en souplesse et en efficacité si l'on **interpose, entre la représentation mentale et la réalité correspondante, une entité abstraite qui doit être conçue par l'esprit et réalisée par les choses.**

Dans cette théorie améliorée, la réalisation mentale de l'entité pourrait être plus ou moins incomplète et la réalisation physique s'affaiblirait alors d'autant, mais ne cesserait pas d'être possible. Ainsi s'expliqueraient, en même temps que le rôle éminemment positif du langage, certaines de ses insuffisances. C'est maintenant sur les termes intermédiaires que doivent être reportés tous les attributs de l'existence absolue, en particulier l'immuable fixité et la nette délimitation. **On pourrait avec A. N. Whitehead [...] nommer ces entités des « objets éternels » ;** et la tentative d'explication dont nous parlons pourrait être dite une « explication par les objets éternels interposés ».

[...]

« Dans l'essence de l'objet éternel, il y a une détermination en ce qui concerne ses relations avec les autres objets éternels, et une indétermination quant à ses relations avec les cas réels. Comme les relations d'un objet éternel avec les autres objets éternels sont déterminées par l'essence du premier, il en résulte que ce sont

des relations intérieures, etc. » [cité de *La Science et le monde moderne* de A. N. Whitehead, Payot, Paris, Chap. X : L'abstraction]

Ces quelques citations suffisent déjà pour mettre en lumière l'antagonisme profond qui existe entre ce point de vue et celui qui met l'accent principal sur les concepts en « constant état de devenir ». **Au fond, les objets éternels n'interviennent que pour recueillir les attributs absolus qui sont refoulés de l'objet mental ou de l'objet physique.**

§12 PROBLÈME DU SENS EN DEVENIR

si les mots n'ont pas un sens précis et donné d'avance, comment puis-je être certain que le lecteur puisse en extraire un sens suffisamment conforme à mes intention ? [...] La position est sans issue pour celui qui réclame une point de départ parfaitement assuré.

Ceci une fois reconnu, la question suivante se pose tout naturellement : « Comment est-il possible que le langage, sans aucun appui d'ordre absolu, possède tout de même l'efficacité qu'on lui reconnaît ? [semblent manquer guillemets fermants et point] Il faut bien se rendre compte qu'en l'absence de tout éclaircissement sur ce point, on ne dispose d'aucun principe, d'aucune norme, qui permette d'apprécier la signification d'une construction verbale, pour peu qu'elle vise plus haut que les constatations immédiates et grossières. Et pourtant il ne semble ps que la pensée philosophique moderne se soit consciemment arrêtée sur cette question de principe.

§13 ASPECT PHÉNOMÉNOLOGIQUE ?

« Dire que, dans une certaine langue, certaines combinaisons de sons ont une significations précise, cela ne veut nullement dire que cette signification habite ces sons comme une *qualitas occulta*, mais simplement qu'un certain nombre de personnes, les membres d'une même communauté linguistique, se servent d'un schéma de correspondance commun. »

[...]

« ...Avant de nous tourner vers la logistique symbolique, il nous faut être parfaitement au clair sur la signification de l'expression : l'objectivité « du langage ou de certains signes linguistiques ». Cette expression comporte en effet un double sens qui est de nature à provoquer la confusion.

« D'une part, on entend par signification objective du langage les pensées dont il est, dans un certain milieu, l'expression unanimement acceptée. **L'objectivité revient donc ici à une unanimité de subjectivité...**

« D'autre part et dans un sens plus restreint, on dit aussi qu'une expression a un sens objectif si elle exprime une pensée elle-même adéquate. Ici l'objectivité consiste en ce que les pensées exprimées se rapportent à la « réalité objecte », aux objets et aux états et faits du monde. »

[cité de *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung* de F. Kaufmann]

§14 APPORT HISTORIQUE ?

Pour une très forte part, le sens des mots est fonction des façons de parler et de penser d'autrefois ; mais pour une autre part, il est fonction de la façon de parler de penser d'aujourd'hui. [...] Ce n'est d'ailleurs que par un gauchissement continu de leur signification originelle que les mots arrivent à incorporer une pensée contemporaine, gauchissement que tout un contexte d'explications et de réserves, d'allusions et de réminiscences ont pour but de provoquer ou mieux encore de suggérer. **Dans la vie de la pensée, c'est toujours dans les vieilles outres du langage qu'il faut mettre le vin nouveau de l'esprit.**

Bref, la pensée pour s'exprimer ne se borne pas à établir des combinaisons bien déterminées de « significations prédéterminées ». Elle procède au contraire, à l'aide des mots, à des évocations de choses pensées aux contours plus ou moins arrêtés [...]

C'est d'ailleurs une des raisons — la raison principale, peut-être — pour laquelle toute pensée vraiment nouvelle a tant de peine à être comprise. Le miracle, c'est qu'elle arrive jamais à l'être.

[...]

« ...Définir l'expérience humaine, c'est en retracer la genèse et le développement. D'une part, en effet, l'expérience ne s'étale pas sur un seul plan : elle a une histoire et cette histoire n'est pas close. D'autre part, la raison, dont l'objet est d' « informer » l'expérience ne peut, non plus, étaler son contenu sur un plan unique : la raison se constitue et continue à se constituer, en fonction des péripéties de l'expérience, et, si originales que soient ses constructions, celles-ci perdent leur sens une fois sorties de leur contexte historique. Bien plus, l'expérience et la raison en sont pas deux termes que l'on puisse séparer : c'est la raison qui règle l'expérience et c'est l'expérience qui adapte la raison. La seule réalité concrète sur laquelle puisse porter la critique, c'est donc l'histoire de la pensée : c'est l'histoire des interactions de l'expérience et de la raison. Isoler une étape et la prendre pour absolue, ce serait en effet fausser la perspective tout à la fois de la réalité et de la raison, car ces deux termes ne se présentent tels qu'ils sont durant cette étape qu'en fonction des expériences des stades antérieurs. » [cité de *L'Expérience humaine et la causalité physique* de L. Brunschvicg]

[...]

Naturellement, il ne peut être question de mettre en doute les mérites évidents de la méthode que préconise M. Brunschvicg. Elle ne peut cependant pas nous satisfaire complètement. [...] Il y a un *élément instantané* que l'histoire prépare et soutient, mais ne détermine pas. Cet élément doit être saisi en lui-même : rien ne peut en dispenser. [...]

Il est donc tout naturel de se demander, avant de se tourner vers l'histoire, comment se constituent les instantanés dont la succession fait l'histoire. Or c'est là justement ce que la méthode historique n'explique pas.

[...]

Les observations précédentes suggèrent une objection de principe à la méthode historique, objection que nous voulons présenter parce qu'elle n'est pas sans rapport avec notre sujet. C'est qu'une *histoire authentique de la pensée humaine, où systèmes et théories revivraient avec leurs caractères véritablement spécifiques, est une chose impossible*. Lorsque je pense, et lorsque je formule ma pensée, ce sont mes images intuitives, mes représentations, mes réalisations, mes abstractions qui interviennent. **C'est ma mentalité qui s'exprime, à travers mes vues et mes idées sur le monde** et sur l'esprit humain, et sur la façon dont celui-ci saisit celui-là. Il est possible que mon être intellectuel ait fait sa proie d'idées fort disparates, rencontrées ici et là, qu'il contienne de l'Aristote et du Platon aussi bien que du Kant et du Poincaré. Il n'en forme pas moins à chaque instant une totalité qui régit et oriente mon activité pensante. Je pense et j'interprète la pensée des autres en fonction de cette totalité. **Or il y a des idées et des constructions intellectuelles avec lesquelles elle est incompatible**. Je ne sais pas alors quelle réalité ces idées visent et je manque des normes nécessaires pour les formuler de façon adéquate. Ma connaissance du passé s'oriente sur mon présent : en général trop d'éléments me manquent pour restituer son véritable sens à une pensée qui fut autrefois vivante, au sein d'une civilisation qui la soutenait de toutes parts. Ma compréhension du passé ne sera qu'une interprétation dont les éléments me sont fournis par mon présent. Il pourra même arriver que ce présent obnubile la vision juste du passé.

En d'autres termes, s'il est vrai que toute notion nouvelle, pour naître et pour se formuler, se serve de mots et par conséquent d'idées déjà existantes, s'il est donc vrai qu'elle nous parvienne sur les flots du passé, il n'est pas toujours également vrai que ce passé continue à la soutenir. Il peut au contraire arriver qu'elle s'en détache et prenne son sens et son contenu de réalité dans les conditions en partie nouvelles de son emploi.

§15 PARADOXE DU LANGAGE

Ce que nous venons de dire met, croyons-nous, suffisamment au clair ce que nous appelons le *paradoxe du langage*. C'est qu'il soit possible de conférer à certains mots et en se servant de ces mots eux-mêmes, un sens qu'ils n'ont encore jamais eu. C'est le fait que formuler une pensée ne consiste pas seulement à établir des relations bien déterminées entre des notions parfaitement précises, relations et notions dont nous disposerions par avance, mais qu'au contraire c'est faire jouer tout un monde d'évocations et de suggestions, et que c'est malgré tout réussir.

Expliquer l'efficacité du langage, c'est découvrir les règles de ce jeu.

Chapitre III : LA CONSTRUCTION DE LA RÉALITÉ

§16 LA RÉALITÉ EST À CONSTRUIRE MENTALEMENT

N'y aurait-il pas avantage à dire plus simplement la « connaissance de la réalité » ?

Non ! Répondrons-nous, car l'expression que vous nous proposez suggère l'idée que la *réalité telle que nous la concevons*, existe déjà toute faite et toute prête, en dehors de nous. [...]

[...]

En d'autres termes, *la réalité telle que nous l'apercevons est une construction de plus ou moins autonome de notre esprit, dont les fins essentielles sont de rendre l'action possible*.

§17 ATTITUDE PRÉCRITIQUE & KANT

Nous appellerons « précritique » une attitude intellectuelle universelle jusqu'à Kant et qui se caractérise essentiellement par le trait suivant : elle imagine que la connaissance puisse aller toucher, par tel ou tel biais, à une réalité, abstraite ou concrète, déterminée de façon parfaite et définitive.[...]

[...]

Sur la question centrale de l'*a priori*, le développement de la science a [...] mis le kantisme partout en échec. Mais la portée de la découverte fondamentale de Kant n'en reste pas moins entière. L'évolution actuelle des mathématiques et des sciences naturelles ne la dément pas. [...]

[...]

Il ne peut y avoir aucun doute à cet égard : les mathématiques pures et la logique classique sont encore fermement établies et plein territoire précritique. Le moment viendra d'ailleurs où elles en devront sortir.

§18 VERS UN PRIMITIF SCIENTIFIQUE

En générale, les qualités élémentaires ne sont [...], comme toute autre notion, que des *apparences globales*, à travers lesquelles nous ne savons pas distinguer une réalité plus complexe, — apparences dans lesquelles s'exprime *notre façon* de concevoir et de connaître.

[...] Les racines de toute connaissance sont — il est vrai — dans l'intuitif ; mais il n'est pas possible de *déduire verbalement ou rationnellement* toute la connaissance de quelques notions premières. [...]

[...] Nous reconnaissons donc la légitimité et même la nécessité d'une physique rudimentaire, qui ne tiendrait compte que des caractères les plus apparents des phénomènes, d'une physique toute naïve, dans laquelle nos impressions sensorielles seraient directement interprétées comme les symptômes évidents de *réalités pratiquement assurées*. La loi naturelle que voici, par exemple : « Deux objets différentes ne peuvent pas occuper en même temps la même place dans l'espace » pourrait fort bien intervenir dans une physique de ce genre. Nous acceptons, en un mot, tout ce qui, dans la phénoménologie, répond à l'idée d'une *science naturelle des vérités élémentaires pratiquement assurées*. Il est d'ailleurs clair que ce premier chapitre de la science ne saurait être constitué en doctrine autonome (ce qui serait revenir à l'attitude précritique), mais qu'il devrait être *ouvert* à la fois du côté des sciences exactes et de la psychologie.

§19 FORMES INTUITIVES

En résumé, les formes intuitives peuvent être comparées à des représentations partielles et schématiques d'une réalité qui, d'ailleurs, ne nous est point donnée autrement. Elles nous fournissent les premiers éléments pour la construction de toute réalité.

§19 EXPÉRIMENTER & MESURER (DUHEM, SCHRÖDINGER)

Les qualités intuitives n'étant perçues que du fait de leur insertion dans « les formes intuitives » correspondantes, ces dernières doivent être conçues comme possédant une certaine « étendue » qui correspond au champ de variation de la qualité. La couleur peut varier par la nuance autant que par l'intensité ; le son par la hauteur autant que par le volume, la forme par chacune de ses dimensions, etc. *Préciser les données des sens, c'est introduire un système de repères aussi invariables et aussi serrés que possible, par rapport auxquels les variations des qualités devront être « objectivement » appréciées* : C'est le chemin qui mène directement à la schématisation mathématique et à la mesure.

[...] **On expérimente avec son corps, ses sens et ses membres, avant d'expérimenter avec des instruments.** La physique expérimentale est en continuité avec ce qu'on pourrait appeler la physique de l'intuition. La science commence où le bon sens finit.

Mais ce qu'il importe de souligner, c'est que la mathématisation dont s'accompagne le passage à l'expérimental, ne se réduit pas à l'introduction d'une échelle graduée ; le rôle des mathématiques ne s'épuise pas dans l'emploi de l'échelle des nombres.

[...] **La qualité intuitive est la forme de l'aperception ; il nous ajouter maintenant : L'abstraction mathématique — ou du moins schématique — est la forme de l'expérimentation.**

[...] « **Les grandeurs sont, en dernier lieu, définies par la façon dont nous en prenons connaissance, au moment où nous les rencontrons dans le monde qui nous entoure...**

« ...On obtient une définition de la distance en décrivant toute simplement le procédé exact qui permet de la mesurer et c'est cette définition-là qui, évidemment, doit être la définition primitive... [...] Toutefois, [...] il faut observer une certaine prudence. Je me trouverais ans un cruel embarras, si on me demandait d'expliquer sur-le-champ par quelle série de manipulations et de calculs, la longueur de 10^{-15} cm. est à définir. — Et pourtant, le cas échéant, je n'hésiterai pas à me servir de grandeurs de cet ordre, comme si leur définition était à notre immédiate portée ; on ne peut pas s'attarder indéfiniment à l'examen des fondements. » [cité de Eddington]

En un mot, aussitôt que l'expérimentation intervient dans la construction de la réalité, les notions intuitives évoluent sous l'influence de la schématisation mathématique. La durée, l'espace, la couleur, le son, etc., comme éléments de connaissance, apparaissent dès maintenant liés à toute une série de théories plus moins autonomes.

§21 EXPÉRIMENTER SUPPLÉE L'INTUITION LIMITÉE (+ DUHEM)

Il peut arriver que l'expérimentation révèle des aspects de la réalité que nous ne savons pas interpréter intuitivement, parce que les formes d'intuition où elles pourraient s'insérer nous font défaut. Nous n'en prenons connaissance qu'indirectement, par l'intermédiaire des effets que certains dispositifs et certains instruments nous rendent perceptibles. Par exemple, nous ne disposons ni de l'appareil sensoriel ni de la forme intuitive correspondante pour enregistrer la pression atmosphérique ou le potentiel électrostatique.

[...] Si, dans la connaissance d'un objet quelconque, on veut dépasser la sphère d'expérimentation assez grossière où s'exerce l'intuition, cette connaissance plus profonde des réalités ne s'obtient, ne se constitue que par

l'entremise, qu'en fonction de théories de plus en plus nombreuses, de schémas abstraits intervenant successivement et progressivement.

Le concret n'est jamais donné en lui-même. La description d'une réalité concrète, pour être de plus en plus précise, nécessite des concepts de plus en plus abstraits, tels que l'atome, l'électron, le spin, la probabilité d'existence... Le réel ne se laisse serrer de près qu'à l'aide de l'idéal et du schématique.

§22 EXPÉRIMENTER DÉMENT L'INTUITION

Il n'y a [...] pas seulement une voie, une direction déterminée, dans laquelle le processus qui part de l'intuitif et dont le terme est constitution de la réalité peut s'engager. Il y en a plusieurs et qui, peut-être divergent.

Il peut arriver que la mathématisation renverse les vues intuitives qu'on croyait les plus légitimes. C'est ainsi que la cinématique d'Einstein a renversé l'idée trop simple de la simultanéité universelle, pour la remplacer par une liaison temporelle plus compliquée et mieux adaptée à l'explication des phénomènes.

Il peut arriver, enfin, que le schéma soit incompatible avec l'intuition, que celle-ci lui soit un obstacle plus qu'une alliée. C'est actuellement le cas dans la physique de la matière radiante, où la théorie des quanta n'arrive pas à s'intégrer parfaitement dans la forme espace-temps.

