Les fondements des mathématiques

–

De la Géométrie d'Euclide
à la Relativité générale et à l'intuitionisme

Ferdinand GONSETH
1926

préface de Jacques HADAMARD
éd° Albert Blanchard (1974)
librairie scientifique et technique

XIII-XIV Les idées directrices

Il n'est pas possible d'expliciter les concepts spécifiquement mathématiques, tels que le nombre, le continue, etc… Ce sont des créations parfaites et irréductibles de notre esprit, de cette partie de notre esprit, de cette faculté créatrice qu'on a déjà nommée notre démon mathématique. Le rôle que ces concepts prennent dans les constructions schématiques ou théoriques telles que la géométrie, la mécanique, etc., ne peut être saisi que dans leurs rapports avec l'intuition et l'expérience. C'est, pour citer un exemple d'un intérêt actuel, le cas du continu « temps » qui ne prend sa signification que par la construction théorique dite « cinématique » et par la façon dont la chronométrie pratique interprète ce schéma dans l'expérimental.

La logique enfin est un schéma de même nature : toute entière conception elle aussi de cette même faculté, de ce même démon mathématique ou théorique.

§1 Géométrie : science empirique

Si […] on cherchait à construire la science géométrique dans le sens des énoncés précités [*Il est possible de distinguer une nette séparation entre un corps et l'espace environnant*, *Les faces d'un cristal sont des surfaces planes*], la géométrie deviendrait une science expérimentale. Un théorème exprimerait, avec une précision limitée, telle ou telle propriété de tel ou tel objet matériel. Il ne serait d'ailleurs pas admissible de parler d'une approximation toujours croissante, d'objets et de lois s'adaptant toujours mieux, tendant asymptotiquement vers des corps et une géométrie à la signification absolue. Il suffirait de descendre à l'échelle atomistique, pour que tout soit remis en question.

Malgré l'appareil logique qu'elle emploie, et son renom de science exacte, la géométrie fut longtemps et presque jusqu'à nos jours, la géométrie expérimentale que nous venons d'esquisser. […] On fait appel non à votre raison, à vos facultés logiques, mais à ce que vous savez par expérience du monde sensible.

[…]

A la réflexion, ce caractère expérimental de la géométrie élémentaire dans son ensemble devient tout à fait saisissant ; et l'on s'étonne qu'on ait pu trouver dans celle-ci presque le modèle d'une science abstraite.

La locution : « Rigoureux comme un théorème de géométrie », est aussi fausse que possible. C'est : « Intuitif comme une démonstration de géométrie » qu'il faudrait plutôt dire.

§2 Une logique en géométrie ?

Le monde physique nous fournit des notions que nous avons *nommées*, mais dont nous n'avons encore rien dit de précis […] : pour tirer quoi que ce soit des notions primitives, nous revenons à la géométrie expérimentale à peine déguisée.

[….] *Comment passer de la géométrie expérimentale, science physique, à la géométrie idéale, science abstraite ?*

Mais d'abord n'est-il pas exagéré et paradoxal de parler de science expérimentale à propos des éléments de la géométrie, où l'expérience se réduit, semble-t-il, à tracer des figures plus ou moins inexactes ? Nous y insistons : si l'on se borne pour l'introduction des notions primitives, à des indications intuitives, à une description schématique du monde sensible, dont nos sens nous fournissent une image sommaire, la démonstration géométrique devient en principe la description verbale et simplifiée d'une expérience, que les architectes et les géomètres praticiens ont mille fois exécutée.

Un théorème n'est alors pas une construction logique, mais la juxtaposition de quelques connaissances choisies à propos. A proprement parler, le caractère expérimental ne se manifeste donc qu'en seconde analyse. Il apparaît en premier plan sous forme intuitive : nous nous contentons d'un *renvoi* à une expérience dont la réussite nous paraît d'une immédiate évidence. […]

Comment passer de l'intuitif à l'abstrait, en géométrie ?

[…]

Nous dirons que la géométrie s'est *constituée en science abstraite* quand, partant de notions fondamentales, — dont l'origine est de nature expérimentale ou intuitive — elle s'est érigée par la suite à l'aide de la seule déduction logique, et sans plus faire d'emprunt à l'intuition directe.

