

Un petit problème pour collégien.ne

Soit O un point du plan et soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centre O .

On place A, A', B et B' de telle sorte que $[AA']$ et $[BB']$ soient des diamètres des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.

Montrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Une rédaction de collégien.ne

Nous savons que O est le milieu des segments $[AA']$ et $[BB']$, or, un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme, donc $ABA'B'$ est un parallélogramme. Ainsi, les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, car les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles par définition.

Nous savons que O est le milieu des segments $[AA']$ et $[BB']$, or, un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme, donc $ABA'B'$ est un parallélogramme. Comme les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles par définition, on peut en déduire que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Une rédaction de collégien.ne

Nous savons que O est le milieu des segments $[AA']$ et $[BB']$,
or, un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme,

donc $ABA'B'$ est un parallélogramme.

Ainsi, les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles,

car les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles par définition.

Nous savons que O est le milieu des segments $[AA']$ et $[BB']$;

or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme;

donc $ABA'B'$ est un parallélogramme.

Comme les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles par définition,

on peut en déduire que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles,

Une démonstration de collégien.ne

- **Nous savons que** O est le milieu des segments $[AA']$ et $[BB']$,
or, un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu
est un parallélogramme,
donc $ABA'B'$ est un parallélogramme.
- **De plus**, les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles par définition,
donc les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

$$\frac{\frac{O \text{ milieu de } [AA'] \quad O \text{ milieu de } [BB']}{ABA'B' \text{ parallélogramme}} \text{ThDiagPara}}{(AB) \text{ et } (A'B') \text{ parallèles}} \text{DefPara}$$

Une démonstration de collégien.ne

Soit O un point du plan et soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centre O .

On place A, A', B et B' de telle sorte que $[AA']$ et $[BB']$ soient des diamètres des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.

Montrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

$$\frac{\begin{array}{c} O \text{ milieu de } [AA'] \quad O \text{ milieu de } [BB'] \\ \hline ABA'B' \text{ parallélogramme} \end{array}}{(AB) \text{ et } (A'B') \text{ parallèles}} \begin{array}{l} \text{ThDiagPara} \\ \text{DefPara} \end{array}$$

Une démonstration plus rigoureuse

$$\begin{array}{c}
 \frac{O \text{ ctr de } \mathcal{C}_1 \quad [AA'] \text{ diam } \mathcal{C}_1}{O \text{ milieu de } [AA']} \text{ThDiam} \quad \frac{O \text{ ctr de } \mathcal{C}_2 \quad [BB'] \text{ diam } \mathcal{C}_2}{O \text{ milieu de } [BB']} \text{ThDiam} \\
 \hline
 \frac{\hspace{10em}}{ABA'B' \text{ parallélogramme}} \text{Th} \\
 \hline
 (AB) \text{ et } (A'B') \text{ parallèles} \text{---Def}
 \end{array}$$

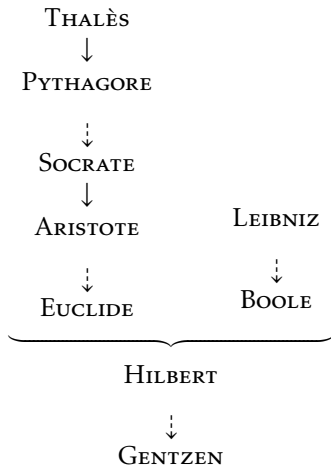
- **Montrons que** les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, pour cela, **il suffit de** montrer que $ABA'B'$ est un parallélogramme **car** les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles par définition :
- **Comme** un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme, **il suffit de** montrer que O est le milieu des segment $[AA']$ et $[BB']$:
 - **Comme** le centre d'un cercle est au milieu de chaque diamètre de ce cercle, **il suffit de** montrer que O est le centre d'un cercle dont le segment $[AA']$ est un diamètre ; le cercle $\mathcal{C}_1$ convient d'après l'énoncé, ce qu'on voulait.
 - **De même, du fait** que O est le centre du cercle $\mathcal{C}_2$ dont le segment $[BB']$ est un diamètre, nous pouvons conclure.

Qu'est-ce qu'un théorème ?

$$\begin{array}{c}
 \frac{O \text{ ctr de } \mathcal{C}_1 \quad [AA'] \text{ diam } \mathcal{C}_1}{O \text{ milieu de } [AA']} \text{ThDiam} \quad \frac{O \text{ ctr de } \mathcal{C}_2 \quad [BB'] \text{ diam } \mathcal{C}_2}{O \text{ milieu de } [BB']} \text{ThDiam} \\
 \hline
 \text{Th} \\
 \hline
 ABA'B' \text{ parallélogramme} \\
 \hline
 (AB) \text{ et } (A'B') \text{ parallèles} \quad \text{Def}
 \end{array}$$

$$\frac{O \text{ ctr de } \mathcal{C}_1 \quad O \text{ ctr de } \mathcal{C}_2 \quad [AA'] \text{ diam } \mathcal{C}_1 \quad [BB'] \text{ diam } \mathcal{C}_2}{(AB) \text{ et } (A'B') \text{ parallèles}} \text{ThJam}$$