Chapitre IV : LE DOUBLE VISAGE DE L'ABSTRAIT

§24 IDÉALISATION DE LA GÉOMÉTRIE PRIMITIVE

demandons-nous pour commencer d'où viennent les notions géométriques les plus simples, telles qu'on les introduit dans les premiers éléments. Chacun peut retrouver dans ses souvenirs les façon dont elles lui furent suggérées.

Le maître propose à l'élève certaines « réalisations physiques » : le faite d'un toit, l'arête d'une règle à dessiner, ou encore la trajectoire d'un rayon lumineux, la ligne de visée ; et il lui demande d'y apercevoir la notion à définir. Il exige de savoir distinguer dans chacun de ces exemples concrets une chose idéale qu'ils ont en commun : *la droite géométrique*.

De même il lui demande d'imaginer un objet de plus en plus petit, plus petit encore que tout objet qu'il aurait déjà imaginé, pour conduire son esprit à la notion de lieu précis : de *point géométrique*.

Il lui demande encore d'apercevoir dans les objets proposés les premières propriétés des êtres abstraits qu'il vient d'imaginer : qu'un droit est déterminée par deux points, etc.

En un mot, **il exige de l'élève un acte de véritable création mentale, dont il faut se garder de diminuer l'importance**. Remarquons bien que ce passage de la notion intuitive : la *ligne de visée*, à la notion idéale : la *droite*, est quelque chose de tout à fait indescriptible. Une fois qu'on l'a conçu, il peut être évoqué. Mais notre pouvoir d'explication s'arrête là. Il y a là un fait d'une essence toute à fait *sui generis*.

[...] Si ce sont les réalisations physiques qui nous ont suggéré les notions de droite, de point, etc., il faut reconnaître que c'est par le fait d'une connaissance incomplète de la réalité, par un *heureux malentendu*. On rend en partie compte de ces circonstances en disant que la droite est image schématique de la réalité. Dans un schéma, la réalité ne se trouve pas représentée dans tous ses détails. Seuls certains traits sont conservés, et certains rapports évoqués. Un schéma n'est en aucun façon une représentation fidèle en un sens absolu : il n'est compréhensible que si on en possède la clef explicative. Tous ces caractères se retrouvent dans le parallélisme existant entre la notion de droite et ses réalisations.

§25 LOGICISATION DE LA GÉOMÉTRIE IDÉALE

D'images fondées dans l'intuition spatiale, [les notions fondamentales, la droite, le point, etc.,] **doivent tomber (ou monter!) au rang de choses logiques, c'est-à-dire de choses dont seules les relations logiques avec d'autres objets de même nature doivent être retenues**. Cette dégradation des images géométriques représente une étape essentielle de l'axiomatisation de la géométrie.

§26 PRIMITIF → IDÉES → LOGIQUE

l'introduction des relations logiques n'est pas autre chose qu'une nouvelle schématisation axiomatique. Pour passer du géométrique au logique, il faut franchir un nouveau seuil d'axiomatisation. Tout à l'heure, le géométrique était un abstrait par rapport à l'intuitif. Maintenant c'est un concret par rapport au logique. Abstraction il y a un instant, c'est maintenant une réalisation d'un abstrait plus subtil. [...]

[...] Si l'on projette les concepts géométriques sur le plan de la logique, le sens qu'ils ont pris ou qu'ils pourront encore prendre dans la description des réalités dites objectives ne leur est plus inhérent. Ce sens ne peut leur être réintégré que par le fait de telle ou telle réalisation. [...]

[...] L'idée ne se détache jamais entièrement d'un concret propre à le soutenir.

§27 DOUBLE ASPECT DU GÉOMÉTRIQUE

On voit qu'en franchissant le seuil d'abstraction qui sépare le logique du géométrique, les notions géométriques ont perdu une partie de ce qu'on pourrait appeler leur substance : tout ce qui est forme, tout ce qui rappelle leur signification dans le monde des phénomènes directement perçus par nos sens. En un mot, ce sont justement les caractères qu'on s'accorde à nommer spécifiquement géométriques qui ne trouvent pas accès dans le domaine du logique.

Ayant ainsi constaté ce que les différents modèles ont en commun, nous pouvons revenir à la question : En quoi consiste leur individualité ? C'est justement dans ce que la seconde axiomatisation a fait disparaître qu'il faut aller la chercher : Cette individualité consiste avant tout dans le souvenir des réalisations où les notions ont été primitivement aperçues.

[...] le monde physique n'[offre de la notion de droite] que des réalisations imparfaites, et [...] par conséquent **ce n'est pas le fait « d'être réalisée », au sens ordinaire du mot, qui nous fournit la garantie de « l'existence mathématique » de cette notion.** Par une réaction assez naturelle, l'esprit éprouve la tentation de se porter immédiatement aussi loin que possible dans la direction opposée, et de dire : « C'est donc une affaire de pure logique. » Or, nous constatons maintenant qu'il n'en est rien non plus : la logique pure ne connaît pas la droite, ne connaît ni le point ni l'espace : L'origine du géométrique n'est pas en pays de Logique pure.

L'idée du géométrique a sa source dans l'intuitif. Mais la sphère d'existence spécifique est comprise entre la première axiomatisation qui lui faisait un visage abstrait face au côté intuitif de notre connaissance et la seconde qui en fait un concret face au côté « purement logique » En deçà, et au delà, elle n'existe pas encore et n'existe plus. C'est dans ce double rôle que s'épuise l'existence géométrique, dans ce double visage que se révèle son vrai caractère.

§29 ESSENCE DU GÉOMÉTRIQUE : ANCRAGE SENSORIEL & SCHEMATISATION ABSTRAITE

[certains caractères, dont nous affirmons l'existence, qui appartiennent en propre au géométrique et lui confèrent son existence autonome] sont encore engagés dans nos vues intuitives, liés à toute **notre activité sensorielle et musculaire.** C'est par les racines qu'ils plongent de ce côté que leur vient l'essentiel de leur signification, signification que soutiennent encore le faisceau des intentions dont s'accompagne tout effort de connaître.

Envisagées spécialement sous cet angle, **les notions géométriques sont des images idéales appuyées sur le réel objectif, des représentations schématiques dont le sens n'est intelligible qu'en tenant compte de la réalité qu'elles visent.** Il n'y a pas de notion de droite sans connaissance préliminaire de certaines réalisations plus ou moins grossières, telles que l'arête d'une règle ou le trait qu'elle permet de tracer, il n'y a pas de notion de point sans l'intention de désigner un endroit précis, pas de notion d'espace sans l'image intégrale inscrite dans nos formes d'intuition.

D'autre part, **ces notions ne prennent leur aspect rationnel que du fait de l'axiomatisation, c'est-à-dire de l'acte mental qui aboutit à la création du schéma abstrait.**

Ce n'est que par action et réaction de ces deux tendances de la faculté de connaître et de comprendre, à la fois par association et dissociation de ces deux orientations antagonistes que prend naissance la notion complète de la géométrie : deux visages où l'on peut distinguer tour à tour des traits semblables sous des expressions dissemblables ou une même expression sous des traits différents.

§30 EXEMPLE-TYPE DU GÉOMÉTRIQUE & ÉVOLUTION DES CONCEPTS

quelque intérêt que puisse présenter pour un mathématicien une réintégration du géométrique dans son autonomie, et une appréciation renouvelée de la rigueur des considérations dites intuitives, ce n'est pas dans cette direction que nous apercevons le gain véritable que **notre analyse.** Celle-ci **a pour nous la valeur d'un exemple-type.** Dans les rapports du géométrique à l'intuitif et au logique nous apercevons l'image même des rapports du concret et de l'abstrait, l'image qui se reflète dans chacune des faces que nous présente le processus de la superposition des schémas dans la construction progressive de la réalité. [...]

Insistons d'abord sur le fait qu'un concept n'a pas une forme donnée une fois pour toutes et un contenu *ne varietur.* [...]

[...] même après avoir pris sa forme la plus épurée, le concept droite continue à vivre parallèlement de ses existences antérieures. Il se fait une espèce de projection des plans d'existence l'un sur l'autre, sans que ni l'un ni l'autre ne renonce à son rôle. **Le concept comprend à la fois l'amalgame et la dissociation de ses trois formes.**

§31 AXIOMATISER N'EST PAS DÉFINIR

il existe plusieurs « modèles » satisfaisant tous également à tout le système des axiomes. Ce qui est droite dans l'un est peut-être cercle dans l'autre : les axiomes ne suffisent donc pas à eux seuls pour conférer une individualité parfaite à chacune de ces deux notions. D'autre part, il n'est pas douteux que d'une certaine façon

nous réalisons cette individualité, et que nous avons le moyen de distinguer entre les différents modèles. Le fondement de cette individualisation se trouve donc dans « l'idée même » de la droite et du cercle, c'est-à-dire dans nos représentations intuitives, dans la sphère qui précède l'axiomatisation.

— Si nous persistons à vouloir définir la droite par les axiomes, c'est tout au plus comme relation logique que nous avons quelque chance d'y parvenir. Mais alors la définition ne saisit plus rien de ce qui est en elle image et représentation idéalisées : la droite dans la plénitude de sons sens échappe à l'étreinte des seuls axiomes.

[...] il ne peut y avoir [dans la seconde étape de l'axiomatisation] de définition véritable que si les notions à définir sont individualisées par là même. [...]

Ainsi la notion de définition va s'évanouir dans l'indéterminé lorsqu'on veut lui conférer une signification indépendante du processus par lequel les notions vont se constituant. C'est au fond ce processus seul qui nous fournit une définition, à travers l'intuitif et le géométrique. [...]

[...]

Enfin, l'exemple du géométrique montre clairement que, par la constitution d'un schéma axiomatique, il se crée à la fois un abstrait et un concret relatif à ce dernier. Dès qu'on a franchi la première étape de l'axiomatisation, les êtres géométriques sont des abstraits vis-à-vis de l'intuitif. Celui-ci en reçoit comme l'empreinte opposée et se trouve repoussé vers le concret. Le même phénomènes se reproduit une fois le second seuil franchi : c'est maintenant le géométrique qui joue le rôle d'objet vis-à-vis du logique.

Chapitre V : L'AUTONOMIE DE L'ABSTRAIT

§33 VÉRITÉ INTUITIVE

IDOINE. [...] Tout jugement est sommaire et sa justesse tient au cadre des intentions dans lesquelles il est prononcé ! Les jugements mathématiques eux-mêmes...

[...]

IDOINE. [...] dans la plupart des cas concrets, nous tomberons parfaitement d'accord. Si je prétends que la fenêtre est ouverte et qu'il fait beau dehors, nous n'aurons ni l'un ni l'autre aucun doute sur la vérité ou la fausseté de ces affirmations. Dire vrai, c'est dire dans ce cas tout simplement ce qui est, dire faux, ce qui n'est pas.

Mais la réalité — ce qui est ! — ne nous est pas donnée intégralement et dans toute son essence. C'est pourquoi la vérité des jugements où elle s'exprime, ne sera jamais non plus intégrale.

[...]

IDOINE. — Supposez que l'on ait recouvert une feuille de papier de cases assez petites, disposées comme celles d'un damier et peintes par exemple en bleu et en jaune. Places-vous à une certaine distance : la feuille vous paraîtra d'un vert (grisâtre) uniforme. Rapprochez-vous peu à peu : il viendra un instant où les deux couleurs, fondues tout d'abord, reprendront leur individualité.

Est-il vrai ou faux que la feuille soit verte ? Ou qu'elle soit bicolore ? Voici notre réponse. L'affirmation : la feuille est verte ! Est vraie du point de vue éloigné ; fautive du point de vue rapproché.

Vous me direz : Il y a pourtant une différence essentielle, le vert perçu n'était qu'une combinaison du bleu et du jaune : en quelque sorte une *synthèse intuitive schématique*. Je vous répondrai ceci : Le bleu et le jaune que nous percevons sont également des synthèses intuitives plus ou moins comparables à celle qui vient de nous fournir justement un précieux exemple. Sous le signe de l'absolu, il n'est ni vrai ni faux que notre feuille soit verte ou bicolore. Il ne s'agit dans les deux cas que d'apparences, que d'images plus ou moins grossièrement fidèles.

[...]

IDOINE. [...] **les jugements qui sont vrais parce qu'ils expriment ce qui est ou ce qui fut, ne le sont que pratiquement. Ils ne nécessitent pas l'intervention d'une vérité fixée définitivement ; il suffit d'une vérité elle-même pratique et sommairement délimitée. Je ne chercherai pas à analyser indéfiniment l'idée que je m'en fais, parce que ce serait la détruire ; je connais pour les besoins de la pensée et de l'action les conditions de son emploi ; je l'appelle la notion intuitive de vérité.**

§34 DOCTRINE AXIOMATIQUE CLASSIQUE (LOGICISME?)

PARFAIT. [...] Le mérite des Grecs n'est pas d'avoir inventé la géométrie : d'autres l'avaient fait avant eux. Mais c'est d'avoir remarqué qu'elle pouvait être détachée de ses réalisations ; d'avoir aperçu qu'une fois soumise au rythme de la déduction, elle allait s'animer d'une vie indépendante et sans attache avec le monde matériel. D'avoir enfin découvert les quelques règles précises qui devaient suffire à faire surgir l'édifice géométrique de ses axiomes. [...]

[...]

IDOINE. [...] Je ne nie, vous le savez bien, ni la légitimité, l'efficacité, ni l'excellence des premières notions géométriques. Ce qui nous sépare, c'est que vous voulez les voir d'un œil et d'un esprit platoniciens ! Et qu'il me paraît utile et même nécessaire, dans l'état actuel des choses, de les envisager comme des concepts en devenir. Mais je ne nie pas que l'idée de l'espace, par exemple, préside à l'exécution du moindre de nos mouvements.

Et de même **je ne nie pas que notre pensée trouve, dans ses moindre démarches, un appui dans l'idée de la vérité. Mais je sens libre d'examiner si le vrai n'est pas lui aussi une idée-schéma.**

PARFAIT. — Vous ralliez-vous, oui ou non, à l'opinion que voici [*note de bas page* : la citation suivante est extraite de H. WEYL : Philosophie der Mathematik, p. 3. Ce n'est que par une rencontre assez fortuite que Parfait trouve à s'en réclamer] :

... « Les mathématiques portent un intérêt fondamental aux méthodes par lesquelles certains concepts peuvent être définis à partir de certains concepts ; et certains jugements déduits d'autres jugements... Et même il ne semble pas possible de *fonder définitivement* les mathématiques avant d'avoir fait un exposé complet de cette doctrine. »

« C'est pourquoi avant d'aborder le terrain spécifiquement mathématique, il est nécessaire d'avoir exposé préalablement : la structure des relations logiques et des jugements ; la définition constructive, la déduction logique et la méthode axiomatique ». Vous ralliez-vous à ce programme ?

IDOINE. — **Vous me demandez, au fond si je reconnais la nécessité de recourir à une logique préalablement établie, à laquelle il faudrait accorder une valeur absolue ; aux principes fondamentaux de laquelle tout le contenu des mathématiques resterait suspendu¹. Il est bien clair que je ne saurais ratifier cette primauté du logique** sans me mettre en désaccord flagrant avec les conclusions des chapitres précédents. Nous renoncerions à l'ordre que nous avons cru distinguer dans la succession des abstractions. Au lieu d'être appuyées sur les formes intuitives et les idées-schémas, les « réalités mathématiques » ne seraient plus que l'expression des réalités transcendantes issues de la logique. Mais non, Parfait, je ne ratifie ni l'opinion, ni le programme.

§35 DISSOCIATION DU VRAI PRIMITIF

IDOINE. [...] On continue à dire que toutes les géométries, l'eulidienne et les non-eulidiennes, sont vraies — également vraies du point de vue des mathématiques pures. Mais cela veut dire simplement qu'elles sont exemptes de contradiction [...]. Mais **leur vérité s'est affaiblie d'un élément essentiel : ni l'une ni l'autre n'est plus, du seul fait de sa vérité, adéquate au réel.**

Le vrai traditionnel s'est dissocié : il donne naissance à deux concepts qui vont de plus en plus diverger : L'un d'eux est la *conformité* au réel des sciences naturelles ; l'autre est une *vérité appauvrie* qui continue à porter son ancien nom de vérité mathématique.

§36 LOGIQUE PRIMITIVE

IDOINE. [...] En disant « logique », on évoque simplement une certaine autonomie du jugement alliée à une évidente efficacité. C'est cette logique qui fait le fond de ce qu'on appelle la « saine raison ». A ce niveau, on raisonne sainement si l'on fait des associations d'idées correctes ; mais cette correction est en fonction de la conformité au réel des vues qui président à l'association des idées.