§4 L'axiomatique

« […] Pour autant que les théorèmes mathématiques s'appliquent à la réalité, ils ne sont pas sûrement pas valables, et pour autant qu'ils sont sûrs, ils ne s'appliquent pas à la réalité. La parfaite clarté sur ce point me semble avoir été mise à la portée de chacun, grâce au courant que les mathématiciens nomment *l'Axiomatique*. Le progrès réalisé par l'axiomatique consiste en une claire et nette séparation et l'intuitif et du logique : d'après l'axiomatique, seuls les faits logiques et formels forment l'objet de la science mathématique, mais non l'élément intuitif qui peut s'y rattacher. » [cité de *Geometreie und Erfahrung* d'Einstein]

Et plus loin : « Cette conception moderne de l'axiome purge la mathématique de tous les éléments étrangers et dissipe les obscurités mystérieuses qui autrefois voilaient les fondements des mathématiques. Cette façon de présenter les choses rend aussi évident le fait que les mathématiques ne peuvent rien affirmer, ni au sujet de nos représentations intuitives, ni au sujet des réalités matérielles. »

Les mots dépassent ici sûrement la pensée de leur auteur, car ils s'appliquent aussi sans y changer une virgule, à la physique théorique. Et fort probablement Einstein ne dirait point avec une aussi jolie bonhomie et sans tempérament : « que pour autant que la Relativité s'applique au réel, elle n'est point sûrement fondée, et que pour autant qu'elle est sûre, elle ne s'applique pas au réel. »

La mathématique ne peut qu'artificiellement, ne peut qu'en apparence être détachée de ses fondements intuitifs, et de son prolongement dans le réel. […] *Il n'est point de domaine des mathématiques, si petit soit-il, où l'axiomatique puisse se suffire à elle-même.* […] l'axiomatique, conçue d'abord comme méthode épurative et ordonnatrice, peut servir d'instrument de recherche.

§5 ??

L'axiomatique, en son début particulièrement, n'est certainement pas le domaine de l'esprit de finesse, mais — le mot de Pascal est ici doublement juste — bien de l'esprit de géométrie.

Il appartient justement à la méthode que chaque pas soit contrôlable, et effectivement contrôlé. Plus qu'en toute autre matière, l'erreur par omission est ici détestable : le sous-entendu est justement l'ennemi qu'il faut débusquer.

§9 L'axiome des parallèles

Est-il possible *d'imaginer*, que par le point A, il existe plus d'une non-sécante ? [à une droite donnée]

Une fois prononcé le seul mot d'axiomatique, il est malaisé de comprendre que la question même ait pu se poser ; nous n'en saisissons plus le sens. Mieux encore, elle n'a pour nous plus de sens du tout, et nous nous étonnons sérieusement qu'on ait pu écrire ceci, par exemple : « il est contraire au bon sens, et à la sainte raison — à la morale aussi, comme pour la Relativité, — d'admettre l'existence de plus d'une parallèle. »

§12 Irrationnels (Dedekind)

« Si l'on veut traduire arithmétiquement toutes les propriétés de la droite, — et c'est justement ce qu'on désire, — les nombres rationnels ne suffisent pas ; il devient absolument nécessaire de parfaire l'instrument qu'on s'est déjà construit par la création du nombre rationnel, en créant encore d'autres nombres de façon que le corps des nombres ait la même plénitude — disons la même *continuité* — que la ligne droite. » [cité de *La continuité et les nombres irrationnels* de Dedekind]

Ces citations montrent, à n'en pas douter, que le concept primitif n'est pas le nombre irrationnel, mais bien le point arbitraire sur un segment ; que par conséquent la réduction du continu géométrique au continu arithmétique n'est pas un véritable gain, puisque le second n'est là que comme expression du premier.

Ces remarques sembleront peut-être inutiles ; mais il arrive fréquemment qu'on reverse les rôles, et qu'on aperçoive dans l'ensemble des nombres réels une création d'une solidité supérieure à celle de la géométrie. Nous attachons au contraire une certaine importance à constater l'origine géométrique du nombre irrationnel ; […] il nous paraît […] fort probable qu'il faille rechercher les racines du nombre irrationnel non dans le concept du nombre entier, mais peut-être dans le concept de l'*extension*, logiquement irréductible au précédent.

§13 Géométrie analytique

toute contradiction entre les axiomes de la géométrie devra se manifester par une contradiction dans le domaine arithmétique :

La compatibilité des axiomes de la géométrie est une conséquence de l'absence de toute contradiction dans le domaine des nombres réels.