La quête de la rigueur



Les règles de la déduction naturelle

	Introduction	Élimination
Conjonction	$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge_i$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge_{e,g} \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge_{e,d}$
Disjonction	$\frac{A}{A \vee B} \vee_{i,g} \quad \frac{B}{A \vee B} \vee_{i,d}$	$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad C}{C} \vee_e$
Implication	$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow_i$	$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow_e$

Transitivité de l'implication et retour sur la nature des hypothèses et des théorèmes

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A] \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow_e \quad B \Rightarrow C \\
 \hline
 C \Rightarrow_e \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow_i
 \end{array}$$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow_t$$

Transitivité de l'implication et retour sur la nature des hypothèses et des théorèmes

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A] \quad \frac{[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)]}{A \Rightarrow B} \wedge_{e,g}}{B} \Rightarrow_e \quad \frac{[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)]}{B \Rightarrow C} \wedge_{e,d} \Rightarrow_e \\
 \frac{C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow_i \\
 \frac{((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)}{} \Rightarrow_i
 \end{array}$$

$$\overline{((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)} \Rightarrow'_t$$

La négation et l'équivalence

Négation

Introduction

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg_i$$

Élimination

$$\frac{\neg \neg A}{A} \neg_e$$

Équivalence

$$\frac{\begin{array}{cc} [A] & [B] \\ \vdots & \vdots \\ B & A \end{array}}{A \iff B} \iff_i$$

$$\frac{A \quad A \iff B}{B} \iff_e$$

Définition : $\neg A := A \implies \perp$

Définition : $A \iff B := (A \implies B) \wedge (B \implies A)$

Trois points de vue sur la nature du vrai et du faux

Contradiction

Introduction

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \perp_i$$

Élimination

$$\frac{\perp}{A} \perp_e$$

La règle de réduction à l'absurde :

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg A] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} \text{RA}$$

La contraposition

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A] \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow_e \quad [\neg B] \\
 \hline
 \perp \Rightarrow_e \\
 \hline
 \neg A \Rightarrow_i \\
 \hline
 \neg B \Rightarrow \neg A \Rightarrow_i
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 [A] \quad \frac{[\neg B] \quad \neg B \Rightarrow \neg A}{\neg A} \Rightarrow_e \\
 \hline
 \perp \Rightarrow_i \\
 \hline
 B \text{ RA} \\
 \hline
 A \Rightarrow B \Rightarrow_i
 \end{array}$$

Les mille visages du tiers exclus

Le raisonnement par l'absurde

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg A] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} \text{RA}$$

La raisonnement par contraposition

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg B] \\ \vdots \\ \neg A \end{array}}{A \Rightarrow B} \text{RC}$$

La raisonnement par double négation

$$\left. \frac{\frac{[\neg A] \quad \neg\neg A}{\perp} \perp_i}{A} \text{RA} \right\} \frac{\neg\neg A}{A} \text{DN}$$

Le principe du tiers exclu

$$\overline{A \vee \neg A} \text{TE}$$

Démonstration du principe du tiers exclu

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[\neg A \wedge A]}{A} \wedge_{e,d} \quad \frac{[\neg A \wedge A]}{\neg A} \wedge_{e,g}}{\perp} \perp_i \\
 \frac{\perp}{\neg(\neg A \wedge A)} \Rightarrow_i \\
 \frac{\neg(\neg A \wedge A)}{\neg\neg A \vee \neg A} \text{DM}'_2 \\
 \hline
 A \vee \neg A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{[\neg\neg A]}{A} \text{DN} \\
 \frac{A}{A \vee \neg A} \vee_{i,g}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{[\neg A]}{A \vee \neg A} \vee_{i,d} \\
 \hline
 A \vee \neg A \vee_e
 \end{array}$$

La première loi de DE MORGAN

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[A]}{A \vee B} \vee_{i,g} \quad \neg(A \vee B)}{\perp} \Rightarrow_e \quad \frac{\frac{[B]}{A \vee B} \vee_{i,d} \quad \neg(A \vee B)}{\perp} \Rightarrow_e \\
 \frac{\perp}{\neg A} \Rightarrow_i \quad \frac{\perp}{\neg B} \Rightarrow_i \\
 \hline
 \neg A \wedge \neg B \quad \wedge_i
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \vee B] \quad \frac{[A] \quad \frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg A} \wedge_{e,g}}{\perp} \perp_i \quad \frac{[B] \quad \frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg B} \wedge_{e,d}}{\perp} \perp_i}{\perp} \vee_e \\
 \hline
 \neg(A \vee B) \quad \Rightarrow_i
 \end{array}$$