Ainsi l'on voit que **la notion de déduction existe déjà dans ce que nous avons nommé la sphère intuitive**, mais qu'elle est encore loin de répondre à l'idéal de la déduction proprement dite. Nous parvenons à cette dernière à partir de la première, dans toutes ses variétés, par schématisation et abstraction.

Permettez-moi que j'y insiste : **de même que la notion de la droite géométrique est le fait d'un acte intellectuel créateur qui s'exerce sur ce que, après coup, nous nommons les réalisations de la droite, la notion de déduction pure est l'aboutissement d'un processus de schématisation qui s'opère sur l'ensemble de nos « raisonnements intuitifs » efficaces**, sur toutes les associations d'images mentales où, après coup, nous pouvons apercevoir la forme de la déduction logique.

[...]

IDOINE. [...] dans l'axiome que voici :

Si deux points d'une droite sont dans un plan, alors la droite toute entière est dans ce plan,

l'essentiel de la conséquence est visiblement la liaison *qu'il faut établir* entre les deux faits géométriques que relie le mot alors.

Quelle est la nature de cette liaison ? A son origine, si l'on remonte jusqu'à l'intuitif, elle présente un caractère causal ou tout au moins phénoménal. Par la transmutation en abstrait que représente le passage au géométrique, ces caractères relatifs au monde physique s'éliminent : Elle reste cependant engagée dans l'intuitif et le phénoménal dans la mesure même où les concepts géométriques le restent aussi. **En un mot : cette liaison est sui generis** : Elle appartient comme telle à la sphère du géométrique.

[...]

1 Gonsseth semble ici décrier un *logicisme*, ce qui nous semble une lecture dévoyée de la citation de Weyl. En effet, cette dernière pourrait se lire dans une acception entièrement *formelle* de la mathématique (çàd participant au le 3e stade axiomatique de Gonsseth).

IDOINE. [...] la géométrie dans sa signification et dans les énoncés indémontrables qui la supportent est indépendante de la juridiction d'une logique préétablie et dont les jugements irrévocables lui apporteraient les éléments de la vérité.

§37 PARABOLE DU ROI NÈGRE : AUTONOMIE DES ABSTRAITS MATHÉMATIQUES

SCEPTIQUE. [...] La découverte d'un théorème nouveau est rarement le fait de la pure déduction ; mais celle-ci prononce en dernier ressort sur la vérité de toute énoncé.

[...]

IDOINE. [...] Écoutez, je vous prie, l'histoire du roi nègre et trop puissant, que j'invente à votre intention !

Le roi d'un peuple primitif commandait à un si grand nombre de guerriers qu'il ne pouvait les reconnaître tous facilement ; ils étaient même si nombreux qu'ils n'arrivaient plus à les compter. (Car chacun sait que les primitifs ne savent pas manier les grands nombres.) Sa trop grande puissance lui causa maint souci, jusqu'au jour où il s'avisait du stratagème que voici : Il fit confectionner une figurine à laquelle il donna son propre nom, et ordonna que tous les guerriers en fissent autant. Ces figurines furent alignées dans une cas construire à ces effet : on les appela les *doubles* ; nous dirons aussi les *guerriers abstraits*. Il fut ensuite convenu que chaque guerrier partant en expédition emporterait son double avec lui ; et le réintégrerait à son retour dans la *Maison des Doubles*.

Dans sa mentalité de primitif, le roi identifiait avec force tout guerrier avec son double et il passait de nombreux instants à organiser son armée en maniant ses soldats abstraits. Il y devient même fort habile et y gagna une grande renommée.

[...] L'élève qui identifie la droite abstraite avec le trait qu'il vient de tracer sur sa feuille et plan avec sa planche à dessin raisonne lui aussi comme un primitif : il ne conçoit pas l'autonomie de l'abstrait par rapport au concret où celui-ci est aperçu réalisé.

Mais reprenons notre histoire : Notre roi prit tant d'intérêt aux évolutions de ses doubles, qu'il finit par les faire manœuvrer pour son seul plaisir. D'un exercice tourné vers des fins extérieures, il en fit un jeu dont il choisissait les buts et les règles à sa fantaisie. Et moins les règles auxquelles il trouvait bon de s'astreindre étaient nombreuses, et plus elles étaient simples et précises, plus aussi il pouvait négliger les suggestions du réel extérieur. Plus le jeu gagnait en autonomie, et plus la signification des doubles s'éloignait de la signification originelle.

Croyez-vous qu'il en aille bien autrement des notions géométriques abstraites ? Dans leur genèse, elles sont intimement liées au concret ; une fantaisie géniale imagina, d'abord obscurément, puis de façon de plus en plus consciente, de leur appliquer les règles strictes du jeu déductif : l'autonomie des abstraits géométriques était ainsi fondée. Et c'est dans ce sens que j'accepte la définition de Sceptique : le raisonnement mathématique est une technique intellectuelle indépendante.

§38 LOGIQUE GÉOMÉTRIQUE ?

« Comment les faits géométriques viennent-ils s'ordonner en un théorie déductive ? » demandions-nous.

Ce qu'il faut avoir aperçu, c'est que la constitution de la géométrie en science rationnelle et déductive n'est pas le fait seulement du processus de schématisation qui part de la connaissance intuitive pour aboutir aux concepts abstraits. L'intervention de la stricte discipline du raisonnement mathématique doit être comparée à une prise de possession du domaine géométrique par un principe nouveau ; non pas étranger au géométrique, puisqu'il peut être aperçu déjà dans certaines associations spécifiquement géométriques ; ni transcendant ou descendant d'un absolu d'essence supérieure, puisque, sans quitter le territoire géométrique, on peut découvrir déjà quelques-unes de ses sources intuitives ; mais dont l'autorité est plus largement fondée, dont le « domaine naturel » de juridiction comprend d'autres provinces encore, à côté du domaine spécifiquement géométrique.

§39 AUTONOMIE DE L'ABSTRAIT

L'autonomie de l'abstrait se prépare dans tous les groupements d'images par lesquels nous recréons à notre usage la simultanéité, la succession, l'enchaînement des signes des phénomènes. Le processus de l'abstraction n'apporte aucun impératif descendant d'une vérité pure ou montant d'une chose en soi. Rien ne montre le principe de ces associations d'images ou d'idées comme imposé de droit par une réalité d'un ordre transcendant : L'esprit pourrait aussi rester inerte et ne pas tenter cette schématisation progressive, abstraite des réalisations concrètes !

C'est pourquoi nous prévoyons dès ici que l'idée de l'ordre rationnel et la méthode déductive ne sauraient être que des liens idéaux imitant schématiquement certaines liaisons concrètes, certaines lois profondes du réel. Que l'esprit ait su les concevoir et s'en servir, c'est là ce qui confère aux mathématiques leur originalité et leur valeur incomparables.

Chapitre VI : LA NATURE DU NOMBRE ENTIER

§40 LOGIQUE ÉMERGE, N'EST PAS PRÉDONNÉE

Les mots « le plan du logique » ou « la logique pure » n'ont pas de signification d'ores et déjà complètement acquise et fixée : la signification leur vient justement par l'emploi que nous en faisons. En d'autres termes, le processus de l'axiomatisation ne se définit pas en fonction de la notion prédonnée du logique ; sa signification ne vient pas s'accrocher à l'essence déjà parfaite de cette dernière. C'est au contraire le processus d'abstraction qui définit, en la suggérant, en l'évoquant, en la créant, l'essence du logique pur, essence imparfaitement déterminée et encore en état de devenir.

§41 NOMBRE PRIMITIF : ORDINAL

La notion de nombre se fonde sur une faculté de notre être mental : celle d'enregistrer la répétition d'une impression sensorielle, d'une action ou même d'une intention, en un mot d'enregistrer la répétition d'un moment de conscience. La façon la plus abstraite de concevoir un moment de conscience de ce genre correspond peut-être à la notion de *bi-unicité*, notion sur laquelle Brouwer fonde l'intuition des nombres, et qu'on pourrait apercevoir « réalisé » dans l'instant fugitif où une impression fait place à son souvenir. [...]

[...] L'énumération s'accompagne [...] — [...] probablement de façon indissolublement conjointe — d'une typification, d'une répartition en classes et sous-classes, de telle façon que deux éléments de la même classe puissent être inscrits dans la mémoire comme équivalents.

[...] on ne sait compter un certain nombre d'objets que si l'on sait aussi les placer dans un certain ordre de succession, où chaque objet n'intervienne qu'une fois. [...] cet ordre doit être porté par l'esprit dans la catégorie à énumérer.

[...] Il y a un fait d'expérience qui conduit au delà du cadre la numérotation pure et simple : c'est qu'ayant à compter, c'est-à-dire à numérotter un groupe d'objets, je puisse à mon gré changer l'ordre et la position de ces objets : je n'en obtiendrai pas moins toujours le même résultat final. Les collections finies possèdent donc un caractère invariant vis-à-vis de toutes les permutations possibles : leur nombre. Et il y a un véritable mouvement de la pensée à dire, par exemple, que certains objets sont au nombre de dix, parce qu'ils peuvent être numérotés de un à six.

On pourrait dire aussi que la notion de nombre cardinal est fondée sur la possibilité d'établir entre les nombres ordinaux et les objets d'une catégorie finie une correspondance parfaitement univoque et qui se conserve à travers tous les dérangements et objets envisagés. Cette possibilité contient un fait d'expérience irréductible. D'ailleurs, il faut aussi observer que l'on ne nomme « objets » que les « choses » qui présentent la propriété donc il est question, de telle sorte que les notions d'objet et de nombre apparaissent liées dans l'intuitif.

§42 LE NOMBRE (CARDINAL) EST UNE PROPRIÉTÉ (LA CARDINALITÉ)

En définitive, le nombre apparaît au stade intuitif comme un caractère porté par l'esprit dans un ensemble très complexe d'impressions plus ou moins nettement perçues, résultant de l'action de l'objet sur le sujet et de l'emprise du sujet sur l'objet. Ce caractère est unificateur et schématisant, et merveilleusement approprié aux fins de l'action. Il est comparable à toute autre *qualité sensible*, telle que grand, jaune, ou pesant. Un groupe d'objet a la *qualité* « trois », par exemple, comme l'un d'eux a peut-être la *qualité* « rouge » ou la propriété « d'être transparent ».

En un mot : *Le nombre, dans sa signification primitive et dans son rôle intuitif, est une qualité physique des groupes d'objets.*

§43 NUMÉRATION

L'idée générale de *système de numération* est un des fondements de l'idée abstraite de la *suite indéfiniment croissante de nombres entiers*.

[...]

— Quant aux règles et aux opérations de l'arithmétique, elles forment « une méthode éminemment adéquate aux fins humaines.

§44-45 NOMBRES PRIMITIFS & AXIOMATISÉS

Le concept de nombre une fois dégagé, on peut lui imprimer le sceau de l'axiomatisation. Il ne faut pas chercher à voir dans cette première axiomatisation une tentative de créer de toutes pièces les bases de l'arithmétique. Au contraire, il faut admettre qu'un certain nombre de notions fondamentales sont claires par elles-mêmes et données avec toute la précision désirable. [...]

[...]

Dans tous les cas, les axiomes ne sont aucunement des décrets librement et arbitrairement formulés, avec l'intention et le pouvoir de conférer l'existence aux entités que sont les nombres.

§47 LOGIQUE ÉMERGE DE L'AXIOMATISATION / AXIOMATISER N'EST PAS DÉFINIR

si notre axiomatisation a pour objet de décrire un processus d'abstraction, de suggérer une schématisation et d'évoquer systématiquement les notions que l'esprit doit accueillir — ou de faire apercevoir les caractères que l'esprit doit éliminer, — la logique consiste alors simplement à parler une langue efficace, à employer les mots et à mettre en mouvements les associations d'idées qui conviennent au but à atteindre. Il n'existe pas de règle de logique qui puisse mettre l'interdit sur une notion déjà acquise et bien en notre possession.

[...]

C'est le moment de répéter à propos du nombre ce que nous disions de la droite : le concept de nombre n'est pas donné une fois pour toutes avec un sens *ne varietur*. Nous l'avons vu se présenter sous des formes de plus en plus abstraites, mais sans que la plus évoluée puisse refouler complètement les formes antérieures (l'intuitive arithmétique). Elle n'existe au contraire que portée par celles-ci. L'activité dans la sphère abstraite s'accompagne d'une activité en quelque sorte parallèle dans les sphères antérieures, sans que jamais l'abstrait puisse se détacher complètement de ses réalisations et prendre une signification parfaitement autonome.

Évidemment les choses changent d'aspect de tout au tout si l'on prétend fournir par l'axiomatisation une véritable définition implicite de ce qui fait l'essence des nombres. Il n'est plus légitime de faire appel aux réalisations antérieures ; mais si leur emploi n'est plus justifié, tout le système d'axiomatisation s'effondre et l'axiomatisation manque son but.

§48 LE NOMBRE EN DEVENIR

En un mot : La nature du nombre n'est pas une et immuable. Les abstractions successives marquent les étapes de son devenir.

Chapitre VII : JUGEMENTS SUR LA LOGIQUE

§49 LA LOGIQUE ÉMERGE DE L'AXIOMATISATION

les édifices géométriques et arithmétiques ne prennent pas de prime abord dans notre esprit l'aspect d'une structure logique, mais qu'ils revêtent une certaine forme qui est comme une véritable substance intellectuelle. Plus encore que par eux-mêmes, ces résultats nous importent par leur portée générale, car il n'est guère possible de montrer par des exemples plus frappants comment procède la pensée dans le monde des abstraits.

[...] c'est à travers le géométrique, à travers l'arithmétique qu[e la notion du « logique pure »] va se *constituant*, du moins partiellement. Son sens n'est pas donné *a priori*, il se fait au fur et à mesure que la pensée progresse. C'est en ce sens que les relations les chaînes de conséquences qu'on peut établir dans le monde des formes géométriques ou dans celui des nombres entiers apportent aux notions de relation logique et de conséquence logique une partie de leur signification. Ce ne sont naturellement pas les seules sources de signification [...] mais il importe de les avoir aperçues sous l'angle de la réalisation de concepts en voie d'abstraction.

A mesure que *le logique pur* va ainsi précisant sa signification, on aura déjà remarqué — conséquence peut-être imprévue — que la signification de *la logique* va s'estompant et se diversifiant.

§54 BRUNSCHVICG

« [...] La théorie de la physique rejoindra donc la théorie de la mathématique, dès que celle-ci sera débarrassée du fantôme d'une raison qui serait transcendante au cours de la pensée mathématique. Alors, en effet, l'épistémologie mathématique ne comportera plus une méthodologie susceptible de se traduire en formules extérieures au savoir de la science et valables indépendamment de ce savoir lui-même. De la mathématique, il sera vrai, comme il est vrai de la physique même, que la science ne serait rien si elle prétendait se former indépendamment de l'expérience, se développer en se séparant d'elle. Au lieu d'imaginer la génération spontanée d'une axiomatique pure, il faut considérer la déduction comme un moment second, lié à la régression inductive qui a son point de départ dans l'expérience, et par quoi la géométrie est proprement, suivant l'expression d'Auguste Comte et de M. Einstein, une science naturelle, c'est-à-dire, en définitive, une science proprement dite. » [cité de *L'Expérience humaine et la Causalité physique* de L. Brunschvicg]

§59 CRITIQUE DE POINCARÉ

L'idéal de rigueur absolue a été de tous temps et l'est encore aujourd'hui, quelque chose comme un dogme intangible. La spéculation mathématique, dans sa forme et dans son objet, y plonge des racines profondes et vivaces, et peut-être y a-t-il peu de mathématiciens qui soient disposés à le mettre en question. Cependant nous ne pouvons hésiter à le qualifier de pré-critique : la science mathématique doit s'en dégager, si elle veut concilier les deux esprits qu'elle porte en elle, et dont l'un regarde le réel, tandis que l'autre s'en détourne.

§60 CRITIQUE DE BRUNSCHVICG

Nous voici arrivé à notre dernière citation [celle de Brunshvicg]. C'est elle qui apporte dans ce débat la note véritablement nouvelle. Les mots « le fantôme d'une raison qui serait transcendante au cours de la pensée mathématique » mettent directement en question l'idéal de rigueur dont nous venons de parler. Pour la première on voit s'évanouir l'aurole d'absolu qui, encore pour une Poincaré, s'attachait à la notion de déduction logique.

Chapitre VIII : LA PHYSIQUE DE L'OBJET QUELCONQUE

§61 LOGIQUE PRIMITIVE

la logique est une méthode à la fois « finale » et « objective », dont l'objet primitif est à rechercher dans les réalités les plus immédiates et les plus communes du monde physique ; et dont les fins sont celles de l'action. En un mot : la logique devra prendre l'aspect d'une science naturelle de caractère très primitif, qu'on pourrait peut-être appeler la physique de l'objet quelconque.