§15 « SENS » D'UN SYSTÈME AXIOMATIQUE

Qu'on nous permette une comparaison ! De même qu'on peut s'accorder à ne pas voir dans une cathédrale l'expression même de l'existence de Dieux, mais l'expression de la foi en cette existence, de même l'axiomatique n'est pas elle-même l'expression d'une vérité absolue ; elle est l'expression d'une croyance à l'efficacité des idées abstraites.

§22 LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE EST *TOPOLOGIQUE* !

dans toutes ses parties, le système d'axiomes qui est la base de la géométrie élémentaire a le caractère topologique. […] [Les] axiomes de l'ordre et du continu de ce premier système hilbertien définissent le « topologique ». Mais toutes les autres ne sont aucunement liés à un modèle indéformable, à un plan euclidien en quelque sorte rigide. Supposons qu'on premier modèle ait été construit, et déformons-le de façon continue mais à part cela parfaitement arbitraire : on voit immédiatement que les axiomes […] d'appartenance […] sont encore valables, pourvu que les droites soient remplacées par « ce qu'elles sont devenues, » et qu'il en est de même des axiomes de congruence et du postulat des parallèles.

Le modèle euclidien peut être encore reconnu comme tel à travers toutes ses déformations. Bien plus […] : nous n'avons aucun moyen théorie ou logique de décider duquel de ces modèles nous parlons. Par « géométrie élémentaire », on entend au fond bien une géométrie qui, sous forme abstraite, il est vrai, traite des objets que nous connaissons bien : du cube, dont nous avons mesuré les arêtes, de l'icosaèdre que nous avons pris plaisir à construire. Eh bien ! *Il n'existe pas de géométrie élémentaire.*

Cela explique le paradoxe suivant, si souvent cité (et qui contribue u prestige de la méthode abstraite !) : *la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses.*

[…] « […] Ce ne sont donc pas des figures matérielles que nous étudions, mais nous nous servons d'elles simplement pour étudier quelque chose qui est plus élevé et plus subtil ». [cité de *???* de Poincaré]

On ne peut que souscrire pleinement à cette opinion, mais ce passage laisse encore subsister la croyance que la figure est un instrument grossier, parce que la main qui l'a dessinée a tremblé, que l'ouverture du compas a varié, que la règle pourrait être encore plus droite, etc. De ce point de vue il n'y a justement pas de figures fausse, si ce n'est celles qui contiennent des erreurs topologiques. Chacun se souvient sans doute de la fameuse « colle » où l'on démontre que tout triangle est isocèle, en faisant concourir à l'intérieur du triangle des lignes qui doivent se rencontrer à l'extérieur de celui-ci. La figure était fausse, le raisonnement juste, mais le résultat était faux lui aussi. On ne peut raisonner juste que sur des figures *justes*. Il est vrai qu'il nous faut abandonner l'idée trop simple que nous nous étions faite de l'exactitude ou de l'inexactitude d'une figure.

§24 COUP D'ŒIL RÉTROSPECTIF

Tant qu[e le géomètre axiomaticien] ne considère la géométrie que du point du vue abstrait, sans d'inquiéter des attaches qu'elle peut avoir avec le réel, tant qu'il prétend ne pas se soucier de la répercussion possible de ses investigations sur sa conception du monde, il est clair que tout se réduit pour lui à une question d'axiomes acceptés ou d'axiomes refusés.

[…]

C. F. Gauss (1777-1855) s'occupe à peu près sa vie durant de cette irritante question [de l'axiome des parallèles]. Lui aussi commence par admettre la possibilité d'une démonstration par l'absurde. Notons ce passage d'un lettre à W. Bolyai, le père de J. Bolyai […] : … « je suis plutôt conduit à doute de la vérité de la géométrie ! » Cette phrase est d'un intérêt psychologique extraordinaire. Qu'est-ce que cette vérité absolue, de laquelle l'illustre mathématicien commence de douter ? C'est sans doute que Gausse accepte encore l'axiome comme une vérité en soi, chose évidente par elle-même, et dont l'existence est liée à la forme du monde.