La deuxième loi de DE MORGAN

$$\begin{array}{c}
 \neg A \vee \neg B \qquad \frac{\frac{[A \wedge B] \wedge_{e,g} \quad [\neg A]}{A} \perp_i}{\perp} \qquad \frac{\frac{[A \wedge B] \wedge_{e,d} \quad [\neg B]}{B} \perp_i}{\perp} \\
 \hline
 \perp \vee_e \\
 \hline
 \perp \Rightarrow_i \\
 \hline
 \neg(A \wedge B)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[\neg A] \vee_{i,g} \quad [\neg(\neg A \vee \neg B)]}{\neg A \vee \neg B} \perp_i}{\perp} \perp_i \text{ RA} \qquad \frac{\frac{[\neg B] \vee_{i,d} \quad [\neg(\neg A \vee \neg B)]}{\neg A \vee \neg B} \perp_i}{\perp} \perp_i \text{ RA} \\
 \hline
 A \qquad B \\
 \hline
 A \wedge B \wedge_i \neg(A \wedge B) \\
 \hline
 \perp \perp_i \\
 \hline
 \neg A \vee \neg B \text{ RA}
 \end{array}$$

Les quantificateurs

	Introduction	Élimination
Universel	$\frac{P(t)}{\forall x, P(x)} \forall_i \quad (*)$	$\frac{\forall x, P(x)}{P(t)} \forall_e$
Existenciel	$\frac{P(t)}{\exists x, P(x)} \exists_i$	$\frac{\begin{array}{c} [P(t)] \\ \vdots \\ A \end{array}}{A} \exists_e \quad (**)$

(*) À condition que la variable t n'apparaisse dans aucune des hypothèses non déchargées.

(**) À condition que la variable t n'apparaisse ni dans la conclusion A ni dans aucune des hypothèses non déchargées.

Notation : $\forall x \in E, P(x) := \forall x, x \in E \implies P(x)$

Notation : $\exists x \in E, P(x) := \exists x, x \in E \wedge P(x)$

Un exemple élémentaire

Montrons $\forall x \in \mathbb{R}, x = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$:

- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons l'équivalence $x = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$ par double implication :
 - Montrons $x = 0 \implies \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$:
 - Supposons $x = 0$ et montrons $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$:
 - Soit $\varepsilon > 0$, on a alors $|x| = |0| = 0 < \varepsilon$, CQFD.
 - Montrons $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \implies x = 0$ par contraposition :
 - Supposons $x \neq 0$ et montrons $\exists \varepsilon > 0, |x| \geq \varepsilon$:
 - Posons $\varepsilon := |x|$. Puisque $x \neq 0$, on a $\varepsilon = |x| > 0$ et $|x| \geq \varepsilon$, CQFD.

Résoudre $\sqrt{2x} = x - 4$

$$2x = (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 16 = 36$$

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{36}}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{10 - \sqrt{36}}{2} = 2$$

$$\text{Résoudre } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = X$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = x \\ y = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrer u constante $\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$

Trivial par définition !

Montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} 2u_n = 0$

On sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \implies |u_n| < \varepsilon$. On fait $\varepsilon = \varepsilon/2$, donc $\exists N, n > N \implies |u_n| < \varepsilon/2$
 $\iff |2u_n| < \varepsilon$, CQFD

Irrationalité de $\sqrt{2}$

Montrons $\neg \left(\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ et } p \wedge q = 1 \right)$

en montrant $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, p = q\sqrt{2} \implies p \wedge q \neq 1 :$

- Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, supposons $p = q\sqrt{2}$ et montrons $p \wedge q \neq 1 :$
On a $p^2 = 2q^2$ donc p^2 pair, et donc p pair également, i.e. $p = 2p'$ pour un certain $p' \in \mathbb{N}$.
Ainsi, $(2p')^2 = 2q^2$, i.e. $q^2 = 2p'^2$, donc q^2 pair, et donc q pair également. Ainsi, p et q sont tous deux divisibles par 2, le PGCD l'est donc également, et donc $p \wedge q \neq 1$, CQFD.

Montrons $\neg \left(\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ et } p \wedge q = 1 \right)$ sans le principe du tiers exclus :

- Supposons $p = q\sqrt{2}$ et $p \wedge q = 1$ pour un certain couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et cherchons une contradiction :
- On a $p^2 = 2q^2$ donc p^2 pair, et donc p pair également, i.e. $p = 2p'$ pour un certain $p' \in \mathbb{N}$. Ainsi, $(2p')^2 = 2q^2$, i.e. $q^2 = 2p'^2$, donc q^2 pair, et donc q pair également. Ainsi, p et q sont tous deux divisibles par 2, le PGCD l'est donc également, donc 2 divise 1, contradiction.

La poussière sous le tapis

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}$:

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons n^2 pair et montrons n pair par disjonction de cas selon la parité de n :
- Si n est pair, le résultat est immédiat.
- Supposons n impair, alors $n = 2p + 1$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, donc $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2p' + 1$ avec $p' := 2p^2 + 2p \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, on sait que $n^2 = 2p''$ pour un certain $p'' \in \mathbb{N}$, donc $0 = n^2 - n^2 = 2|p' - p''| + 1 \geq 1$, ce qui est absurde, donc n pair, CQFD.

Définition : n pair $:= \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$

Définition : n impair $:= \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p + 1$

Théorème : $\forall n \in \mathbb{N}, n$ pair ou n impair

Démonstration : Laisée à l'auditoire !