§62 L'OBJET EST UNE FORME PRIMITIVE

Il y a [...] dans notre connaissance, deux stades où la notion d'objet est vacillante ou chancelante. Le premier est celui de la prime enfance, le second celui où ont abouti les recherches de la physique moderne sur la nature de la matière. [...]

La physique moderne a ébranlé la notion d'objet à un triple point de vue, au moins [...]

Dans chacun de ces trois cas, l'objet a perdu ses propriétés caractéristiques d'avoir une forme déterminée, d'exister sans réticence, et d'occuper un endroit déterminé de l'espace. Il ne désigne plus qu'une totalité assez mal définie qui ne se manifeste plus que par des effets d'ensemble pratiquement déterminés entre certaines limites, mais non déterminés « jusque dans l'infiniment petit ». En un mot, la notion de l'objet se dégrade jusqu'à n'être plus qu'un « préjugé macroscopique ».

[...] L'enfant n'entre que peu à peu en possession de l'instrument mental qui lui permettra de réaliser la permanence et l'individualité de l'objet sous la multiplicité des sensations, de concevoir l'unicité du lieu sous la diversité des images, d'apercevoir enfin le nombre et sa constance dans la pluralité.

[...] de même que, sur une carte géographique, vous ne trouverez pas la fleur des champs, ni l'insecte qui passe, ni l'arc-en-ciel dans la cascade, de même tous les phénomènes naturels qui restent au-dessous d'un certain ordre de grandeur n'entrent plus individuellement dans nos sensations. Il en est enfin de même du savoir intuitif inscrit dans les formes intuitives : il est du même degré de précision ou mieux encore d'imprécision, que nos observations sensorielles. C'est sur celles-ci que ces formes sont accordées. Ce sont, elles aussi, des instruments mentaux d'une certaine robustesse, adéquats à l'action immédiate, naturelle et quotidienne, mais impropres à des effets trop minimes.

C'est cependant par leur insertion dans ces formes que les signes des choses nous restituent la réalité de celles-ci ; la « chose » n'a d'étendue, ne se localise, en un mot ne devient objet que par la façon dont elle est intuitivement repérée. Au sens même où nous disons que la couleur ou le temps sont des formes intuitives de notre connaissance, il nous faut donc dire que l'objet est une des formes primaires sous laquelle se présente la connaissance et dans lesquelles se manifeste l'incidence du plan mental sur le plan naturel.

[...] Ce découpage schématique d'une réalité fuyante en objets distincts, est merveilleusement conforme aux nécessités immédiates. Il peut ne plus l'être à certaines nécessités de la science.

[...]

En résumé : la notion d'objet est de la même nature que la notion de droite ou que la notion de nombre. Elle recherche le réel et l'atteint dans une certaine mesure ; mais elle ne l'atteint qu'à peu près ; c'est un *abstrait schématisant*.

§63 LOIS PRIMITIVES DE L'ÊTRE

Nous aurions pu déjà écrire à propos du nombre entier : « L'arithmétique, dans le stade intuitif spécialement, est un chapitre, un des tout premiers chapitres de la physique : celui qui s'occupe des lois concernant les groupes d'objets, la réunion de deux ou plusieurs groupes en un seul, le partage d'un groupe en groupes partiels, les permutations des objets dans un groupe, etc. Le nombre des objets que comprend un groupe,

avons-nous déjà dit, **est une propriété physique de ce groupe, une *qualité***, comme sont aussi des qualités la couleur ou le poids d'un objet, sa forme et le fait d'occuper un lieu déterminé dans l'espace. **Certaines parties de cette physique tout élémentaire sont actuellement attribuées à la géométrie : ce sont celles qui ont trait à la localisation des objets.** Les expressions « à droite », « à gauche », « entre, devant, derrière, près, loin, plus près, plus loin, grand, plus grand, etc. », ont toutes pour fonction de désigner et de décrire la portion d'espace que peut occuper un objet. Certaines combinaisons de ces notions très simples expriment des faits notoirement exacts, quelle que soit la nature des objets considérés — pourvu que ce soient des objets authentiques !

C'est le cas des deux affirmations que voici :

1) Si l'objet A est à droite de l'objet B et à gauche de l'objet C, A se trouve entre les deux autres ;

2) Si l'objet A est à l'objet B dans le même rapport de forme que la main gauche à la main droite, s'ils sont donc symétriques, et si l'objet C est aussi symétrique de l'objet B, A et C sont de forme identique.

Ce sont deux lois empiriques de l'objet, et la science de l'espace n'est, à ses débuts, qu'un catalogue de lois de ce genre.

Sur le même palier, ou peut-être même sur un palier inférieur, **il existe encore toute une série de lois de la même nature, empiriques au même degré**, et jouant un rôle essentiel dans la structure de nos connaissances intuitives :

[...]

Un objet ne peut être à la fois présent et absent.

[...]

Tout objet est (quelque part) ou n'est pas.

[...]

Il est clair que, pour pouvoir agir et penser, il faut pouvoir supposer que les choses conservent leur identité. Par exemple, pour pouvoir parler de Paul, il me faut être sûr que Paul ne sera pas Pierre dans un instant. Mais, ceci posé, il est tout aussi nécessaire de remarquer que la loi :

Toute chose est identique à elle-même

n'est que schématique. **Du fait même qu'une chose appartient au monde phénoménal, elle ne reste jamais absolument et complètement identique à elle-même.** C'est ainsi que, demain, Paul ne sera plus tout à fait ce qu'il est aujourd'hui, sans pour autant cesser d'être Paul. [...]

[...] **Avant de distinguer dans les très banales propriétés de l'objet que nous venons de commenter le premier dessin des trois premières règles de la logique, il faut les replacer dans le « halo intuitif » dont elles sont abstraites, et auquel elles ne sont que sommairement adéquates.**

Ceci dûment posé, rien ne nous empêche de formuler en termes précis les trois premiers lois de l'objet, valables pour un objet quelconque *que nous désignerons par la lettre A*. Les voici :

1) A est A.

C'est le principe *d'identité* ;

2) On a toujours et seulement les deux cas suivants :

A est

et A n'est pas

C'est le principe du *tiers exclu* ;

3) Les deux cas précédents s'excluent.

C'est le principe de *contradiction*.

§64 OBJET QUELCONQUE

« Nous désignons un objet, d'ailleurs quelconque, par la lettre A ! » Quel est le rôle de ce dernier signe ? [...] Ce que nous lui demandons, c'est de réaliser au même titre que l'objet originel, par son identité avec lui-même, par le fait de sa présence ou de son absence, les lois fondamentales de l'objet. Il n'est que le support de celles-ci ; il est apte à les réaliser concrètement, il se prête à les restituer par abstraction ; en un mot, c'est un *modèle* adéquat (au sens pratique) de *l'objet*.

[...] **ce qu'il y a à la fois derrière l'objet concret et derrière son signe, c'est d'abord la notion abstraite de l'objet général, de l'objet idéal qui porterait toutes les lois de l'objet et celles-là seulement ; il y a ensuite l'idée de la présence en un exemplaire individualisé de cet objet général, l'idée de l'objet quelconque.**

§65 FORMES LOGIQUES

L'énoncé des principes de contradiction et du tiers exclu, par exemple sous la forme que voici : « Ou bien l'objet A est, ou bien il n'est pas », montre très distinctement que la conception de l'objet s'accompagne d'une véritable floraison d'abstraites accessoires ou dérivés. L'énoncé précédent évoque, en effet, simultanément la présence et l'absence de A ; il évoque non pas deux phénomènes que je sais me représenter conjointement, parce que la réalité me les présente habituellement conjoints ; il demande au contraire que je réunisse dans une même pensée deux événements qui s'excluent l'un l'autre : il exige donc **que je passe de l'idée d'existence à celle de possibilité, du fait à sa virtualité** — plus encore à la conception totalitaire de tous les cas.

[...]

Les conjonctions ou, si, et..., etc., se réalisent intuitivement par l'intermédiaire de certaines formes mentales ad hoc.

§66 LOGIQUE & EXISTENCE

C'est naturellement toute la logique élémentaire qui pourrait être présentée sous cette forme : *celle d'une théorie préliminaire de l'existence objective.*

§67 GENÈSE DU SYLLOGISME

Le tout contient la partie et la partie ne fait pas le tout. L'origine intuitive de cette règle dite logique est si évidente qu'il est superflu d'y insister. La seconde loi à laquelle on est tout naturellement conduit est celle-ci :

Ce qui est dans la partie est aussi dans le tout.

Et c'est au fond déjà la règle du syllogisme.

On parvient également à celle-ci en partant de *la relation du contenant au contenu, telle que la réalisent les emboîtements successifs.*

Chapitre IX : LA PHYSIQUE INTUITIVE DES QUALITÉS L'OBJET ARISTOTÉLICHIEN

§68 INDIVIDUALISATION DES QUALITÉS

L'objet n'est jamais conçu complètement dépouillé de ses qualités physiques : son individualité, son unité ne peuvent être aperçues que si nous savons aussi réaliser la constance ou la variation concomitante de certains caractères comme d'être rond ou de forme irrégulière, et en même temps d'être rouge et d'être lourd. En un mot, *l'individualisation de l'objet s'accompagne nécessairement de l'individuation de ses qualités ou propriétés physiques.* [...]

[...] la qualité ne nous introduit pas dans la connaissance parfaite de telle ou telle propriété de structure d'un objet, [...] elle n'exprime pas une façon d'être en soi et définitive de celui-ci ; mais [...] elle ne nous communique qu'une vue d'ensemble, grossière et sommaire, qu'une connaissance plus approfondie vient souvent détruire pour la remplacer par quelque chose de foncièrement différent.

§72 RACCORD PHYSIQUES PRIMITIVE & EXPÉRIMENTALE

La désignation des qualités sensibles recouvre toute une physique intuitive, toute basée sur les notions fondamentales de *l'objet* et des *propriétés physiques prédéterminées* de l'objet. Nous ne pouvons assez insister sur les deux points que voici :

a) Ces notions fondamentales intuitives ne sont que des schématisations simplificatrices [...]

b) *Cette physique des qualités immédiatement perçues forme la première assise de la physique du laboratoire, de même que la connaissance intuitive de l'espace dit physique est le fondement de la géométrie, et que la physique de l'objet quelconque contient les premiers rudiments de la logique.*

[...]

Toute notre connaissance « dégénère » en fin de compte en événements qui relèvent de la physique intuitive et naïve, en coïncidences dans le temps et l'espace, en nombres de perceptions distinctes, en identité ou en diversité de certaines qualités, etc.

Comment peut-il alors se faire que la science porte notre connaissance au delà du domaine de l'intuition immédiate ?

C'est naturellement par le fait que *certaines configurations accessibles à notre intuition peuvent être regardées comme les images schématiques de configurations ou de phénomènes moins accessibles ou d'une autre nature.*

§73 CLASSE (DE SIMILITUDE) & QUALITÉS CONTRAIRES

La classe est un groupement ouvert, susceptible d'être complété si la nécessité s'en présente. Ainsi la classe des objets rouges est notion qui, pour se constituer, n'exige pas la connaissance préliminaire de tous les objets rouges. Il faut simplement que, de chaque objet qui se présentera, on puisse distinguer et décider s'il doit être attribué à la classe ou non.

Le processus qui conduit à l'individualisation de l'objet conduit naturellement, nous le disons, à *l'individualisation des qualités sensibles.* *La présence ou l'absence d'une qualité s'abstrait à son tour dans la notion des qualités contraires. C'est à ces dernières que vient d'étendre la validité des principes de contradiction et du tiers exclu.* Les caractères d'existence de l'objet s'étendent ensuite aux classes, et en particulier aux classes complémentaires.

§74 ÉCHEC DE LA SCOLASTIQUE

les caractères de l'objet aristotélicien sont projetés sur les *universaux*, de sorte que la méthodologie de la scolastique revient au fond à ériger une certaine « théorie de l'objet » en système universel. [...]

[Cette entreprise] visait à un but trop élevé pour ses moyens ; le développement du savoir en a fait ressortir les faiblesses. Mais il faut bien remarquer que, si l'on accepte de n'y voir qu'une théorie schématique de l'objet aristotélicien, elle présente la première esquisse distincte de la méthode que nous avons constamment mise en évidence : *conception de certains abstraits à partir des vues intuitives, et constitution d'une théorie plus ou moins autonome sur la base de ces abstraits. Le vice essentiel, qui l'a détachée du réel et qui l'a portée à une position extrême insoutenable, c'est de n'avoir pas reconnu sa propre nature ; c'est de s'être donnée pour une théorie absolue de l'être et des essences, quand elle n'était qu'une esquisse schématique d'une théorie de ce genre.es.*

Chapitre X : LES TYPES

§76 MODÈLES INTUITIFS (EN LIEU DES UNIVERSAUX)

nous reconnaissons une maison parce qu'elle est conforme à un certain *modèle intuitif* [...].

Comment ces modèles nous sont-ils données ? Ils sont *abstraites, évidemment des objets concrets auxquels ils correspondent.* [...]

Il n'est d'ailleurs pas absolument nécessaire que nous nous fassions une idée très détaillée de la façon dont nous en avons possession de ces images mentales sommaires, pourvu que nous ayons reconnu le fait essentiel suivant : que *ces images n'ont qu'une très relative fixité.* Que chaque trait et chaque qualité peut varier entre certaines limites, sans que le sens du tout soit remis en question. L'objet n'y entre pas seulement par sa forme ou toute autre propriété physique, mais aussi par tels ou tels caractères de convenance, d'utilité, de destination, etc. *Ces images mentales sont ce que nous appelons les type ou modèles intuitifs.*

§77 OBJET GOETHÉEN (SIMILITUDE)

nous conviendrons d'appeler « *objet goethéen* » l'objet considéré comme *déterminé* (en même temps que tous les objets du même nom) *par la conformité à son type*, et en l'opposant à l'objet aristotélicien dont il a été question au chapitre précédent.

§79 LE TYPE EST UNE FORME PRIMITIVE

Imaginé pour caractériser des individus spéciaux ou anormaux, [la signification des types psychologiques qu'on a été amené à concevoir] s'élargit et se transforme jusqu'à décrire une propriété de structure de la mentalité normale. *L'idée générale de type* est engagée dans un processus semblable d'extension. *Conçue d'abord à propos des objets concrets, elle a tendance à s'étendre à tout ce qui peut s'objectiver ; et à gravir, comme l'idée d'objet, toute l'échelle des abstraits.* Il faut accepter comme un fait que notre activité mentale soit ainsi orientée ! C'est ce que nous exprimons aussi en disant que : *l'objet et le type sont des formes de notre intuition.*

§80 ÉBAUCHE INTUITIVE DE L'AXIOMATISATION

le processus par lequel les notions intuitives se forment et entrent en rapport les unes avec les autres *est lui-même une sorte d'esquisse intuitive de ce que nous avons nommé si souvent la schématisation axiomatique.*

[...] rien ne nous empêche de distinguer dans la physique intuitive le premier dessin d'une structure axiomatique qui aurait pu être dégagée. C'est maintenant dans ce cadre qu'il faut replacer les types, pour se faire une idée de leur rôle. Ils forment en quelque sorte l'armature de la pensée ordinaire. *Ils y jouent un rôle comparable à celui des notions fondamentales dans les axiomes.*

Chapitre XI : LA THÉORIE DU VRAI ET DU FAUX

§81 LOGIQUE PRIMITIVE (RAPPELS)

Jusqu'ici nous avons mis tout notre effort à conférer à la logique l'aspect d'une science naturelle très élémentaire. *Les notions logiques fondamentales*, celle d'objet, de chose ; celles d'existence ou de non-existence,

celles de qualité et de classe, en même temps que les opérations logiques « et » et « ou » ont perdu leur caractère traditionnel d'abstractions prédéterminées dans un monde mental *a priori* : elles se sont toutes révélées comme des schématisations à la fois efficaces et inachevées, suggérées par la réalité et conformes à notre propre structure mentale.