Vers la fin de sa vie cependant, Gauss possédait la Vérité, toute relative celle-là, comme le montre le passage suivant d'une autre lettre à W. Bolyai : « … les résultats de ton fils se recouvrent presque complètement avec mes propres méditations qui, en partie, remontent à 30-35 ans en arrière… Mon intention était de ne rien faire connaître de mon vivant de mes propres travaux dont à la vérité je n'ai encore confié que peu de chose au papier. La majorité des hommes ne saisissent pas de quoi il s'agit, et j'ai trouvé bien peu de gens qui écoutassent avec un intérêt particulier ce que je leur en communiquais. Pour cela, il faudrait avoir vivement senti ce qui manque, et la plupart n'en ont encore aucune clarté… »

§29 GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

Une chose frappe, à la lecture surtout de la lettre de Gauss à W. Bolyai dont nous avons cité un passage, mais aussi en confrontant les diverses opinions émises par les plus grands entre les géomètres : c'est que, presque jusqu'à nos jours, personne ne sépare la géométrie expérimentale de la géométrie science abstraite : la notion de science abstraite n'est pas encore constituée. Il semble à lire les anciens auteurs, et même quelques-uns parmi les modernes, que le monde ne peut exister que selon les lois de la géométrie d'Euclide. La géométrie doit exprimer la Vérité, c'est-à-dire rendre un compte absolu de la structure de l'espace sensible ; ils semblent croire que la construction logique doit immédiatement s'exprimer par une existence matérielle : l'espace est euclidien ou il n'est pas ; c'est pourquoi il doit être possible de décider logiquement si la géométrie d'Euclide est *vraie* ou *fausse*. Il est intéressant de remarquer, que même pour Bolyai, la question ne se posait guère autrement. Les termes mêmes du titre de son célèbre ouvrage en font foi : « …scientiam spatii *absolute veram* exhibens » ! A travers l'orgueil du créateur, la même opinion apparaît encore dans ce passage d'une lettre à son père : « … je n'en puis dire aujourd'hui que ceci : c'est que, de rien, j'ai créé un nouveau monde. »

Aujourd'hui, il est, pourrait-on dire, de notoriété publique que, euclidiennes ou non-euclidiennes, les géométries sont également vraies et également fausses. Gauss jugeait que ses contemporains n'étaient pas mûrs pour cette vérité : comment se fait-il que nous le soyons, maintenant, tous ? Il n'est pas douteux que c'est justement grâce à la méthode axiomatique que toutes ces questions sont devenues d'un abord si facile. Dans son opuscule, *Geometreie und Erfahrung*, Einstein s'exprime sur ce sujet, en ces termes : « Le progrès réalisé par l'axiomatique consiste justement en ceci qu'elle dégage proprement le logique du tout contenu intuitif : d'après l'axiomatique, seules les relations logiques forment l'objet des mathématiques… » En d'autres termes encore : La notion de science abstraite ne peut prendre corps que par l'axiomatique. Non seulement l'axiomatique sépare l'abstrait de l'expérimental, mais c'est elle seul qui peut nous fournir la définition de l'abstrait. Elle le définit de façon efficace, par construction : toute autre définition se révélerait, à une analyse un peu pénétrante, superficielle et inopérante.

Toute science abstraite est donc, par définition même, une science axiomatiquement fondée.

[…] Ce qui manquait [aux contemporains de Gauss], c'était justement la notion même de la géométrie science de l'esprit, dans son opposition à la géométrie science d'expérience. […]

[…]

Il n'existe pas de cloison étanche entre la physique expérimentale et la physique théorique ; les mathématiques aussi ne peuvent sans artifice être isolées de l'ensemble de nos connaissances. Une première fois nous avons dû le constater : l'axiomatique ne peut prouver que les axiomes dont elle se sert sont compatibles. Elle ne peut donc à elle seule justifier sa propre existence, et elle ne prend sa véritable signification que par rapport à tous nos moyens de connaissance. Ceci ne doit pas signifier, d'autre part, que tout l'intérêt des mathématiques réside dans *les schémas* qu'elle peut nous fournir du monde réel. Dans un processus d'abstractions successives, il peut arriver que la matière logique elle-même puisse devenir sujet de recherches. Mais ceci nous semble certain : *on ne peut sans lui enlever sa signification profond et sa vie intérieure, isoler une science abstraite — fût-ce la Mathématique — de ses origines intuitives.*