§82 VRAI ABSTRAIT

La logique va [...] prendre un nouvel aspect. Du rôle de « Formulaire de l'existence », elle va passer à celui d'une « Théorie du Vrai et du Faux » ! L'idée du vrai a déjà fait l'objet d'un dialogue contradictoire entre Sceptique, Idoine et Parfait. Aussi pouvons-nous nous borner ici à quelques remarques simples. **Le vrai et le faux sont naturellement indéfinissables : tout ce qu'on peut faire, c'est d'expliquer comment des notions de cette espèce peuvent venir doubler le concret dont elles sont sorties.** Sous la forme du vrai et du faux sans prétentions à une infaillibilité absolue, elles se réalisent dans la sphère des actions simples, pour l'interprétation desquelles les vues naïves et toutes primitives sur la réalité sont suffisamment efficaces. On pourrait à cette échelle, définir le vrai comme étant ce qui ne peut être démenti par les événements ou les faits... Mais à condition que la vérification dépende elle-même d'une action simple, ou d'une constatation de sens commun. « Est-il vrai, oui ou non, que la neige soit blanche ? » — « Mais certainement, à la condition que vous fassiez abstraction de cette ombre bleue, de ce reflet jaunâtre, de cette bande grise, etc. Ne vous arrêtez pas trop aux détails, sans quoi il nous faudra analyser toutes les circonstances, et appeler tous les ordres de la connaissance à notre secours. Acceptez la définition précédente pour ce qu'elle vaut : nous avons bien combien elle est sommaire, et que tous les termes en deviennent problématiques s l'on en veut serrer le sens de trop près. »

La notion du vrai logique sort de cette première idée du vrai comme la notion de la droite idéale sort, par exemple, de la rectitude grossière d'une rue.

Pour ce qui nous concerne, **c'est spécialement par l'intermédiaire des lois de l'objet que nous voyons s'introduire l'idée du vrai.** Qu'elles appartiennent à la catégorie des règles arithmétiques ou géométriques, ou plus spécialement à celle des lois prélogiques, **elles sont pratiquement infaillibles dans leur domaine naturel de validité. Par une pente qui lui est, semble-t-il, naturelle, l'esprit imagine une infaillibilité absolue, une adéquation sans réserves à des réalités déterminées une fois pour toutes jusque dans leur essence... et en fait les attributs d'une vérité idéale.** C'est alors *elle* qu'il voit réalisée, plus ou moins parfaitement, dans tous les cas concrets.

On saura faire ici les distinctions nécessaires ! C'est donc cette vérité abstraite et schématique, et son contraire, que nous mettrons à la base de la Logique du Vrai et du Faux. Mais il est bien clair qu'**accepter ces notions pour y fonder un édifice axiomatique, ce n'est pas nécessairement accepter aussi le rôle (traditionnel) qu'elles ont joué dans les édifices dits rationnels, rôle que nous avons dénoncé comme précritique et que nous avons énergiquement repoussé ! [...]**

[...] la notion de continu géométrique peut être regardée comme assurée axiomatiquement. Mais ce serait une erreur manifeste que d'en vouloir déduire la continuité de la matière. Et ce serait une égale erreur que de conclure de la discontinuité de toute répartition de la matière à l'inexistence du continu géométrique. **Il y a là deux ordres d'existence différents, l'existence axiomatique ne doublant efficacement l'autre que schématiquement, et ne pouvant lui être assimilée qu'entre certaines limites.**

C'est de la même façon qu'il est parfaitement licite d'admettre d'admettre le Vrai absolu et le Faux intégral au rang d'idées schématiques, et de faire peser sur eux tout le poids d'un système axiomatique, **sans accepter pour cela toutes les projections, assimilations et identifications qu'on est porté à faire dans les autres compartiments de la pensée.**

[...] IDOINE. [...] L'emploi du vrai abstrait est légitime pourvu qu'on sache aussi s'en détacher.

§83 ÊTRE PUR

Ce qui est précritique, ce n'est pas la notion [du Vrai abstrait] en elle-même, pourvu qu'on ne se méprenne pas sur sa nature. **Ce qui est précritique, c'est d'imaginer qu'il y ait une réalité préformée à laquelle elle est adéquate.**

[...] rien ne nous empêche de reprendre ce que nous disons, dans la Physique de l'objet, des combinaisons « logiques » :

$$A \vee B, \quad A \& B, \quad \text{etc.}$$

de formuler encore une fois tous les énoncés d'existence que nous connaissons déjà, mais en les « faussant » systématiquement, en remplaçant partout la notion d'existence au sens intuitif par celle d'« existence pure ». **Les lois empiriques deviennent alors des lois idéales, c'est-à-dire des axiomes.**

§84 LOGIQUE FORMELLE (ABSTRAITE)

Il n'y a maintenant plus qu'un pas à faire pour parvenir à la Logique élémentaire du Vrai et du Faux. Il faut tout d'abord changer de concept fondamental : au lieu de supposer que c'est un objet, il faut supposer que

c'est un *énoncé*, par exemple un énoncé d'existence — énoncé qui n'interviendra d'ailleurs que par sa vérité ou sa fausseté. Quant au reste, il suffira d'imiter assez étroitement les lois de l'objet.

[...] l'énoncé $A \sim v$ est aussi un énoncé. Est-il vrai ? Est-il faux ? Mais, direz-vous, la chose est toute simple : il est vrai si A est vrai ; il est faux si A est faux ! Eh bien, en dépit de la simplicité de tous les termes, vous aurez fait une regrettable confusion. Vous dite :

Si A EST VRAI, dire que A est vrai est un énoncé vrai. Or, dans le membre de phrase souligné deux fois, le mot « est » et le mot « vrai » doivent revêtir leur sens absolu, leur sens abstrait, — axiomatique si l'on préfère. Mais dans le membre non souligné, les mêmes mots s'appliquent à votre action « dire que A est vrai ». Vous retombez dans le monde de l'application, des réalisations du sens abstrait : dans la sphère des significations intuitives. En d'autres termes, je suis prêt à accepter votre suggestion, mais en la « faussant », en la sollicitant vers l'abstrait, en la hissant au rôle d'axiome.

[...] acceptons les axiomes (pour tout X)

$$\begin{aligned} X \sim X &— v \\ X \sim X &— f \end{aligned}$$

Ils nous font évidemment passer par-dessus les difficultés que nous venons de signaler.

[...] Nous ne pouvons laisser sans commentaires la vérification à laquelle nous venons de faire allusion [la validité de tautologies]. Sur quel plan a-t-elle lieu ? Quels moyens met-elle en œuvre ? Reste-t-elle dans l'abstrait, ou revient-elle sur le plan des réalisations ? [...]

Tous nos explications sont basées sur la distinction des [quatre cas d'une table de vérité]. Or, celle-ci serait impossible *si nous n'observions sans y prendre garde, les lois fondamentales de l'objet et des groupes d'objets*. Nous avons introduit des symboles tels que $\&$ et \rightarrow . Mais saurions-nous les reconnaître comme étant identiques, malgré leurs différences inévitables, *si nous ne savions pas concevoir, sans même le vouloir, le type correspondant ?*

Bien plus encore ! Nous vérifions que deux formes sont équivalentes : mais pour le faire (et sans revenir encore une fois sur tout ce qui touche aux lois de l'objet), *nous retombons dans la signification ordinaire du vrai, que nous réalisons sans en avoir conscience*. Ainsi l'axiomatisation ne crée pas de toutes pièces un abstrait autonome : elle superpose un schéma à d'autres schémas, le sens du dernier ne pouvant jamais complètement se passer de ce que signifient les premiers.

[...]

L'instant décisif de cette axiomatisation n'est d'ailleurs pas celui où les axiomes sont explicitement énoncés, et où ils sont mis en formules. C'est bien plutôt *celui où les notions nouvelles sont nettement perçues comme abstraits par rapport aux notions premières*. [...] le moment où, *sans qu'on puisse expliquer en quoi consiste leur réalité — parce qu'elle est sui generis* — les nouveaux abstraits viennent occuper le premier plan de l'esprit.

Chapitre XII : « TOUS » ET « L'UN OU L'AUTRE »

§86 « TOUS » INTUITIF (ORIGINE DU PLATONISME ENSEMBLISTE)

Tant qu'il s'agit d'une catégorie peu nombreuse, d'un groupe d'objet étalés sous nos yeux et que le regard peut embrasser d'un seul coup d'œil, la signification du mot « tous » est immédiate. [...]

[...] Pour les collections peu nombreuses, *l'opération intellectuelle qui consiste à en rassembler les éléments par la pensée* comme on les rassemble dans un seul coup d'œil nous est si habituelle, *correspond si bien à notre façon de construire le monde, que nous attribuons à une totalité une existence analogue à celle des objets ordinaires* ; que nous allons jusqu'à la considérer comme une chose en soi. Nous avons mille peines à reconnaître que totaliser, c'est porter un schéma dans les choses, c'est interpréter ce que nous percevons de la « réalité » selon la structure et le penchant de notre esprit. Mais nous sommes maintenant avertis. L'analyse des notions intuitives d'objet et de type, et surtout nos toutes premières réflexions sur les combinaisons logiques, telle que $A \& B$ ou $A \vee B$, nous ont habitués à distinguer la part qui revient à notre structure mentale. [...]

[...] si l'on a bien compris que « et » est une création originale de l'esprit on n'aura pas de peine à distinguer la même activité génératrice de formes et de modèles à l'origine de la notion « tous ». *C'est une remarque à laquelle il faut tenir fermement, si l'on ne veut pas d'emblée porter cette notion au delà de ses limites naturelles.*

« Tous » n'a ainsi, pour commencer, aucun sens portant plus loin que son emploi habituel. Il ne se constitue pas isolément, mais dans ses rapports avec toutes les notions usuelles de la même nature, telles que chacun, aucun, l'un deux, les autres, etc., sans compter celles que nous avons déjà mentionnées.

[...]

Dire de *tous* les objets d'une certaine catégorie qu'ils possèdent un certain caractère, c'est dire que *chacun* de ces objets le possède.

[...]

Dire *qu'aucun* de ces objets n'est présent, c'est dire que *chacun d'eux* est absent ou que *tous* sont absents.

§87 « TOUS » IDÉAL

Les choses changent d'aspect, non seulement si l'on suppose que l'on a affaire à une infinité d'éléments, mais déjà si leur nombre, tout en restant fini, devient suffisamment grand pour qu'on ne puisse les examiner un à un du premier jusqu'au dernier. La signification de « tous » s'éloigne déjà sensiblement de ses origines intuitives. [...] il est clair que l'évident a changé de signification. En l'absence du contrôle immédiat, du contact direct dans la sphère intuitive, tout devient pour une bonne part conventionnel. [...] En un mot, le caractère d'abstraction que nous avons déjà souligné il y a un instant devient beaucoup plus sensible. **La construction verbale qui serrait d'aussi près que possible un acte intellectuel très commun** et que rien ne nous empêchait de répéter, garde sa forme, mais renonce à s'accompagner toujours de la possibilité toute proche de réalisation. Elle **revendique le droit de se porter plus loin que le domaine réduit où son sens était primitivement fondé** : en un mot, **de schéma qui ne voulait qu'être fidèle, la construction verbale prétend devenir schéma qui se constitue librement**.

[...] En un mot : le sens de « tous » ne précède ni ne suit maintenant la notion de classe ou d'ensemble finis. Ces deux notions ont la même portée ; la même portée que *toute la logique des classes*. Et celle-ci est un schéma axiomatique portant sur le plan de l'abstrait les notions et les relations que nous suggère notre expérience des classes suffisamment restreintes pour que nous en puissions distinguer effectivement *tous* les éléments. Employer le mot « tous » selon nos habitudes de langage, c'est donc accepter de se servir de ce schéma.

§88 « TOUS » AXIOMATISÉ (& SA NÉGATION INTUITIONISTE)

On s'éloigne encore plus du sens précédent si l'on passe aux catégories infinies. A-t-on encore le droit de parler par exemple de *tous* les nombres entiers, ou de *tous* les nombres rationnels ? N'est-il pas absurde de penser qu'on puisse les avoir passés tous « en revue » l'un après l'autre, puisqu'il n'existe plus de dernier, et puisqu'il est dans la définition de l'infini de ne pouvoir être épuisé ?

Rappelons tout d'abord la remarque nous faisons à propos de la *classe* logique. Celle-ci, disions-nous, est autre chose qu'un groupe d'objets tous donnés d'avance. C'est un groupement ouvert, susceptible d'être complété au fur et à mesure des besoins et des circonstances [...] encore en devenir. [...] Encore une fois, *tous* ne va ni plus loin ni moins loin que la notion de classe elle-même. [Dans « *Tous les objets sont rouges !* »,] « *Tous* » formule une certaine hypothèque sur les objets présents et, surtout, sur les objets à venir ! Sa signification est ouverte. Et le fait qu'elle est ouverte fait partie intégrante de cette signification elle-même. [...]

[...] Tout au plus remplacerons-nous dans la règle que voici :

« Sil n'est pas vrai que tous les objets d'une classe soient rouges, c'est *qu'il y en a un* au moins *qui n'est pas rouge* » les termes soulignés « *il y en a un... qui n'est pas rouge* », par cette autre tournure : « *il s'en présentera un... qui ne sera pas rouge* ».

[...]

On ne s'étonnera plus, maintenant, de la contradiction contenue dans le fait qu'on parle de *tous les nombres* entiers, sans pouvoir les « énumérer un à un jusqu'au dernier ». La contradiction existe véritablement, mais entre deux notions différentes : la première intrinsèquement relative à une suite infinie et dénombrable, la seconde relative à un groupe fini d'objets.

§89 OBJET QUELCONQUE

« Si l'un quelconque de ces objets est noir, tous sont noirs. » Dans ce sens, « l'un quelconque » est d'ailleurs synonyme de *tout*. On aurait pu dire :

« Si tout objet de ce groupe est noir, tous sont noirs. »

Sa schématisation, qui pourrait être suivie parallèlement à celle de « tous », aboutit à *la notion de variable libre*, relative à une catégorie, celle qu'on évoque dans les expressions suivantes :

Soit *a* un élément quelconque de la classe,

ou Soit *n* un entier quelconque,

ou encore Soit *A* un point quelconque du plan, etc.

Cette notion représente un compromis entre celles de l'individu et de la totalité, un compromis aussi entre la détermination parfaite et l'indétermination totale. Il ne viendrait aujourd'hui à l'esprit de personne de contester la primordiale importance de ce concept intermédiaire.

§90 RÉSUMÉ

Jetons un regard en arrière, sur le chapitre : La Physique de l'objet quelconque et sur les chapitres suivants. On peut les résumer en quelques mots. De *toutes les notions intuitives dont il y fut question (de celle*

d'objet en tout premier lieu), nous avons commencé par montrer qu'elles répondent au modèle tracé par Idoine : elles sont sommaires, schématiques, inachevées.

Nous avons ensuite indiqué dans les grandes lignes à quelles théories elles donnent naissance, ou mieux encore au sein de quelles théories elles s'élèvent au rang de notion abstraite :

a) La notion « d'objet », en même temps que celles de présence, d'absence, d'être, de non-être, de cas d'existence, etc., s'ordonnent en une Théorie préliminaire de l'existence, ou une Théorie des objets idéaux ;

b) Le vrai et le faux intuitifs avec la notion d'énoncé, après être devenus le vrai et le faux absolus (que nous appellerons platoniciens, pour les distinguer du vrai et du faux brouweriens dont il nous faudra dire quelques mots plus tard) se sont constitués en Théorie ou Logique du vrai et du faux. [...]

c) Les notions intuitives d'objets, de qualité et de propriété conduisent aux notions abstraites de classe et d'attribut. [...]

Nous n'en dirons pas davantage à cet endroit sur la méthode interne qui permet de déduire des formules-axiomes les autres formules de la théorie, qu'on pourrait appeler la *Théorie des attributs abstraits*.

d) Le rôle des *types*, enfin, a été aperçu déjà dans l'emploi des symboles.

§91 LE RÔLE ORIGINEL DE LA LOGIQUE

Qu'on veuille bien remarquer que l'objet de ces derniers chapitres, malgré les attaches évidentes de ceux-ci avec la Logique traditionnelle, n'est aucunement une *Méthode de raisonnement*. Les règles que nous avons énoncées ne doivent en aucun cas (pour l'instant) être interprétées comme des *Regulæ* pour conduire la pensée : ce sont, sous une formulation plus ou moins abstraite, des lois naturelles visant le monde de l'objet et des qualités. [...] qu'on veuille bien ne pas se laisser induire en erreur par quelques dénominations, comme le vrai, le faux, l'être, le non-être, qui sont habituellement chargées d'une signification absolue que nous ne revendiquons pas. Au contraire ! Mais qu'on s'attache fermement à leur sens extérieur. Leur milieu naturel, ce sont les tout premiers débuts de la physique ; les notions qui leur sont proches et apparentées ce sont celles qui sortent du réel le plus terre à terre, et qui ne cherchent pas s'élever beaucoup plus haut que celui-ci.

Que la logique des objets, des attributs et des énoncés que nous avons tâché d'évoquer, trouve plus tard une tout autre destination, qu'elle prenne la source même du rationnel : c'est une tout autre affaire, sur laquelle il nous faudra bien nous expliquer une fois. Mais dans l'intérêt même de cette explication définitive, il nous faut avoir distinctement aperçu la signification la plus concrète et le rôle le moins ambitieux.

Chapitre XIII : LA MÉTHODE AXIOMATIQUE

§94 SCHEMA

Demandons-nous si la carte est une image fidèle de la forêt. [...]

[...] Notre carte pourrait paraître sans valeur à celui qui aurait pour mission de faire le dénombrement des érables à sucre, mais elle est parfaitement adéquate à nos intentions.

Que dire d'une représentation de cette nature ? Qu'elle remplace une certaine réalité par une réalité plus accessible, où nous sommes en mesure d'apercevoir, en dépit des différences, une identité de structure avec la première, — identité d'ailleurs limitée et qu'il faut se garder de porter au delà de sa signification naturelle, — et structure qui se manifeste par une correspondance assez sommairement définie, et qu'il ne conviendrait pas de préciser outre mesure. Cette correspondance est *symbolique*, et la carte est un *schéma*.

Énumérons quelques caractères essentiels du schéma :

a) Il ne fournit qu'une description sommaire. [...] Rien que ceci :

Tout arbre, quelle que soit sa forme, et sa nature, est désigné par un point ;

b) Il pourrait être complété (il est encore en devenir) !

[...]

c) Il possède une structure propre, intrinsèque.

[...]

d) Le schéma possède enfin une signification extérieure.

§96 SCHEMA GEOMETRIQUE

la constitution d'un système axiomatique revient à la construction d'un schéma mental ad hoc.

[...] La formation des notions intuitives peut être envisagée comme un pré-axiomatisation, dans laquelle, mutandis mutatis, tous les caractères de l'axiomatisation mathématique peuvent être identifiés.

Cette dernière à son tour fournit la méthode-type selon laquelle se constituent les schémas abstraits.

§97 POSITION MÉDIATRICE DES AXIOMES

Combien un mot peut être de proche en proche détourné de son sens originel, combien le concept qu'il recouvre peut varier par dégradations insensibles et quelquefois par sauts brusques, le mot d'axiome en est maintenant un exemple frappant ? Qu'était pour Platon ? L'expression d'une vérité en soi ! Pour Poincaré ? Une convention à peut-être librement consentie. Pour Russell ? Un jugement hypothétique. Pour Zermelo ? Au sein du système de base, une partie intégrante d'une définition implicite. Toutes ces interprétations ont, il est vrai quelque chose de commun ; elles ne voient de l'axiome que le côté tourné vers l'abstrait. Elles lui confèrent une nature purement rationnelle sur laquelle la réalité extérieure ne devrait avoir aucune prise. En revanche, elles diffèrent du tout au tout quant à l'appréciation de la liberté que nous avons de les accepter ou de les refuser.

Et maintenant ? L'axiome est à mi-chemin entre la fiction et la description du réel. Il garde le souvenir du réel, parce qu'il l'a recherché — et qu'il ne l'a pas complètement manqué ! Il peut toujours s'y réintégrer, en se repliant sur sa signification extérieure. Mais il porte dans sa structure intrinsèque la marque de notre activité créatrice, de notre faculté plus ou moins librement bâtisseuse d'images et de formes.

[...]

En un mot : *Il n'y a pas d'axiome sans un concret où il fonde sa signification extérieure et un abstrait à la structure duquel il participe.*

§98 CRITIQUE

En un mot, l'axiomatisation par « définition implicite » manque complètement son but, lorsqu'elle prétend se passer entièrement des « significations antérieures ». (Le mot antérieur remplace ici avantageusement le mot extérieur dont nous avons pris déjà l'habitude !) Ce n'est qu'une imitation superficielle de l'axiomatisation géométrique. *C'est une méthode sans fondement.*

§99 UTILISATION DES MODÈLES

Le raisonnement qui précède [prouvant l'indépendance d'axiomes] *sort certainement des limites de la stricte logique déductive. Il est d'une nature toute nouvelle, car il postule un lien non seulement entre les objets qui se trouvent sur le même plan d'existence, entre les abstraits d'une même sphère, mais encore entre un système déductif et sa réalisation, c'est-à-dire entre un abstrait et un concret. C'est la première fois, le fait mérite d'être souligné, que nous voyons un raisonnement accepté comme authentiquement mathématique, faire aussi ouvertement état de la notion de concordance schématique.* Le principe sur lequel il repose prend tout naturellement sa place dans notre exposé ! Le voici : *Un modèle qui se trouve en concordance schématique avec un système déductif ne peut réaliser certains axiomes sans réaliser aussi leurs conséquences.*

Chapitre XIV : LES ANTINOMIES

§101 LOGIQUE PURE ?

L'insistance avec laquelle nous avons mis en parallèle l'analyse de la logique et les analyses précédentes de la géométrie et de l'arithmétique a suffi pour *dépouiller la logique traditionnelle de sa position d'exception.* Elle ne nous apparaît déjà plus comme transcendante au plan de la science — pour reprendre l'expression de M. Brunschvicg.

§102 ATOMISME DES « PRINCIPIA »

« [...] Le réalisme de M. Russell est un *atomisme* ; la vérité de la déduction progressive... est fondée sur la réalité des termes ou des rapports simples auxquels est suspendue cette déduction. » [citation de *Les Étapes* de L. Brunschvicg]

§103 L'ANTINOMIE DE RUSSELL

Est-ce de la mauvaise foi que de pousser avec raideur certaines hypothèses jusqu'à leurs conséquences absurdes, si elles le permettent ? Le fait est que, si l'on arrive pas à soumettre les notions générales d'attribut et de classe à certaines conditions restrictives convenablement choisies, elles ne pourront légitimement coopérer à la vaste transcription des mathématiques en langage de logique.

§104 TENTATIVE ENSEMBLISTE

La faute, dira-t-on, est de parler de cet ensemble [de tous les ensembles] ! Peut-être ! Mais en en parlant, nous en faisons qu'utiliser les notions générales admises au début, dans leur sens extensif, qui est une partie essentielle de leur signification. Si la faute n'est pas dans le travail de la déduction elle-même, que nous

avons passé sous silence (et qui est de la même qualité que les raisonnements mathématiques ordinaires), c'est donc qu'il est dans la nature même des notions *fondamentales*.

En d'autres termes, *l'idée générale de l'ensemble, comme collection infinie d'objets aristotéliens, est impropre aux fins auxquelles on la destine.*

§106 UN DILEMME

Si l'on décrétait que les relations logiques légitimes ne doivent s'établir qu'entre des objets différents et que jamais elles ne doivent mettre un objet en rapport avec lui-même, les antinomies du type précédent tomberaient d'elles mêmes.

Le malheur, c'est que les conséquences d'un décret aussi tranchant nous mèneraient beaucoup trop loin. *Les mathématiques ne respectent pas cette interdiction.* Elles opèrent, à juste, semble-t-il, avec une quantité de relations présentant le même défaut, à commencer par toute la gamme des relations d'égalité et d'équivalence.

§108 FAIBLESSE DU GÉNÉRAL EXCESSIF

Ces antinomies n'intéressent pas les édifices axiomatiques des mathématiques classiques où l'on ne fait jamais usage de *l'idée générale d'attribut* ou de *l'idée générale de classe* : *il n'y a pas d'antonomie spécifiquement géométrique ou spécifiquement arithmétique.* [...] toute notre étude montre qu'au contraire les abstraits se constituent et les théories s'organisent sans l'intervention effective de ces abstraits-limites, aptes tout au plus à marquer sommairement l'orientation générale d'un processus mental. Nous pouvons donc affirmer que *la méthode d'axiomatisation fondée sur la concordance schématique met les mathématiques complètement à l'abri des antinomies logiques.* Non pas que celles-ci ne représentent que des obstacles négligeables et faciles à franchir. Au contraire. Mais *ils ne se trouvent pas sur les lignes d'axiomatisation par lesquelles les mathématiques se sont acheminées vers leur état actuel*, et ne peuvent ni les rompre, ni les intercepter. *C'est sur leur prolongement que leur action se fait sentir.*

[...] Ce que les antinomies compromettent sérieusement, c'est le succès de la tentative totalitaire : Elles barrent la voie au rassemblement générale des notions mathématiques sur le terrain trop exposé de la logique des attributs. *Il faudrait, pour que les concepts de classe, d'attribut et de relation supportent le rôle écrasant qui leur est dévolu, qu'on puisse les concevoir dans leur plus grande généralité. Or, si l'on veut les pousser jusqu'à cet absolu, ces concepts s'évanouissent dans l'indétermination.* [...]

En un mot : *les antinomies* sont alors les symptômes d'un mal profond. Elles *sont les conséquences d'une position de départ bâtarde, à cheval à la fois sur l'abstrait et le concret. Et d'une axiomatisation mal partie et mal orientée : partie avec des notions fondamentales pour lesquelles la transmutation du concret en abstrait ne s'est pas achevée ; et orientée par une fausse appréciation des rapports du réel et du rationnel.*

Chapitre XV : LES STRUCTURES

§111 HIATUS CONCRET-ABSTRAIT

il y a entre la logique enrobée dans les relations entre objets physiques ou mathématiques et la logique pure le même hiatus essentiel qu'entre la géométrie réalisée dans les corps matériels et la géométrie pure, science rationnelle : *l'hiatus même où se marque l'opposition du concret à l'abstrait qui en est né.*

§112 OBJET & LIAISON LOGIQUES

Les notions fondamentales de la nouvelle logique qu'il nous faut maintenant introduire ne peuvent être qu'évoquées et suggérées. [...] Elles n'ont pour but que de *déclencher l'acte intellectuel qui vient dégager un trait schématique unificateur à partir de notions en fait différentes.*

Les deux premières notions de logique pure qui doivent être ainsi créées sont celles de *liaison logique* et d'*objet* ou d'*élément* logique. La première est à abstraire de tout ce qui est liaison de fait ou relation dans les ordres des plus divers. [...]

[...] L'objet logique n'a pas d'autres propriétés *a priori* que de pouvoir être conçu comme différent d'autres objets logiques et de pouvoir servir de point d'attache à certaines liaisons logiques.

Pour deux objets logiques, le fait d'être différentes doit être conçu indépendamment de tout caractère spécifique par lequel cette différence pourrait se manifester ; sans donc qu'il soit nécessaire ou même possible de décrire en quoi ils diffèrent. Et de même deux liaisons logiques sont à considérer soit comme identiques soit comme différentes sans que, dans ce dernier cas, il y ait lieu de préciser en quoi elles diffèrent.

[...] Si [...] *il y avait un sens à dire qu'il existe entre un a et un b variables au sein de certaines collections toujours une même liaison*, nous dirions que l'ensemble de ces liaisons équivaut à une *relation logique*.

§118 RÉSOLUTION DES ANTIOMIES ÉPISTÉMOLOGIQUES

a) S'il n'y pas ici [dans l'antinomie de Richard] dérogation à tel ou tel principe de la logique des structures, il y a péché évident contre la doctrine de tout cet ouvrage.

Admettre que l'ensemble [de tous les nombres dont la définition minimale contient moins de mille mot ou signes] est fini, c'est admettre que les mots et les phrases ont un sens *ne varietur*. Or ce sens est en constante révision. La même phrase n'aura pas nécessairement le même sens si entre la première fois qu'on la prononce, et la second, cinq cents mots intercalés ont complètement modifiés la base de son interprétation ;

b) Sans compter que certaines expressions comme « le suivant » n'ont pas de sens par elles-mêmes, mais seulement en fonction du sens des mots qui les précèdent.

En bref, l'ensemble [précédent] est ouvert et [son] plus grand nombre n'existe pas.

— Il y a enfin d'autres antinomies qui n'ont d'antinomie que le nom. Si, de deux personnes A et B, nous avons, vous et moi, à en choisir une ; si vous avez tout d'abord à vous prononcer, et que je fixe mon choix en disant : « Celle qui restera » : que vous choisissiez A, ou que vous choisissiez B, mon choix sera différent du vôtre. Y a-t-il là quelque chose pour vous surprendre ? Seulement si vous aviez cru — et en cela vous eussiez eu tort — que mon choix était de toute nécessité fixé d'avance.

Il en est de même de l'antinomie de Crétois dont l'affirmation : « Je mens » n'est, par elle-même, ni vraie, ni fausse. Elle prend simplement la valeur de vérité que nous n'avons pas choisie.

§119 CONSTATATION

il suffit de rester fidèle à la doctrine des significations en devenir ; il suffit de prolonger dans sa foulée le processus de l'abstraction axiomatique, pour que la synthèse unificatrice apparaisse possible et que les antinomies soient écartées.

Chapitre XVI : EXPLIQUER ET DÉFINIR

§122 SCHEMA EXPLICATIF

L'essentiel de l'acte compréhensif réside maintenant dans une certaine identification qui doit être établie entre certaines parties, certains détails et certaines propriétés du modèle, et les réalités correspondantes.

[...] Tout le mécanisme explicatif restera pour nous lettre morte, si nous ne sentons pas vigoureusement le lien qu'établit la concordance schématique entre le modèle et la réalité visée.

[...]

Ce modèle est mental et abstrait ; mais son rôle est au fond semblable à celui d'un de ces schémas si fréquemment employés par les techniciens. Comme ces derniers schémas, il se prête à cette identification du modèle avec la chose représentée, de l'image avec la réalité à comprendre, dans laquelle nous voyons l'essentiel de l'explication.

§125 L'EXPLICATION PEUT-ELLE S'AUTO-ALIMENTER ?

— En réalité, il n'y a ni contradiction, ni cercle vicieux — mais bien une idée préconçue et inadéquate de ce que doit être une explication. Pour que tout se dénoue avec simplicité, il suffit de ne pas s'écarter de la ligne générale tracée par Idoine. Revenons, par exemple, au cas de la logique et de la physique de l'objet quelconque. Dans cette dernière expression, le mot « physique » n'intervient certainement pas avec tout le sens dont il peut être chargé. IL n'y prend au contraire qu'une signification restreinte, la signification « de tous les jours » qui, bien qu'imparfaite ou même rudimentaire, ne manque pas d'être efficace dans un certain rayon : Cette signification dépourvue d'ambition est parfaitement suffisante pour les besoins de notre explication. Celle-ci n'est que fort peu dépendante du développement dont le sens du mot physique est encore susceptible ; il nous suffit d'une signification en *suspens*.

D'autre part une signification quelconque n'est pas seulement en suspens, elle est encore en devenir. Celle du même « logique » s'est maintenant élargie et enrichie du fait même de l'explication. Pourquoi devrait-il être interdit de revenir avec ce sens évolué sur la signification du mot « physique » ? Il est vrai que, par le truchement de l'idée de logique, l'idée de « physique », telle que nous l'évoquons il n'y a qu'un instant, vient implicitement soutenir, elle aussi, l'effort qui va porter l'idée de physique au delà de ses limites primitives. Mais qu'y a-t-il là de répréhensible ? N'est-il pas naturel que le sens élargi se fonde sur le sens restreint ? Objections et réserves ne justifieraient que si l'explication comportait une réduction véritable et complète de l'expliqué aux éléments explicatifs ; que si elle avait découvert le secret d'une substitution complètement et identiquement équivalente de certains éléments plus simples à une totalité trop complexe pour être saisie du premier coup. Mais les exemples qui précèdent démontrent amplement qu'il n'en est rien. Croire à la possibilité d'une réduction de ce

genre, c'est ne tenir compte — et avec quelle naïveté ! — que du premier des trois moments essentiels de l'explication que nous avons distingués.

§126 MOYENS LÉGITIMES DE L'EXPLICATION

Il n'y a pas de modèle *a priori* et *ne varietur* de l'explication. Cependant malgré la variété et l'hétérogénéité de ses moyens, la façon dont elle s'en sert n'est pas très diverse. Ou bien elle construit un modèle concret plus ou moins exact et détaillé de la chose à expliquer, ou bien elle en fait un schéma plus moins adéquat. Dans les deux cas, qu'elle prenne la voie de la réalisation ou celle de l'abstraction, son action présente deux phases assez distinctes :

a) Elles substitue à l'objet de l'explication un autre objet, dont les détails qu'elle fera intervenir et la structure totale qu'elle invoquera soient suffisamment en notre possession. [...]

b) Elle fait appel ensuite, pour porter la compréhension et la connaissance de l'un sur l'autre, à une certaine identité de structure, qui ne peut jamais être totale ; à une certaine concordance qui s'étend à la fois au parties et à la façons dont elles entrent dans le tout, mais qui n'est peut-être que sommaire et ne peut embrasser toutes les façons d'être des deux objets. [...]

Rien n'est en principe inapte à l'édification des constructions explicatrices. [...]

[...]