§30 L'expérience mêle l'abstraction

il n'y a pas de méthode irréductiblement et purement expérimentale. Il est clair en effet que le succès de notre expérimentation n'est aussi remarquable que du fait de la petitesse *relative* des variations dites accessoires, mais il est clair aussi — et c'est sur ce point que nous insistons spécialement — que l'ensemble de ces corrections se fait *sur le modèle euclidien*. Les erreurs et les corrections sont déterminées dans l'intention — inconsciente généralement — de rendre tout le système de mesures interprétable avec un écart toujours moindre par la géométrie d'Euclide. Il est bien difficile de s'imaginer comment il faudrait opérer, si ce modèle abstrait, *ou tel autre*, ne devait pas orienter l'ensemble des mesures à faire. On peut prendre quelque plaisir à constater que le physicien qui se refuse à examiner les constructions de la géométrie ou de la physique moderne, les espaces non-euclidiens ou les théories de la relativité, n'échappe pas plus qu'un autre à l'emprise des constructions abstraites (ou mathématiques). Celui qui prononce : « La relativité ne m'intéresse pas, parce que c'est de la spéculation et non de la physique », s'aperçoit-il que son mépris ne l'empêche pas d'être justement le prisonnier d'une autre spéculation purement mathématique, de la géométrie d'Euclide ? Et s'il croit véritablement que le modèle euclidien est « l'espace physique idéal », ne reconnaît-il pas en même temps la transcendante supériorité de la spéculation ? Si bien que la seule manière de refuser à la spéculation mathématique une signification absolue, consiste à en reconnaître de prime abord la relative légitimité. Nul n'échappe au sort commun ; même celui qui ne veut connaître que les (soi-disant) réalités : tous travaillent sur un canevas abstrait.

[....]

L'espace physique n'est donc en lui-même ni euclidien, ni non-euclidien ; il n'existe qu'en vertu et en fonction des phénomènes physique observables.

§31 L'abstrait mêle l'intuitif

dans toute constructions abstraite, il y a un résidu intuitif qu'il est impossible d'éliminer. […]

« Ce qui fait le contenu des axiomes n'appartient pas aux mathématiques. Pour leur donner un sens, il faut leur adjoindre un *clef* interprétative… » [cité par Einstein]

[…] ce n'est que par un acte d'immédiate compréhension que nous pourrons nous rendre compte de l'absence de toute contradictions entre [les ultimes notions sur lesquelles l'axiomatique est sans emprise] : en d'autres termes, c'est intuitivement qu'il nous faudra saisir leurs rapports mutuels et décider en particulier que ces notions dernières sont indépendantes les unes des autres. Ainsi donc **la certitude mathématique est exactement du même ordre que les autres certitudes immédiates de la vie**.

[…]

Dans toute expérimentation il y a un résidu abstrait, et dans toute abstraction (mathématique) il y a u résidu intuitif. [Ces deux faits] suffisent pour nous faire comprendre que la distinction entre l'abstrait et l'expérimental, si l'on remonte assez haut, s'estompe et disparaît : ce sont deux béquilles de notre effort de compréhension du monde. Elles ont le même fondement, et concourent aux mêmes fins, quelquefois par des voies communes, quelquefois par des voies opposées. […]

La distinction entre l'abstrait et l'expérimental n'est que de tendances, mais non d'essence.

[…] nous voyons une grande analogie, entre la méthode des sciences expérimentales, dont nous avons essayé de montrer les caractères essentiels, et le processus psychologique [selon lequel le groupe expérimental peut s'établir]. La chose est au fond si naturelle, qu'on éprouve quelque gêne à la commenter en détail. Ce n'est point parce que le savant s'est armé de quelques instruments qu'il a pu modifier beaucoup le caractère de ses relations avec le monde extérieur. Il expérimente finalement toujours avec son corps, c'est-à-dire avec ses sens et son esprit.

La méthode expérimentale du physicien est simplement le prolongement, sans hiatus essentiel, du processus par lequel se forme notre connaissance intuitive de l'univers.

[…]

L'intuitif ne peut être juge de l'expérimental, de même que l'œil nu ne peut être juge de ce que le microscope lui montrera.

L'expérimentation n'est jamais en conflit avec l'intuition qu'en la corrigeant.

[…]

Notre intuition n'est pas un ensemble cristallisé de règles immuables. C'est un ensemble imparfait et perfectible de vues sur le monde. Les résultats de l'expérimentation, s'ils nous surprennent, ne peuvent choquer que notre ignorance et notre inexpérience.

§32 INTUITION THÉORIE

Le conflit, s'il existe, n'est […] pas entre notre intuition et une théorie douteuse, mais entre un premier schéma dont nous avons tellement pris l'habitude que nous lui conférons une existence en quelque sorte matérielle, et un autre schéma dont la nouveauté surprend notre esprit. Qu'on veuille encore une fois se représenter que notre intuition et la connaissance dite scientifique ne diffèrent pas essentiellement.

Si nous voulons en prendre conscience, nous nous arrêterons à des schémas intellectuels plus ou moins définis : plus ils sont arrêtés et cohérents et plus ils sont scientifiques. […]

[...] en face d'une théorie véritablement nouvelle, nous sommes tous plus ou moins semblables au défenseur de l'intuition que nous avons imaginé ; ayant pris l'image du monde que nous nous étions faite pour une intangible réalité extérieure, nous avons mille peines à nous en dégager.

Comme n'hésiterions-nous pas devant une nouvelle image du monde quand nous concevons à peine la différence d'essence entre l'image et le réel C'est aussi que cette image est, humainement parlant, une réalité autour de laquelle se coordonnent nos impressions sensorielles ; nos spéculations ne restent pas sans influence sr notre *groupe expérimental ;* c'est par cette répercussion psychologique que s'expliquent d'ailleurs nos réactions intuitives envers toute théorie trop hardiment construite,... jusqu'à au moment où nous aurons prêté au monde extérieur les traits mêmes de la nouvelle fiction.

§34 CONCLUSION

un lien plus ou moins relâché, mais jamais complètement dénoué, unit le théoricien et l'expérimentateur. La recherche scientifique ne s'effectue pas dans deux plans indépendants l'un de l'autre, un plan théorique ou mathématique sans relations avec le monde observable, et un plan expérimental où les réalités sont immédiatement saisies. Tout au contraire, l'observateur ne sait observer qu'en fonction d'une théorie sous-jacente, et les constructions abstraites du mathématicien ne sont efficaces et cohérentes que grâce à leur fondement intuitif.

La connaissance vient à l'homme à la suite d'un inextricable entrelacs d'actes et de réflexions. De même la recherche scientifique oscille constamment entre ses deux pôles, qu'on ne peut concevoir l'un sans l'autre : la spéculation et l'expérimentation. En particulier, il n'y a point de seuil à franchir, pour passer de la géométrie à la physique.

§35 LE TEMPS

Le point et l'instant sont deux notions parfaitement analogues : il est remarquable qu'on semble attacher à la seconde une réalité sensible que depuis longtemps la première a perdue. […]

[…]

Nous savons bien maintenant que l'espace sensible n'est ni euclidien, ni non-eucliden ; que seules les images que nous nous en faisons peuvent avoir ces caractères. De même le temps pourra prendre en notre esprit telle forme que l'exigera l'image que nous construisons du monde. [...]

[…]

A M. METZ. Quelle indignation vous manifestez, lorsque M. Bergson vous demande si le temps des relativistes n'est pas un temps fictif et irréel ! Et pourtant il n'en faut pas douter ! Le temps *t*, aussi bien que les coordonnées spatiales qui figurent dans le es formules de la relativité sont des fictions. Mais il en est de même pour le temps et l'espace de la mécanique et de la physique classiques, et pour le temps des philosophes. Ces fictions sont d'ailleurs aussi, envisagées d'un autre point de vue, de précieuses réalités. Si ce n'est pas elles que nous pouvons véritablement mesurer lorsque nous interrogeons le monde, c'est grâce à elles que nos mesures peuvent s'ordonner et prendre un sens. Dans la pratique, et pour contrôler si la théorie est opérante, on remplacera naturellement x, y, z, t par les résultats de certaines mesures. Mais la façon de les obtenir et toute le système de repères dans le temps et l'espace sont déterminés eux-mêmes par la façon dont les fictions x, y, z, t sont logiquement dépendantes les unes des autres. Pour le même observateur, il y a un temps mesuré selon des normes relativistes, et un autre temps mesuré selon les normes ordinaires. Le temps — et surtout celui qu'on mesure — n'existe pas en lui-même. Il n'est qu'un certain ordre établi entre certaines phénomènes, et peut varier selon les phénomènes privilégiés dont on se sert.

[…]

M. FABRE. Qu'est en effet le temps scientifique, sinon une monstruosité conventionnelle.

L'AUTEUR. Au même titre que toute création abstraite de notre esprit !