Dans ces conditions, il va de soi que les moyens dont l'explication dispose sont en constant état d'extension : tout enrichissement de notre être, et spécialement de notre connaissance du monde (pourvu que nous en ayons suffisamment conscient) peut immédiatement être requis pour une nouvelle tentative explicatrice.

§127 CAUSALITÉ

le principe de causalité est en tous points comparable à un axiome de géométrie : à l'aide de notions schématiques telles que : cause, effet, état, permanence, changement, etc., il décrit un fait de nature, pratiquement assuré entre certaines limites. [...] le principe de causalité ne cesse pas de formuler une véritable loi naturelle, même s'il n'est valable que statistiquement, et, lui aussi, du point de vue macroscopique.

[...] En résumé, le principe de causalité formule une loi naturelle dont la validité entre certaines limites ne peut pas être mise en doute ; il formule un fait pratiquement assuré.

[...] de son premier mouvement, notre esprit porte les notions de cause et d'effet dans tout ce qu'il veut rendre intelligible.

Nous expliquons par les causes et les effets comme nous voyons les objets doués de formes et de couleurs. La causalité, en tant que catégorie de l'entendement, est du même ordre de subjectivité que telle ou telle qualité.

[...]

Notre structure mentale est bien accordée à la structure des phénomènes naturels ; mais la concordance n'est que sommaire et inachevée : un compromis, comme nous le disions déjà à propos des axiomes, entre la libre fantaisie et la détermination absolue. En un mot, la concordance n'est que schématique.

§128 PONT CONNAISSANCE/SCIENCES : ANALOGIE/CAUSALITÉ

Notre entendement est engagé dans la discipline des analogies au moins autant que dans le schéma causal : l'analogie peut prendre place au rang des catégories préalables de l'entendement.

[...]

La condition pour que notre intervention dans le monde naturel soit efficace, c'est que les règles intrinsèques de l'entendement aient, comme signification extérieure, celle de lois naturelles.

(On remarquera avec quelle vigueur interviennent maintenant, dans la phrase qui précède, les notions dont l'analyse de la méthode axiomatique a permis d'asseoir la signification.)

[...] appliquée à l'analogie, [cette constatation fondamentale] équivaut à l'injonction que voici : « Vous devez découvrir comme contre-partie à la catégorie de l'analogie, une loi naturelle aussi universelle et fondamentale que le principe de causalité. Allez à sa recherche ! »

Nous l'appellerons, *le principe d'analogie*, ou *le principe de la concordance schématique*.

[...]

Il se formule non seulement en constatant : Il n'y a point d'explication sans analogie, — mais encore en posant comme *pratiquement assuré que toute analogie authentique établit entre les deux termes qui y figurent, un lien de fait, aussi valablement réel et physiquement efficace que la relation de cause à effet.*

Le mot « authentique » n'affaiblit pas cette constatation. Car il y a des analogies qui tournent court et des analogies qui portent loin, de même qu'il y a des causes apparents et des causes « véritables », sans qu'il y ait de règles *a priori* qui permettent de les distinguer les unes de autres ; c'est-à-dire de mesurer une fois pour toutes la force d'un lien causal ou d'un lien analogique.

§131 RÉOLUTION DU PARADOXE DU LANGAGE

une concordance schématique n'est jamais établie par avance jusque dans tous les détails. Ce n'est d'ailleurs pas la seule façon possible d'imaginer un processus par lequel les significations soient altérées.

Les difficultés se dénouent, on le voit, avec la plus grande simplicité, si l'on accepte, pour imaginer la relation des mots à leurs significations, les suggestions de la méthode axiomatique.

Chapitre XVII : DÉDUIRE ET DÉMONTRER

§132 LOGIQUE DESCRIPTIVE OU NORMATIVE ?

Il faut, disait Idoine, **à la fois affirmer et nier l'autonomie de l'abstrait : la nier dans sa genèse, l'affirmer dans son devenir.** [...]

[...] Nous avons parlé à diverses reprises [de la méthode déductive] comme de la méthode qui permet, à partir des prémisses, de dérouler la chaîne des conséquences. Mais **la logique ne nous est pas encore apparue revêtue de ce rôle normatif. Ce qui nous a frappé jusqu'ici, c'est plutôt son rôle descriptif.** [...] nous n'avons pas encore montré assez clairement comment on passe *de la règle observée dans la nature, à la règle à observer dans la conduite de nos pensées.*

§133 ÉVIDENCE

Déduire, c'est ici [pour savoir quel jour sera demain] **imaginer un modèle mental du calendrier avec le moyen de s'en servir — et c'est s'en servir avec le sentiment de contraindre le réel.** [...]

[...] **la déduction n'a pas besoin, pour s'exercer, d'une méthode déductive explicitement formulée. Elle manie avec succès les nécessités pratiques, sans attendre l'énoncé de principes abstraits pour sa justification.**

Il en est de même de la démonstration qui, avant d'être érigée sur le piédestal de la stricte rigueur, doit gravir tous les échelons de l'épreuve et de la preuve pratique.

Mais les démonstrations « authentiquement mathématiques » ?

Croire qu'elles étaient systématiquement les évidences intuitives est une opinion tout à fait simpliste et qui repose sur une méconnaissance totale des véritables circonstances.

Il faut remarquer tout d'abord que **l'idéal de rigueur qu'on imagine assez couramment réalisé par les spéculations des mathématiciens n'est pas plus immuable que les autres notions fondamentales, dont quelques-unes (celle d'axiome, p. ex. ou même celle de vérité) nous ont présenté un visage si changeant.** Tout au contraire, les idées sur la rigueur ont évolué comme le reste, et l'on peut en donner quelques exemples assez frappants.

[...]

Il faut en prendre son parti : **le sentiment de l'évidence varie avec les époques.** [...]

[...] Si les nombres a et b ne sont pas très grands, notre démonstration prend l'aspect d'une vérification sur un modèle concret, sur la base de certaines lois de la physique des objets de nature quelconque. Ou du moins, elle se réduit à *l'évolution* d'une vérification de ce genre.

Si les deux nombres sont très grands, le caractère de la démonstration est passablement différent. **Ayant observé que nous n'éprouvons aucune difficulté à recommencer notre vérification avec des nombres de plus en plus grands, nous considérons comme assurée la possibilité de la répéter avec des nombres quelconques, fussent-ils plus grands que tous ceux dont nous nous sommes jamais servis. Nous passons ainsi de la représentation mentale d'un acte pratiquement assuré à l'intention d'un acte pratiquement irréalisable.**

Il n'y a naturellement, entre l'immédiatement réalisable et l'irréalisable, aucune ligne de démarcation : il n'y a entre eux qu'une zone intermédiaire assez indéterminée. [...]

[...] Combien le mathématicien répugne peu à l'emploi des significations extérieures, la preuve en est encore fournie par le fameux *principe des tiroirs* dont on connaît les très efficaces interventions [...]

Eh bien ! **Il faut remarquer que le mathématicien puise le plus clair de ses certitudes dans l'indéniable vérité pratique de principes de ce genre.** A chaque pas en avant, tout le long d'une démonstration, il prend appui sur des évidences de cet ordre de primitivité. Les équivalences dont il se sert, les dépendances qu'il établit, il en prend l'inspiration dans un sentiment profond du réel et de l'efficacité de ses propres démarches.

En un mot : *Le mathématicien se contente souvent d'évidences intuitives.*

§134 FONDEMENT DE L'ÉVIDENCE MATHÉMATIQUE

pour nous, le rôle essentiel de l'intuition est de former des jugements sommairement adéquats à une réalité, qui ne vient pas d'ailleurs à notre connaissance en dehors de ces jugements imparfaits.

[...] De notre point de vue, le recours à cette forme d'intuition représente donc une application des lois de la physique de l'objet ; et mérite notre confiance dans la mesure même où celles-ci sont pratiquement infaillibles.

On le voit, le mathématicien se fait en général une idée assez vague des ressources que l'intuition met à sa disposition. Il a quelque tendance à la considérer comme une faculté presque magique d'entrer en contact avec une vérité totale.

A la réflexion, ce qui frappe le plus dans la méthode mathématique, ce n'est pas tant la conformité à une doctrine expressément formulée, que la permanence d'une technique de la démonstration et de déduction, dont les règles sont acceptées bien plus à la suite d'une pratique exigeante que d'une analyse raisonnée. [...] Le mathématicien ne sent pas la nécessité d'une théorie de la démonstration : il démontre, comme on marche sans voir fait la théorie du pas juste et du faux pas.

[...]

En somme, malgré l'idée presque mystique qu'il se fait de l'intuition, le mathématicien ne fait qu'imiter et prolonger les enchaînements de faits et de phénomènes dont les réalités extérieures lui proposent les modèles. [...] Comme nécessité intrinsèque du raisonnement, le recours à l'évidence ne fait que traduire à notre usage certaines permanences et certaines invariances du l'ordre du « naturel ». *Le fondement de toute évidence mathématique est une analogie.*

§40 DÉMONSTRATION PRIMITIVE IDÉALE ?

La démonstration parfaite ne devrait-elle pas comporter en premier lieu une énumération claire et sans lacune de toutes les hypothèses ? Et comporter ensuite une seconde énumération, celle de tous les raisonnements qui l'ont fait progresser, avec leur justification. Ne devrait-elle pas être enfin présentée comme un tout qui réalise la déduction de « ce qu'il fallait démontrer » ?

[...] La nécessité de la conclusion n'est que le reflet d'une nécessité pratique, avec toutes les faiblesses que ce dernier mot comporte, mais aussi avec toute la force des analogies authentiques.

En résumé, l'idée d'une démonstration totalement intuitive paraît conciliable à première vue, avec l'idéal de la démonstration que nous avons imaginé.

Elle est cependant presque aussitôt altérée par deux ordres de faits d'une importance essentielle : premièrement par l'emploi des symboles et secondement par l'évolution des concepts.

§136 DÉMONSTRATION DANS L'AXIOMATISATION

La force même de la position mathématique semble moins consister dans l'observation de principes absolus que dans la fidélité à cette règle de conduite : **Ne fais confiance qu'à des évidences bien manifestes et n'invoque que des nécessités dont tu as la sûre intuition !**

Mais il est clair que, si forte que soit cette position dans la pratique et dans chaque cas particulier, elle est loin d'être éternellement assurée. Il y a au contraire des indices non équivoques de son instabilité et du constant glissement qui l'entraîne.

Il y a les indices historiques : le sentiment de l'évidence s'altère. [...]

[...] Saisir une évidence immédiate, c'est porter un jugement sur les réalités telles qu'elles nous apparaissent. Les vérités d'intuition ne sont donc pas des vérités éternelles et immuables : ce sont elles aussi des vérités sommaires, valables tant que les circonstances auxquelles elles conviennent restent inaltérées... En un mot, ce sont des jugements pratiquement vrais, mais, en principe, toujours en suspens : toujours menacés du démenti que peut apporter une meilleure connaissance. Le vrai d'intuition du mathématicien, si on le débarrasse du préjugé précritique dont nous avons déjà parlé, c'est simplement le vrai intuitif [note de bas de page : Intuitif est pris au sens intrinsèque de notre étude] avant que le processus de la schématisation axiomatique en ait fait le « vrai abstrait ».

[...] Les notions d'évidence intuitive, nécessité immédiate, et de démonstration par les seules évidences ne peuvent nous apparaître que comme le point de départ d'une évolution qui doit porter l'idée de démonstration à travers les seuils d'axiomatisation dans les schémas axiomatiques.

Cette évolution se déclenche presque d'elle-même, si l'on accepte de poser la question que voici : Comment se fait-il que le sentiment de l'évidence puisse se retirer de certains jugements auxquels ils confèrent autrefois leur valeur ? Notre réponse est fort simple : Le sentiment de l'évidence est au fond une foi dans l'adéquation totale de l'idée à son objet. Il suffit de la constatation d'une seule inadéquation (toujours possible, puisque l'adéquation n'est que sommaire) pour que le sentiment de l'évidence doive abandonner le domaine dont la vérité s'est perdue.

[...] l'intuitif n'est pas donné en lui-même, de façon à jamais définitive. Et nous savons que toute tentative de le préciser et de le circonscrire nous engage précisément dans la voie de la schématisation.

[...] Dans tout recours à l'évidence, il y a aussi quelque chose comme un raisonnement implicite.

[...] Ou bien il faut poser [un] axiome [...] [qui] fournit le modèle même d'une conséquence légitime. Ou bien il y aura déduction explicite dans le schéma axiomatique ; déduction qui peut être considérée comme implicitement contenue dans le recours à l'évidence qui permettait de l'éviter. On voit ainsi qu'ici encore il n'y a pas de ligne de démarcation séparant une fois pour toutes les nécessités intuitives et les nécessités explicitement justifiées.

§137 DÉDUIRE PAR LE VRAI ET LE FAUX

Les caractères intuitifs qui entrent dans les évidences extérieures se retrouvent en partie dans la connaissance que nous avons à prendre du schéma.

Nous disons : « les évidences extérieures se retrouvent *en partie* dans le schéma axiomatique », mais il ne faut pas se méprendre sur la portée de la restriction. Si l'on revient à l'exemple de la carte et de la forêt, on s'aperçoit bientôt que les moyens dont la carte se sert ou *pourrait se servir* ne sont pas limités d'avance. Il est vrai qu'elle n'a accepté que certaines suggestions du réel, et que pour les fixer elle n'a fait usage elle-même que de certains aspects très sommaires de ce même réel. Mais en principe rien ne lui est défendu. Pourvu qu'elle sache utilement s'en servir, tous les compartiments du réel lui sont ouverts.

Au fond, la situation est toute à fait analogue dans le cas du schéma axiomatique. Pour une démonstration déterminée, le domaine qu'occuperont encore les évidences immédiates pourra être assez étroitement circonscrit. Mais *pour la démonstration en général, nous n'avons aucun moyen d'en indiquer a priori les limites, une fois pour toutes*. En principe, encore une fois, *pas un seul territoire de l'évidence ne lui est interdit et aucune barrière n'y délimite le terrain auquel elle a droit*.

En un mot : *l'intuition originelle n'intervient plus dans la démonstration dans toute son amplitude primitive, mais elle a cependant conservé tout son « potentiel » [...]*.

[...] C'est une simplification du même ordre qui nous échoit, quant à la démonstration, rien que de traverser le premier seuil d'axiomatisation. Au lieu de raisonner sur le contenu plein des axiomes et des énoncés, il nous est devenu possible de n'en prendre en considération qu'un caractère simplificateur et schématique ; sa valeur de vérité. *Qu'on nous permette une image ! Avant la schématisation, la démonstration cherche ses moyens dans un monde aux mille nuances ; après la schématisation, il n'y a plus que le blanc du vrai, et le noir du faux.*

Ceci une fois bien compris, nous pouvons songer à caractériser la méthode déductive. *Ce n'est pas un ensemble de règles permettant d'introduire la vérité absolue dans nos considérations sur le monde de nos actions. Ce n'est pas même une méthode qui permette d'éviter le recours aux évidences immédiates*. Ce qui la distingue et ce qui en fait en même temps l'incomparable mérite, c'est *l'effort d'abstraction* qui la met ensuite en mesure de *n'envisager les objets de la pensée que sous l'angle simplificateur des lois abstraites de l'existence, et les pensées elles-mêmes sous l'angle schématique du vrai et du faux* — et cela, comme l'automate, avec une sécurité et une efficacité pratiquement accrues.

§138 DÉMONSTRATION FORMALISÉE

Si, au lieu de tout ramener aux relations de pure logique, on cherchait plutôt à conduire le processus de l'abstraction vers les structures, [...] [o]n verrait [...] se préciser de façon en quelque sorte complémentaire l'autre côté de l'activité mathématique : non plus celui qui se plie aux nécessités imitées du réel, mais celui qui déploie les libertés que la nature nous concède. Nous voulons désigner par là *les règles où sont formulées les postulats relatifs à la libre et indéfinie répétition d'un même acte simple et au libre choix entre certaines éventualités également possibles*.

[...]

La démonstration est originellement, dans son stade intuitif, un recours aux évidences immédiates. Celles-ci ne sont d'ailleurs pas les moyens dont se servirait pour se réaliser l'intuition de certaines vérités en soi, ou de certaines réalités parfaitement déterminées. Elles ne sont que les vues sommaires et provisoirement irrécusables dont nous sommes capables sur une réalité dont la connaissance est en suspens.

L'axiomatisation altère profondément le caractère primitif de la démonstration. Elle remplace les évidences extérieures par les évidences propres au schéma axiomatique, qui s'expriment par les règles de la logique et par les axiomes ; mais ne peut empêcher l'intrusion de nouvelles évidences intuitives (sous une forme atténuée, il est vrai).

Une nouvelle axiomatisation accentue encore cette évolution. *Les idées d'implication et de démonstration prennent un caractère plus formel. Le vrai et le faux tombent du rang de signification extérieures et n'interviennent plus que par certains côtés formels ou structurels*.