§38 Le groupe cinématique « expérimental »

La considération de l'univers quadridimensionnel est plus qu'un artifice de mathématicien : il suffit de se placer par la pensée dans un monde qui ne soit pas à peu près immobile, pour que nos vues intuitives sur l'espace perdent leur cohérence.

§43 Les axiomes de la mécanique newtonnienne

c'est justement dans le domaine où la théorie veut être uniquement l'expression de faits d'expérience, que l'étude approfondie des axiomes est le plus nécessaire. Qu'on veuille bien réfléchir un instant au bit que poursuit la « théorie » dans la recherche scientifique. Il n'est pas facile de l'expliquer en quelques mots, mais il est certain que ce n'est pas de prendre pour des réalités « extérieures » les schémas logiques que notre esprit conçoit et qu'il projette sur le monde. Puisque la « Théorie » opère par schémas, dans lesquels elle cherche à enserrer les apparences, la réflexion sur ces schémas est un acte indispensable, là surtout où ils nous semblent se fondre dans le réel. Notre connaissance de ces constructions logiques conditionne, pour une part appréciable, sinon essentielle, notre connaissance générale de l'univers physique.

§46 Le champs gravifique et le quatrième groupe d'axiomes de la mécanique

les concepts mathématiques qu'il faut introduire les uns après les autres ne sont pas des réalités par eux-mêmes. Ils ne prennent un sens déterminé dans l'univers physique que par la façon dont ils sont identifiés avec tel ou tel concept intuitif ou expérimental. Mais le concept abstrait ne prend véritablement une existence logiquement univoque et consistante que par sa formulation mathématique. La notion de temps, par exemple, n'existe en ce sens qu'en fonction des cinématiques axiomatiques ; il en est de même pour toutes les autres notions : le mouvement, la force, la matière, etc.

§51 Le problème du continu selon M. Weyl

la critique intuitioniste est une résurrection du paradoxe de Zénon.

[…]

On ne peut, sans émettre une affirmation incontrôlable et vide de sens, sur l'un des plus mystérieux phénomènes de l'esprit, prétendre que ce processus est fini, infini, ou transfini. Ce qu'on peut affirmer, […] c'est que cette fiction ne peut pas s'expliquer logiquement par cette autre fiction seulement : le nombre entier. Pour en rendre complètement à l'aide du nombre entier, il est au contraire nécessaire d'admettre qu'il y a un sens à dire *que l'on peut parcourir l'ensemble des nombres entiers, dans sa totalité ;* qu'on point est une limite véritablement atteinte ! C'est pas là que nous saisissons ce fait de la réalité : qu'Achille atteindra la tortue.

L'infini— l'ensemble de tous les nombres entiers — n'apparaît ici que comme expression de l'*irréductibilité logique* du concept « point » au concept « nombre entier ». Dire qu' « il est dans la nature de cet infini de ne pas pouvoir être épuisé », est une affirmation qui préjuge des possibilités. Elle repose sur l'idée préconçue que pour atteindre la limite d'un ensemble de points, il faille sauter de l'un de ces points au suivant à intervalles réguliers, de même façon que de la voix, ou la plume, on énumère la suite des nombres naturels. Il est clair que de distendre tout le processus sur un temps indéfini, enlève justement à la limite l'essence même de son être. Quand M. Weyl exprime l'opinion que le continu ne pourrait être considéré comme véritablement « construit » qu'à la consommation de tous les temps, il exprime certainement une vue extrêmement profonde, mais qui s'applique bien plus au continu physique à son *modèle abstrait, le continue mathématique.*

§52 L'axiomatique des nombres entiers

le nombre entier cardinal est un concept beaucoup moins immédiat qu'il paraît l'être à première vue. Le principe de la « nécessaire arithmétisation des mathématiques » semble conférer à l'entier une existence absolue, lui reconnaître une essence plus « objective » qu'aux autre abstractions dont le mathématicien s'occupe : *le nombre entier est le type même de la notion finie*.