Mais, et c'est surtout sur ce point que nous aimerions insister, *le processus d'abstraction s'accompagne d'un resserrement progressif sur le domaine de l'intuition la plus immédiate, d'une mise en analogie toujours plus étroite avec les notions les plus primitives de l'identité, de la diversité, de l'ordre, etc*. Encore une fois, non pas que celles-ci nous fassent toucher la vérité ; mais nous revenons au répertoire de nos idées les plus simples comme on revient à des moyens éprouvés dont on connaît l'emploi de longue date. *Les jugements à la fois imparfaits et efficaces, inachevés et lourds de sens par lesquelles notre intuition nous introduit dans la connaissance du monde restent les modèles les plus sûrs que la pensée puisse imiter dans son développement*.

§139 INTUITIONNISME

L'intuitionnisme renonce [...], dans sa doctrine originelle, à lier *a priori* la notion de démonstration à une règle de logique quelconque. *La démonstration est indéfinissable ; l'essentiel n'en est pas constitué par*

une série de normes données par avance ; au contraire, chaque raisonnement doit être examiné dans son individualité ; la certitude qu'il apporte sort essentiellement de son évidence immédiate et irrécusable.

[...] Il suffit de prendre, dans les deux cas [mathématiques orthodoxes et intuitionnistes], les notions fondamentales comme des vues sommaires sur le réel et sur les actions que nous pouvons y accomplir. Des vues différentes, il est vrai ! Mais qui ne s'excluent pas, parce qu'elles sont sommaires toutes les deux. De la même façon que deux portraits d'une même personne, exécutés par deux peintures différents, ne détruisent pas réciproquement leur fidélité à leur modèle commun. Avant tout, il faut renoncer à l'idéal précritique de l'intuition, pour ne lui laisser qu'un sens en suspens (comparable en quelque sorte à la valeur de vérité en suspens dont nous parlions il y a un instant).

Il faut encore que l'intuitionnisme accepte de voir dans son idée de la démonstration un idée en devenir, au même titre que l'idée de la démonstration selon les normes ordinaires.

Mais à ce prix, rien ne s'oppose à la coexistence des deux doctrines. Rien ne s'oppose à ce que soit reconnue l'authenticité aussi bien que l'originalité des vues brouweriennes.

Chapitre XVII : RÉCAPITULATION ET CONCLUSION

§143 ADEQUATION SOMMAIRE

IDOINE. [...] « Que les vues immédiates qui nous sont ouvertes sur le monde et sur notre propre esprit ne sont que des aperçus sommaires » ; en d'autres termes encore, que la connaissance intuitive représente déjà une élaboration simplificatrice conforme aux nécessités de l'action.

[...]

Dans cet ordre d'idée, le point extrême est représenté par les notions fondamentales de l'être, du vrai et du possible. A l'esprit qui accepte de les voir abandonner leur auréole d'absolu, elles révèlent également leur caractère schématique ; l'être ayant été primitivement conçu à partir des choses ; le vrai visant avant tout nos jugements ; et le possible sortant par abstraction de certaines libertés qui nous sont naturelles.

[...] Il n'est plus légitime de croire que les évidences intuitives apportent à un esprit suffisamment éclairé une connaissance entièrement adéquate de certes réalités. Ce fut, un temps, une vue schématique efficace. Les progrès du savoir ont disjoint ce cadre trop étroit. En lui restant fidèle, le mathématicien pur que vous êtes, Sceptique, et le métaphysicien que vous êtes, Parfait, se font les défenseurs attardés d'une systématique périmée.

§144 CONCEPTS EN DEVENIR

IDOINE. [...] En même temps que les concepts spécifiquement mathématiques, tels que la droite ou le nombre, ce sont aussi les idées du possible, du vrai, de l'être, du nécessaire qui s'altèrent à travers les âges.

[...]

D'ailleurs, comme ces idées sont étroitement conjointes, il n'en est pas une seule dont le sens reste invariablement fixé : leur commune histoire, pour qui veut la lire, n'est pas autre chose que l'histoire de l'effort renouvelé — et toujours déçu — du mathématicien pour asseoir définitivement les fondements de sa science.

[...] nos idées, même les plus profondément ancrées, sont en suspens entre un passé qui nous échappe peut-être en partie et un avenir encore imprévisible : elles sont essentiellement en devenir.

§145 EXISTENCE & DÉMONSTRATION

IDOINE. [...] en supposant pouvoir reconnaître le même symbole dans deux signes qu'il vient de tracer, le mathématicien fait implicitement fond sur la connaissance des types ; [...] en supposant pouvoir distinguer que deux figures assez compliquées représentent deux formules de structures identique, il suppose accompli tout un travail de simplification et de typification relatif non seulement aux objets, mais à toute une catégorie d'actes et d'intentions. [...] enfin, en invoquant les nécessités propres à la réalisation pour justifier les nécessités propres au réalisé, il s'appuie intuitivement sur le principe d'analogie.

[...]

Dans sa simplicité, cet exemple [distinguer deux formules dont l'une contient 10^{20} fois le signe 1 et l'autre $10^{20} + 1$ le signe 1] est révélateur ! Il nous avertit de ne point considérer le domaine du concret comme donné et limité par avance, car il est au contraire en devenir ! Et l'intervention des concepts de la logique et des mathématiques a précisément pour effet d'en reculer les bornes. Logique et mathématiques ne sont ici que moyens adéquats, — et indispensables, — pour saisir le concret. Sans en excepter l'idée du nécessaire et de la démonstration elle-même.

Et maintenant la situation me paraît claire. Imaginons avec les finitistes un domaine de réalité restreint où la démonstration n'est que simple constatation de certaines évidences. Sous la poussée des abstraits logico-mathématiques et de la pratique de la démonstration, le cercle de ces évidences originelles va s'élargissant vers un horizon mental toujours fuyant. L'idée elle-même de démonstration évolue vers l'abstrait, et il arrive un

instant où le besoin se fait sentir de lui faire reprendre contact avec le concret. Par l'intermédiaire du symbole, nous en édifions un modèle avec les éléments du domaine primitif. Ce rajeunissement opéré, la démonstration renaît sous sa forme originelle : elle est revenue aux démarches pratiquement assurées dans la sphère du concret immédiat. Mais elle y renaît intégralement, avec la même puissance d'extension, et à mesure que la démonstration première poursuit l'idée de la démonstration générale, elle va elle-même s'engager dans la même voie et dans les mêmes destins mathématiques.

En un mot, **la démonstration générale ne comporte pas de figuration qui puisse être enfermée dans un domaine concret non susceptible d'extension.**

Veillez observer que, de mon point de vue, il n'y a là qu'un processus fort normal. Le rajeunissement par les symboles n'est que le signe d'un passage par un seuil d'abstraction, après lequel le symbole et le symbolisé ne sont plus que deux réalisations différentes d'un même abstrait.

§146 VERS UN MEILLEUR ACCORD ENTRE ACTE & INTENTION

PARFAIT. — Ayant répudié l'essence prédéterminée dans la chose et l'existence prédestinée dans le concept, comment espérer jeter entre eux le pont de la connaissance ?

IDOINE. — Comment vous faire saisir que **les termes mêmes dans lesquels vous formulez ce reproche sont ceux qui conviennent — intrinsèquement ! — à une certaine vision schématique du monde de la pensée ; qu'ils ne font qu'évoquer celui-ci par un édifice verbal possédant à la fois la force suggestive et toutes les insuffisances d'un modèle symbolique ?**

Comment vous faire comprendre que **ce schéma ne s'impose pas avec l'écrasante nécessité d'un absolu !** Qu'il est possible d'en concevoir un autre, de façon que tous les termes du langage viennent y prendre appui en abandonnant une partie de leur sens ? [...]

[...] **Toute notre connaissance étant en devenir, non seulement en étendue mais dans sa structure profonde, pourquoi la conception que nous nous en faisons devrait-elle rester *ne varietur* ?** Les termes du problème variant au cours des siècles, pourquoi la réponse ne serait-elle pas en devenir, chaque époque la formulant en cédant à ses propres nécessités, en s'éclairant de son propre savoir ?

[...] Êtes-vous si certain que l'on puisse être fidèle, à la fois, aux vues platoniciennes sur la Vérité, par exemple, et au désir profond du philosophe qu'elles ont satisfait. Que diriez-vous si j'opposais à votre piété qui veut être totale **une volonté de retrouver un accord plus profond dans l'acte et l'intention ?**

[...] Comme moi vous pensez que tout ensemble organisé de connaissances, que tout savoir systématisé, pré suppose, en ce point central, une position préalablement occupée, des vies préconçues, une doctrine préliminaire. [...]

PARFAIT. — Nous sommes cependant profondément divisés sur la nature d'une telle doctrine. Car je la vois formulant en termes définitifs ce qui est avec nécessité, ce qui ne peut pas ne pas être tel qu'il est. Évoquant la vérité dans l'être et l'être dans la vérité : un canon vrai où s'expriment en lois éternelles les rapports de l'abstrait et du concret.

IDOINE. — Tandis que **je cherche en moi sans les trouver les critères où viendraient se mesurer des certitudes aussi démesurées.** Tandis que **nulle part en moi je ne découvre de point d'appui pour une réalité aussi inflexible.** Vous semblez trouver naturel qu'un savoir aussi incroyable vous parvienne par la misérable voie des signes verbaux ! Tandis que **je ne sais pas faire abstraction des moyens dont il me faudrait disposer pour le concevoir et pour l'accueillir.**

Je ne puis me dispenser de demander : Quelles sont les conditions d'existence d'un tel canon ? Sur quel ordre de faits viendra-t-il se fonder ? Où prendra-t-il sa vérité. En un mot : Comme le justifier ?

Et vous connaissez ma réponse : **Le cadre où il vient prendre, place, c'est celui de nos ordinaires certitudes. Sa vérité trouve ses critères dans le pratiquement assuré. Sa justification, c'est d'avoir pu être aperçu, d'avoir pu être conçu et de pouvoir servir !**

Or c'est précisément en cet endroit que mon indépendance reprend les traits de la fidélité. Pour concevoir adéquatement les rapports du concret à l'abstrait, il faut les apercevoir réalisés en un endroit particulièrement favorable, en une articulation particulièrement importante du jeu des pensées, afin que cet exemple propice puisse servir de modèle et de point de départ. Les platoniciens que vous admirez tant, Parfait, n'ont point fait autre chose. Ils ont trouvé un modèle éclatant dans les rapports de la géométrie à la réalité macroscopique qui leur était accessible. Conçus à partir de cet exemple saisissant, le concret et l'abstrait se sont ensuite répandus sur tout le champ de la pensée.

[...]

En fait, **je me demande qui de nous deux est le plus vraiment fidèle à l'entreprise des premiers philosophes-mathématiciens : de vous qui, pour ne rien compromettre d'un schéma dont la connaissance s'échappe, vous retirez du réel ; ou de moi qui, pour conserver le contact avec le réel et retrouver l'accord qui se perd, modifie le schéma pour en sauver l'idée ?**

§147 ABSTRAITS : TRANSFUGES FIDÈLES DU VÉCU

IDOINE. [...] L'exemple de la droite ne peut vous avoir échappé. Lorsque, jeunes garçons, nous tracions avec soin nos figures géométriques, nous revivions certainement avec plénitude l'idée de l'accord imaginé par les Grecs entre la géométrie et ses réalisations. L'idée de la droite a maintenant perdu pour nous cette immédiateté et cette simplicité de signification. Les conditions de son emploi efficace nous ont été révélées à la fois dans leur plus grande imprécision et dans leur plus profonde réalité. Mais rien de nous oblige à renoncer à un seul des services qu'elle nous rendait : nous ne savons que les mieux apprécier ! En glissant du sens qu'elle prend intrinsèquement dans un système schématique au sens qu'elle acquiert dans un autre système, une notion peut ainsi fort bien rester efficace dans les limites de son emploi primitif.

Pourquoi n'en serait-il pas de même pour les idées de la réalité et de la vérité, du concret et de l'abstrait, du physique et du rationnel ? Pourquoi ne devrait-il pas être possible de les faire entrer comme éléments dans un nouveau schéma totalitaire (et par là même explicatif !) en apportant à celui-ci l'essentiel du rôle qu'ils jouaient : **transfuges par fidélité** ?

[...]

Notre désir toujours renaissant des vérités dernières vous égare, Parfait. **Que sont les mots sans l'expérience qui les anime ?** [...] je ne vois pas que celui qui désire entrer en possession des idées de l'adéquation schématique, de la signification extérieure et de la structure intrinsèque, puisse être dispensé de parcourir la voie ouverte par la pensée mathématique. **Comment pourrait-il imaginer, s'il ne les a jamais sincèrement vécues, la transmutation des concrets en abstraits et la nature de leur équivalence ?** Qu'il entreprenne lui-même — car **c'est une expérience intransmissible** — la pérégrination axiomatique, attentif à se laisser pénétrer de ses enseignements !

§148 IDÉE EN DEVENIR DU RÉEL EXPLORE LE RÉEL

IDOINE. — L'argument que vous tirez de l'étrangeté du monde corpusculaire peut se retourner contre vous. Il est naturel qu'il ne soit pas aisé d'expliquer le microscopique par des modèles schématiques dont tous les éléments sont abstraits du macroscopique.

[...] Dire que le mot de « réalité » ne doit point s'employer comme s'il existait une « chose de ce nom » que nous ne faisons que découvrir telle qu'elle est de toute éternité, dont l'essence vient simplement déposer son empreinte adéquate dans notre connaissance, dire que l'idée du réel et de toutes les choses réelles est en devenir, devenir dans lequel notre faculté de savoir n'est pas purement réceptive, ce n'est pas nier la pression que ce que nous pouvons continuer à appeler le réel, exerce sur tout notre être. Ce n'est pas dire que nous ne soyons pas attentifs aux nécessités venant du monde objectif, mais c'est dire que nous y répondons dans le cadre de nos propres possibilités.

D'avoir aperçu que, dans toutes ses démarches, l'esprit reste en suspens entre l'absolue détermination et la liberté désordonnée de l'arbitraire, n'exige pas de renoncer à l'idée de la loi naturelle. C'est au contraire celle-ci qui, chargée de son nouveau sens, s'introduit jusque dans le Saint des saints de la Raison.

§149 DÉCHÉANCE DE VÉRITÉ ABSOLUE

IDOINE. [...] Nous ne sommes pas les maîtres de conserver à l'idée de Vérité son sens originel : l'évolution qui l'en a détournée, qui, à travers maints avatars, l'a conduite jusqu'à son sens actuel, il ne dépend ni de notre désir ni de notre volonté qu'elle soit ou ne soit pas. Avec toute la force que conserve la notion de l'être, même réduite à sa signification schématique, elle est, elle est historiquement !

Je ne puis pas ne pas constater que, presque sous nos yeux, **l'idée du vrai mathématique lui-même vient de bifurquer.** [...]

[...] **La dégradation du vrai est un fait accompli.** D'ores et déjà, la notion absolue de l'être a été précipitée de son piédestal dans la foule des notions sommaires. La rançon, ce ne peut être que **l'abandon**, par votre conscience individuelle ou par la mienne, **d'une idée dont le devenir historique a démenti l'originelle simplicité.**

§150 IDONÉISME

SCEPTIQUE et PARFAIT. [...] **l'idée directrice de votre tentative est simple : concevoir tout d'abord les rapports de l'abstrait et du concret sur l'exemple privilégié des mathématiques et de leurs applications ; étendre ensuite cette conception à tous les ordres de la pensée.** [...]

IDOINE. [...] **mon idonéisme** [en gras dans le texte] [...]

[...]

La science semble aujourd'hui animée de deux esprits ennemis : l'un d'eux poursuit dans le rationnel — et spécialement dans les mathématiques « pures » — l'idéal de la « Vérité en soi » ; l'autre recherche dans le naturel, et spécialement dans le donné expérimental, l'idéal complémentaire de la « Réalité en soi ». Tenez-vous pour rien d'avoir compris que l'un et l'autre n'incorporent qu'une vue sommaire de notre faculté de connaître, et ne peuvent que perdre leur efficacité et s'évanouir dans l'indéterminé si l'on pousse jusqu'à l'absolu l'idée de leur détermination. Et d'avoir distingué les termes d'un nouvel accord prenant pour base leur commune efficacité ?

§151 IDONÉISME EN DEVENIR

LE NOUVEL IDOINE — Vous n'arrivez jamais à vous entendre. Mais moi, je vous reconnais tous trois pour trois moments de ma pensée. **Nul ne peut être Idoine qui ne fut et ne sait être encore Sceptique en face des faits, et Parfait en face des idées.**