[…] on pourrait, sans faire intervenir le nombre cardinal, passer à la division, aux nombres négatifs et fractionnaire. Mais il y a un *fait d'expérience* qui conduit au delà de ce cadre : c'est qu'ayant un groupe d'objets à compter, c'est-à-dire à numéroter, je puis m'y prendre de la façon la plus arbitraire ; je puis changer à mon gré l'ordre de ces objets et n'en obtiendrai pas moins toujours le même résultat. Les collections finies possèdent donc un caractère invariant vis-à-vis de toutes les permutations possibles : ce caractère est leur nombre. Il y a donc un véritable mouvement de la pensée à dire que, par exemple, certains objets sont au nombre de *six*, parce qu'ils sont numérotables de *un* à *six*.

§52 La logique formelle

l'intuition de la logique et celle des mathématique sont — sinon parfaitement identiques — du moins de même nature.

[…] ce n'est pas dans le cercle vicieux signalé par M. Weyl, ni dans une illicite extension du domaine de la logique comme le prétendent les intuitionistes qu'il faut cherche la source des antinomies qui, depuis longtemps, ne laissent pas d'inquiéter les mathématiciens. Le mal — si l'on peut appeler un mal ce qui tient à la nature même de notre pensée — a de beaucoup plus profondes racines. C'est que la Logique n'est point un ensemble de formules qui se combinent et se complètement en un jeu d'une infaillible et presque divine perfection. Il ne suffit pas d'être logique pour ne pas se tromper.

§55 Logiques intuitioniste et de l'infini

La formation des concepts est […] un acte de la pensée absolument irrationnel ; vouloir qu'il soit fini, c'est vouloir qu'il ne soit pas. Appliqués à l'activité de la pensée, les mots fini ou infini perdent leur sens. L'infini mathématique est donc un concept dérivé, explicatif, comme le nombre ; c'est peut-être la plus indispensable, la plus précieuse et la plus légitime de toutes les notions mathématiques.

[…]

La logique formelle peut construire et étudier les schémas : elle ne sait plus comment il faut les appliquer : c'est une tâche en dehors de ses moyens : c'est là l'objet essentiel de l'intuition mathématique.

[…]

sous l'axiomatique hilbertienne préexistent des concepts bien établis, celui de point, de lieu précis spécialement ; et […] l'axiomatique saisit les relations logiques possibles entre ces concepts.

Ici au contraire [dans la citation de Russell], l'axiomatique veut remplacer le concept fondamental, celui d'ensemble, par quelque chose dont elle feint de ne rien savoir : et, en vérité, elle n'arrive pas à en rien dire qui lui confère une manière quelconque d'exister.

Il est clair qu'on ne peut en rester là. Ce qui intéresse le mathématicien, ce n'est point tant les relations de ces inconnaissables classes entre elles que de décider si tel ou tel ensemble, celui des nombres entiers par exemple, est aussi une classe.

[…] *Les axiomes de notre système sont des décrets arbitraires sur les ensembles selon Cantor.*

§56 Conclusions

si l'on considère que, historiquement, c'est par la géométrie que la limite et le nombre irrationnel furent introduits, dans la mathématique, que *psychologiquement* c'est toujours ainsi qu'ils sont conçus, il faut bien reconnaître que le *sentiment* de plus grande évidence auquel nous faisions allusion ne peut qu'être trompeur.

[…] les règles de la logique ne paraissent pas avoir un domaine de validité illimité : elles ne sont peut-être justes qu'en fonction de ce à quoi on les applique.

Ainsi, ce n'est pas seulement parce qu'il appliquerait rigoureusement et impeccablement les règles de la logique que le mathématicien ne rencontrerait pas de contradiction, mais encore parce que, par une divination inconsciente et profonde, il les appliquerait à bon escient.

C'est ce que nous avons voulu exprimer déjà, en disant que l'intuition des mathématiques et celle de la logique, sont de même essence, et se conditionnent l'une l'autre.

[…]

La mathématique, dit-on parfois, est la seule science dont les lois sont vraies d'une façon absolue. Mais, d'autre part, la nécessité inhumaine et presque divine de ses conclusions, en fait une science en quelque sorte étrangère à l'homme. La réalité, nous l'avons vu, est complètement différente. Dans son essence, la mathématique n'est qu'un ensemble de vues et de procédés schématiques de notre esprit, réplique consciente de l'activité inconsciente qui crée en nous une image du monde et un ensemble de normes selon lesquelles nous agissons et réagissons. Non pas édifice ancré quelque part avec une solidité absolue, mais construction aérienne, qui tient comme par miracle : la plus audacieuse et la plus invraisemblable aventure de l'esprit.